Odpowiedzi - Matura rozszerzona, maj 2026

M_R_2026_05_CKE - rozwiązania (wszystkie metody)

Zadanie 1

Zad. 1. (0-2pkt) Oblicz granicę $\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{n+2}{n-1}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7}$.

Uproszczenie licznika (symbol Newtona):

$\binom{n+2}{n-1} = \binom{n+2}{(n+2)-(n-1)} = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$.

Więc licznik to wielomian stopnia 3 ze wsp. wiodącym $\frac{1}{6}$.

Metoda I - dzielenie licznika i mianownika przez n^3

$\frac{\frac{(n+2)(n+1)n}{6}}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7} = \frac{\frac{1}{6}(n+2)(n+1)n}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7} = \frac{\frac{1}{6}\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 1}{\frac{1}{2} - \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^3}}$.

Licznik dąży do $\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{6}$, mianownik do $\frac{1}{2}$. Granica: $\frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$.

Metoda II - stosunek współczynników wiodących

Obie wielokrotności są stopnia 3. Dla ilorazu wielomianów tego samego stopnia: granica = stosunek współczynników przy n^3.

Licznik: $\frac{(n+2)(n+1)n}{6}$ - wsp. wiodący $\frac{1}{6}$.

Mianownik: wsp. wiodący $\frac{1}{2}$.

Granica: $\frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$.

Metoda III - rozwinięcie wielomianowe

Licznik: $(n+2)(n+1)n = n^3 + 3n^2 + 2n$, czyli $\frac{1}{6}(n^3 + 3n^2 + 2n)$.

Iloraz: $\frac{\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n}{\frac{1}{2}n^3 - 4n + 7}$. Dzielimy przez n^3:

$\frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}}{\frac{1}{2} - \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^3}} \to \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$.

Odp: $\lim = \frac{1}{3}$.

Zadanie 2

Zad. 2. (0-3pkt) Losujemy bez zwracania 8 liczb ze $\{1, 2, ..., 8\}$, ustawiamy w ciąg. Prawdopodobieństwo, że iloczyn **każdych** trzech kolejnych wyrazów dzieli się przez 3.

Wśród $\{1, ..., 8\}$ wielokrotności 3: $\{3, 6\}$ - są 2 sztuki. Pozostałe (6 liczb) - nie-wielokrotności 3.
$|\Omega| = 8! = 40\,320$.

Warunek: każde okno 3 kolejnych wyrazów (jest ich 6: pozycje $\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, ..., \{6, 7, 8\}$) zawiera co najmniej jedną wielokrotność 3.
Oznaczmy pozycje wielokrotności 3 jako $p_1 < p_2$.

Metoda I - bezpośrednie zliczanie par (p_1, p_2)

Warunki konieczne:
- Pierwsze okno $\{1, 2, 3\}$ zawiera wielokrotność $\to p_1 \le 3$.
- Ostatnie okno $\{6, 7, 8\} \to p_2 \ge 6$.
- Między dwiema wielokrotnościami nie może być ≥ 3 pozycji bez wielokrotności $\to p_2 - p_1 \le 3$.

Liczymy pary (p_1, p_2) z $p_1 \in \{1, 2, 3\}$, $p_2 \in \{6, 7, 8\}$, $p_2 - p_1 \le 3$:
- $p_1 = 1$: $p_2 \le 4$ - sprzeczność z $p_2 \ge 6$. **0 par.**
- $p_1 = 2$: $p_2 \le 5$ - sprzeczność. **0 par.**
- $p_1 = 3$: $p_2 \le 6$, czyli $p_2 = 6$. **1 para: (3, 6).**

Liczba sprzyjających ustawień: wybór, która wielokrotność idzie na poz. 3 a która na 6: 2! sposobów; pozostałe 6 liczb na pozostałe 6 pozycji: 6! sposobów. Łącznie: $2! \cdot 6! = 2 \cdot 720 = 1440$.
$P(A) = \frac{1440}{8!} = \frac{1440}{40320} = \frac{1}{28}$.

Metoda II - przez sekwencje pozycji (kombinatoryka)

Losowy ciąg = wybór $\binom{8}{2} = 28$ pozycji dla wielokrotności 3 (są równoprawdopodobne), pomnożone przez $2! \cdot 6!$ permutacji wewnętrznych. Te same $2! \cdot 6!$ wystąpi w $|\Omega| = 8!$, więc:
$P(A) = \frac{\text{liczba sprzyjających par pozycji}}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{28}$ (z Metody I).

Metoda III - kontrolne sprawdzenie wszystkich par

Tabela: dla każdej z $\binom{8}{2} = 28$ par sprawdź, czy spełnia warunek. Pary z $p_2 - p_1 \le 3$, $p_1 \le 3$, $p_2 \ge 6$: tylko (3, 6)
. ** $\frac{1}{28}$.

Odp:** $P(A) = \frac{1}{28}$.

Zadanie 3

Zad. 3. (0-3pkt) Wykaż: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$ dla $x, y > 0$.

Metoda I - sprowadzenie do kwadratu

Mnożymy obie strony przez $x^2y^2 > 0$:

$xy^2 + x^2y \le x^3 + y^3$, czyli $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \ge 0$.

Grupowanie: $x^2(x-y) - y^2(x-y) = (x-y)(x^2-y^2) = (x-y)(x-y)(x+y) = (x-y)^2(x+y)$.

Ponieważ $(x-y)^2 \ge 0$ i $x+y > 0$, iloczyn jest ≥ 0. **CKD.**

Równość $\iff$ $x = y$.

Metoda II - nierówność między średnimi (AM-GM)

Dla $a, b > 0$: $a + b \ge 2\sqrt{ab}$.

Zapiszmy lewą stronę: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$.

Prawą stronę: $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} = \frac{x^3+y^3}{x^2y^2} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2y^2}$.

Nierówność: $\frac{x+y}{xy} \le \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2y^2}$.

Dzielimy obie strony przez $\frac{x+y}{xy} > 0$: $1 \le \frac{x^2-xy+y^2}{xy}$, czyli $xy \le x^2 - xy + y^2$, $0 \le x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$. ✓

CKD.

Metoda III - przekształcenie tożsamościowe na różnicę

Rozważ $L - P = \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) = \frac{x-y}{x^2} + \frac{y-x}{y^2} = (x-y)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)$.

$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{y^2-x^2}{x^2y^2} = \frac{(y-x)(y+x)}{x^2y^2}$.

Więc $L - P = (x-y) \cdot \frac{(y-x)(y+x)}{x^2y^2} = -\frac{(x-y)^2(x+y)}{x^2y^2} \le 0$, czyli $L \le P$. **CKD.**

Zadanie 4

Zad. 4. (0-3pkt) Kwadrat $ABCD$ o boku a. K - środek AB, L - środek BC. M na BC takie że $DK \perp KM$. Odcinek AL przecina DK w P, a DM w Q. Wykaż $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$.

Metoda I - układ współrzędnych

Ustawiamy: $A = (0,0)$, $B = (a,0)$, $C = (a,a)$, $D = (0,a)$, $K = (\frac{a}{2},0)$, $L = (a,\frac{a}{2})$.

Wyznaczenie M: $\vec{DK} = (\frac{a}{2},-a)$. $M = (a,m)$, $\vec{KM} = (\frac{a}{2},m)$. Z $DK \perp KM$: $\frac{a^2}{4} - am = 0 \Rightarrow m = \frac{a}{4}$, czyli $M = (a,\frac{a}{4})$.

Proste:

- AL: przez $(0,0)$ i $(a,\frac{a}{2})$, równanie $y = \frac{x}{2}$.
- DK: przez $(0,a)$ i $(\frac{a}{2},0)$, $y = -2x + a$.
- DM: przez $(0,a)$ i $(a,\frac{a}{4})$, kierunek $(1,-\frac{3}{4})$, $y = -\frac{3}{4}x + a$.

Punkty przecięcia:

- $P = AL \cap DK$: $\frac{x}{2} = -2x + a \Rightarrow \frac{5x}{2} = a \Rightarrow x = \frac{2a}{5}$, $y = \frac{a}{5}$, $P = (\frac{2a}{5},\frac{a}{5})$.
- $Q = AL \cap DM$: $\frac{x}{2} = -\frac{3x}{4} + a \Rightarrow \frac{5x}{4} = a \Rightarrow x = \frac{4a}{5}$, $y = \frac{2a}{5}$, $Q = (\frac{4a}{5},\frac{2a}{5})$.

$|PQ| = \sqrt{(\frac{2a}{5})^2 + (\frac{a}{5})^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{25}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. **CKD.**

Metoda II - podobieństwo trójkątów

W $\triangle ABK$ (prostokątny w B): $|AK| = \frac{a}{2}$, $|AB| = a$, więc $|AL|^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$, $|AL| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Podobnie $|DK| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

W $\triangle BKD$ (prostokątny w B): $|BK| = \frac{a}{2}$, $|BD| = a\sqrt{2}$, ale lepiej: $\triangle DAK \cong \triangle ABL$ (przyprostokątne $\frac{a}{2}, a$), więc $AL \perp DK$.

$\rightarrow$ P to spodek wysokości w $\triangle DAK$ z A na DK.

W $\triangle DAK$ prostokątnym w A: $|AP| = \dfrac{|AD| \cdot |AK|}{|DK|} = \dfrac{a \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Dla Q: $|AL| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, więc trzeba znaleźć $|AQ|$.

$M = (a,\frac{a}{4})$, DM ma kierunek $(4,-3)$ (po przeskalowaniu). AL ma kierunek $(2,1)$. Iloczyn skalarny $= 8 - 3 = 5 \neq 0$ - nie są prostopadłe.

Liczymy $|AQ|$ z proporcji: $Q = (\frac{4a}{5},\frac{2a}{5}) \rightarrow |AQ| = \sqrt{\frac{16a^2+4a^2}{25}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

$|PQ| = |AQ| - |AP| = \frac{2a\sqrt{5}}{5} - \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. **CKD.**

Metoda III - wektory

Niech $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = a$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{u}$, $\vec{AL} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$, $\vec{AD} = \vec{v}$.

P na AL: $\vec{AP} = t(\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v})$. P na DK: $\vec{DP} = s(\vec{AK} - \vec{AD}) = s(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v})$, czyli $\vec{AP} = \vec{v} + s(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}) = \frac{s}{2}\vec{u} + (1-s)\vec{v}$.

Porównujemy: $t = \frac{s}{2}$, $\frac{t}{2} = 1 - s$. Z drugiego $t = 2 - 2s$, podstawiamy: $2 - 2s = \frac{s}{2} \Rightarrow 4 - 4s = s \Rightarrow s = \frac{4}{5}$, $t = \frac{2}{5}$.

$\vec{AP} = \frac{2}{5}\vec{AL}$, więc $|AP| = \frac{2}{5}|AL| = \frac{2}{5} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Analogicznie $\vec{AQ} = \frac{4}{5}\vec{AL}$, $|AQ| = \frac{4}{5} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

$|PQ| = |AQ| - |AP| = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. **CKD.**

Zadanie 5

Zad. 5. (0-4pkt) $|2x-6| - |x^2-9| < 0$.

Zauważmy: $|2x-6| = 2|x-3|$ oraz $|x^2-9| = |x-3| \cdot |x+3|$.

Nierówność: $2|x-3| < |x-3| \cdot |x+3|$.

Metoda I - dzielenie przez $|x-3|$

- Przypadek $x = 3$: $0 < 0$ - fałsz. $x = 3$ nie jest rozwiązaniem.
- Przypadek $x \neq 3$ (czyli $|x-3| > 0$): dzielimy obie strony przez $|x-3|$:

$2 < |x+3| \iff x+3 > 2 \lor x+3 < -2 \iff x > -1 \lor x < -5$.

Łącząc z $x \neq 3$: $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$.

Metoda II - analiza przypadków po znaku wyrażeń

Punkty zerowania modułów: $x = 3, -3$. Przedziały: $(-\infty, -3]$, $(-3, 3)$, $[3, +\infty)$.

A. $x \geq 3$: $|2x-6| = 2x-6$, $|x^2-9| = x^2-9$.

$(2x-6) - (x^2-9) < 0 \Rightarrow -x^2+2x+3 < 0 \Rightarrow x^2-2x-3 > 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) > 0$.

Dla $x \geq 3$ obie nawiasy ≥ 0, iloczyn $> 0 \iff x > 3$. Rozw.: $(3, +\infty)$.

B. $-3 \leq x < 3$: $|2x-6| = 6-2x$, $|x^2-9| = 9-x^2$.

$(6-2x) - (9-x^2) < 0 \Rightarrow x^2-2x-3 < 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) < 0$, czyli $-1 < x < 3$. Z warunkiem $-3 \leq x < 3$: $(-1, 3)$.

C. $x < -3$: $|2x-6| = 6-2x$, $|x^2-9| = x^2-9$.

$(6-2x) - (x^2-9) < 0 \Rightarrow -x^2-2x+15 < 0 \Rightarrow x^2+2x-15 > 0 \Rightarrow (x+5)(x-3) > 0$.

Dla $x < -3$ czynnik $(x-3) < 0$, więc potrzeba $(x+5) < 0$, czyli $x < -5$. Rozw.: $(-\infty, -5)$.

Suma: $(-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$.

Metoda III - graficzna

Narysuj $f(x) = |2x-6|$ i $g(x) = |x^2-9|$. Szukamy x z $f(x) < g(x)$.

f - dwie półproste z wierzchołkiem $(3, 0)$, nachylenie ± 2.

g - parabola $y = x^2 - 9$ "odbita" do góry między $x = -3$ a $x = 3$.

Miejsca przecięcia $f = g$: z analizy w Metodzie II to $x = -5$, $x = -1$, $x = 3$ (potrójne miejsce zerowania w tym punkcie).

Sprawdzamy znak $f - g$ w punktach testowych: $x = -10$: $f - g = 26 - 91 < 0$ ✓; $x = -4$: $f - g = 14 - 7 > 0$; $x = 0$: $f - g = 6 - 9 < 0$ ✓; $x = 5$: $f - g = 4 - 16 < 0$ ✓.

Rozw.: $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$.

Odp: $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$

Zadanie 6

Zad. 6. (0-4pkt) Ciąg arytm. (a_n), $a_1 = 1$, $a_N = -2025$, liczba wyrazów $N > 6$. Wyrazy a_2, a_3, a_6 tworzą ciąg geometryczny.
Wyznaczyć S_N.

Metoda I - bezpośrednie wyznaczenie różnicy

$a_2 = 1 + r$, $a_3 = 1 + 2r$, $a_6 = 1 + 5r$.

Warunek geom.: $a_3^2 = a_2 \cdot a_6$, czyli $(1 + 2r)^2 = (1 + r)(1 + 5r)$.

$1 + 4r + 4r^2 = 1 + 6r + 5r^2 \Rightarrow r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r(r + 2) = 0$.

- $r = 0$: ciąg stały, $a_N = 1 \neq -2025$. Odpada.
- $r = -2$: $a_N = 1 + (N - 1) \cdot (-2) = -2025 \Rightarrow 2(N - 1) = 2026 \Rightarrow N = 1014$. Warunek $N > 6$ ✓.

Suma: $S_N = \frac{N(a_1 + a_N)}{2} = \frac{1014 \cdot (1 - 2025)}{2} = \frac{1014 \cdot (-2024)}{2} = 507 \cdot (-2024) = -1\,026\,168$.

Metoda II - przez iloraz ciągu geometrycznego

Iloraz: $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1 + 2r}{1 + r}$ (przy $1 + r \neq 0$). Również $q = \frac{a_6}{a_3}^{1/?}$ ... lepiej: w ciągu geom. trzy wyrazy są w postępie geom., więc kwadrat środkowego = iloczyn skrajnych. To prowadzi do tego samego równania co Metoda I.

Metoda III - suma jako wartość ciągu (alt. wzór)

Po wyznaczeniu $r = -2$ i $N = 1014$ można też użyć: $S_N = \frac{N(2a_1 + (N - 1)r)}{2} = \frac{1014(2 + 1013 \cdot (-2))}{2} = \frac{1014(2 - 2026)}{2} = \frac{1014 \cdot (-2024)}{2} = -1\,026\,168$.

Odp: $r = -2$, $N = 1014$, $S_N = -1\,026\,168$.

Zadanie 7

Zad. 7. (0-4pkt) $\sin(6x) - 2\sin(2x) = 0$.

Metoda I - przez wzór na $\sin(3\alpha)$

Podstawienie $\alpha = 2x$: $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

$\sin 6x = 3\sin 2x - 4\sin^3 2x$.

Równanie: $3\sin 2x - 4\sin^3 2x - 2\sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x - 4\sin^3 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x \cdot (1 - 4\sin^2 2x) = 0$.

(a) $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\sin^2 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \pm\frac{1}{2}$.

$\sin 2x = \frac{1}{2}$: $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, czyli $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

$\sin 2x = -\frac{1}{2}$: $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ lub $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$.

Metoda II - suma na iloczyn

$\sin 6x - 2\sin 2x = 0$. Skorzystaj z $\sin 6x = \sin(4x + 2x) = \sin 4x\cos 2x + \cos 4x\sin 2x$.

Lub: $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$ oraz $\sin 3x = \sin(2x + x)$. Prowadzi to do bardziej żmudnych obliczeń.

Lepiej: $\sin 6x - \sin 2x = 2\cos 4x\sin 2x$, więc $\sin 6x - 2\sin 2x = (\sin 6x - \sin 2x) - \sin 2x = 2\cos 4x\sin 2x - \sin 2x = \sin 2x(2\cos 4x - 1)$.

Równanie $\sin 2x(2\cos 4x - 1) = 0$.

(a) $\sin 2x = 0$: $x = \frac{k\pi}{2}$.

(b) $\cos 4x = \frac{1}{2}$: $4x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$.

Uwaga: $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ rozwija się na 4 ciągi: $\frac{\pi}{12} + k\pi$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ $(= -\frac{5\pi}{12} + k\pi)$, $-\frac{\pi}{12} + k\pi$, $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{5\pi}{12} + k\pi$. Zgodne z Metodą I.

Metoda III - przez $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$

$2\sin 3x\cos 3x - 2\sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 3x\cos 3x = \sin 2x$.

Metoda mniej elegancka - prowadzi do równania $\sin 6x = 2\sin 2x$, czyli tego samego problemu.

Odp: $x \in \left\{\frac{k\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{12} + k\pi, \pm\frac{5\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Zadanie 8

Zad. 8. (0-4pkt) Ostrosłup praw. trójkątny ABCS, podstawa równoboczna, długość okręgu opisanego na ABC to $6\sqrt{2}\pi$, $\cos\angle BSC = \frac{5}{9}$.
Wyznacz bok podstawy a i cosinus kąta między ścianami SAC i SBC.

Krok 1: bok podstawy

Obwód okręgu $2\pi R = 6\sqrt{2}\pi \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$.

Dla trójkąta równobocznego $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, więc $a = R\sqrt{3} = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{6}$.

Krok 2: krawędź boczna b = |SA| = |SB| = |SC|

W $\triangle SBC$: $|BC| = a = 3\sqrt{6}$, $|SB| = |SC| = b$, $\cos\angle BSC = \frac{5}{9}$.

Tw. cosinusów: $a^2 = 2b^2(1 - \cos\angle BSC)$.

$54 = 2b^2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8b^2}{9} \Rightarrow b^2 = \frac{486}{8} = \frac{243}{4}$, $b = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Krok 3: kąt dwuścienny - METODY

Metoda I - przez wysokości ścian

Niech T - rzut prostopadły B na SC (i symetrycznie A na SC, ten sam punkt z symetrii). Wtedy $\angle ATB = \varphi$ to szukany kąt dwuścienny.

Wysokość $\triangle SBC$ z B: $h = \frac{2P_{SBC}}{|SC|}$.

$\sin\angle BSC = \sqrt{1 - \frac{25}{81}} = \sqrt{\frac{56}{81}} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$.

$P_{SBC} = \frac{1}{2}b^2\sin\angle BSC = \frac{1}{2}\cdot\frac{243}{4}\cdot\frac{2\sqrt{14}}{9} = \frac{27\sqrt{14}}{4}$.

$$h = \frac{2\cdot 27\sqrt{14}/4}{9\sqrt{3}/2} = \frac{27\sqrt{14}/2}{9\sqrt{3}/2} = \frac{27\sqrt{14}}{9\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{3}} = \sqrt{42}.$$

W $\triangle ATB$ (z symetrii): $|AT| = |BT| = \sqrt{42}$, $|AB| = a = 3\sqrt{6}$.

Tw. cosinusów: $54 = 2\cdot 42(1 - \cos\varphi) \Rightarrow 1 - \cos\varphi = \frac{54}{84} = \frac{9}{14} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{5}{14}$.

Metoda II - układ współrzędnych

ABC równoboczny w płaszczyźnie $z = 0$, środek ciężkości w $O = (0, 0, 0)$.

$A = (R, 0, 0) = (3\sqrt{2}, 0, 0)$, pozostałe wierzchołki B, C obracając o 120°.

Wysokość H ostrosłupa: $H^2 = b^2 - R^2 = \frac{243}{4} - 18 = \frac{171}{4}$.

$S = (0, 0, H)$.

Wektory normalne do ścian SAC i SBC $\rightarrow$ iloczyn skalarny $\rightarrow \cos\varphi$. Po obliczeniu daje $\cos\varphi = \frac{5}{14}$.

Metoda III - przez kąt nachylenia ściany do podstawy

Niech M - środek BC, N - środek AC. Kąt nachylenia ściany SBC do podstawy: w $\triangle SOM$, gdzie $|OM| = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Kombinując kąty nachyleń ścian sąsiednich uzyskujemy ten sam wynik $\cos\varphi = \frac{5}{14}$ (rachunek dłuższy niż Metoda I).

Odp: $a = 3\sqrt{6}$, $\cos\varphi = \frac{5}{14}$.

Zadanie 9

Zad. 9. (0-5pkt) $A = (1, -1)$, $B = (4, 0)$. $\triangle ABC$ równoramienny ($|CA| = |CB|$), jedno z ramion na prostej $x + 2y - 4 = 0$. M na AC z $|AM| : |MC| = 1 : 4$. Wyznacz równanie okręgu o środku M przechodzącego przez C.

Krok 1: które ramię leży na prostej l
Sprawdzamy punkty: A: $1 + 2(-1) - 4 = -5 \neq 0$. B: $4 + 0 - 4 = 0$ ✓.
Więc $B \in l$, a ramieniem na l jest odcinek BC (zawiera B). Stąd $C \in l$.

Krok 2: wyznaczenie C

Metoda I - parametr na prostej l

$l : x = 4 - 2y$. Punkt $C = (4 - 2t, t)$ dla pewnego t.
$|CA|^2 = (4 - 2t - 1)^2 + (t + 1)^2 = (3 - 2t)^2 + (t + 1)^2 = 9 - 12t + 4t^2 + t^2 + 2t + 1 = 5t^2 - 10t + 10$.
$|CB|^2 = (4 - 2t - 4)^2 + t^2 = 4t^2 + t^2 = 5t^2$.
Z $|CA|^2 = |CB|^2$: $5t^2 - 10t + 10 = 5t^2 \Rightarrow t = 1$.
$C = (2, 1)$.

Metoda II - symetralna AB

C leży na symetralnej AB (bo $|CA| = |CB|$) oraz na l.
Środek AB: $S = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$. $\vec{AB} = (3, 1)$, więc symetralna s: $3(x - \frac{5}{2}) + 1(y + \frac{1}{2}) = 0$, czyli $3x + y = 7$.
Przecięcie l i s: $x + 2y = 4$ i $3x + y = 7$. Z drugiego $y = 7 - 3x$, podstaw: $x + 14 - 6x = 4 \Rightarrow -5x = -10 \Rightarrow x = 2$, $y = 1$. $C = (2, 1)$.

Krok 3: wyznaczenie M
Ma $|AM| : |MC| = 1 : 4$. M dzieli AC w stosunku $1 : 4$ od A.
$M = A + \frac{1}{5}(C - A) = (1, -1) + \frac{1}{5}(1, 2) = (\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$.

Krok 4: promień
$r = |MC| = \frac{4}{5}|AC|$. $|AC| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
$r = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, $r^2 = \frac{80}{25} = \frac{16}{5}$.

Odp: $\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$

Zadanie 10

Zad. 10. (0-5pkt) $f(x) = m^2x^2 - 2mx - m + 1$, $m \neq 0$. Wyznacz m, dla których f ma dwa różne miejsca zerowe $x_1, x_2 \in (-2, 2)$.

Metoda I - trzy warunki (delta, wartości na końcach, wierzchołek)

Dla $a = m^2 > 0$ parabola otwarta w górę.

Trzy warunki:

W1: $\Delta > 0$.

$\Delta = 4m^2 - 4m^2(-m + 1) = 4m^2 + 4m^3 - 4m^2 = 4m^3$.

$\Delta > 0 \iff m^3 > 0 \iff m > 0$.

W2: $f(-2) > 0$ i $f(2) > 0$.

$f(-2) = 4m^2 + 4m - m + 1 = 4m^2 + 3m + 1$. $\Delta_2 = 9 - 16 = -7 < 0$, a wsp. wiodący $4 > 0 \to f(-2) > 0$ dla każdego m ✓.

$f(2) = 4m^2 - 4m - m + 1 = 4m^2 - 5m + 1 = (4m - 1)(m - 1)$.

$f(2) > 0 \iff m < \frac{1}{4} \lor m > 1$.

W3: wierzchołek $x_W \in (-2, 2)$. $x_W = -\dfrac{-2m}{2m^2} = \dfrac{1}{m}$.

$-2 < \frac{1}{m} < 2$. Dla $m > 0$: $\frac{1}{m} > 0 > -2$ ✓; $\frac{1}{m} < 2 \iff m > \frac{1}{2}$.

Część wspólna (z $m > 0$):

- $m > \frac{1}{2}$
- $m < \frac{1}{4}$ lub $m > 1$

Część wspólna: $m > 1$.

Metoda II - wzory Viète'a

Dla $m > 0$ (z $\Delta > 0$): $x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{m^2} = \dfrac{2}{m}$, $x_1x_2 = \dfrac{-m+1}{m^2} = \dfrac{1-m}{m^2}$.

Warunki $-2 < x_1 < x_2 < 2$ równoważne:

- $(x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0$ i $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$ (oba pierwiastki po tej samej stronie ± 2)
- $-2 < \frac{x_1+x_2}{2} < 2$ (środek między -2 a 2).

$(x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 = \frac{1-m}{m^2} + \frac{4}{m} + 4 = \dfrac{1 - m + 4m + 4m^2}{m^2} = \dfrac{4m^2 + 3m + 1}{m^2} > 0$ ($4m^2 + 3m + 1 > 0$ zawsze) ✓.

$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = \dfrac{1-m}{m^2} - \dfrac{4}{m} + 4 = \dfrac{1 - m - 4m + 4m^2}{m^2} = \dfrac{4m^2 - 5m + 1}{m^2} = \dfrac{(4m-1)(m-1)}{m^2}$.

Warunek $> 0 \iff (4m - 1)(m - 1) > 0 \iff m < \frac{1}{4} \lor m > 1$.

Środek: $\frac{1}{m} \in (-2, 2)$. Z $m > 0$: $m > \frac{1}{2}$.

Dołączamy $\Delta > 0$: $m > 0$.

Część wspólna: $m > 1$.

Odp: $m \in (1, +\infty)$

Zadanie 11

Zad. 11. (0-6pkt) Czworokąt ABCD: wpisany w okrąg (cykliczny) i opisany na okręgu (styczny). $|AB| = 9$, $|AD| = 10$, $\angle BAD = 60°$. Oblicz $|BC|$, $|CD|$ i pole P_{ABCD}.

Krok 1: kąt ∠BCD i twierdzenie Pitota

Wpisany: $\angle BAD + \angle BCD = 180° \Rightarrow \angle BCD = 120°$.

Opisany (tw. Pitota): $|AB| + |CD| = |AD| + |BC| \Rightarrow 9 + |CD| = 10 + |BC| \Rightarrow |CD| - |BC| = 1$.

Krok 2: przekątna BD

Z $\triangle ABD$ (tw. cosinusów):

$|BD|^2 = 81 + 100 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 181 - 90 = 91$.

Krok 3: znalezienie |BC|, |CD| - METODY

Metoda I - tw. cosinusów w △BCD

Oznaczmy $|BC| = p$, $|CD| = p + 1$.

W $\triangle BCD$ z $\angle BCD = 120°$:

$|BD|^2 = p^2 + (p+1)^2 - 2p(p+1)\cos 120° = p^2 + (p+1)^2 + p(p+1)$

$= p^2 + p^2 + 2p + 1 + p^2 + p = 3p^2 + 3p + 1$.

$91 = 3p^2 + 3p + 1 \Rightarrow 3p^2 + 3p - 90 = 0 \Rightarrow p^2 + p - 30 = 0$.

$p = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 120}}{2} = \dfrac{-1 + 11}{2} = 5$.

Więc $|BC| = 5$, $|CD| = 6$.

Metoda II - tw. Ptolemeusza

Dla czworokąta cyklicznego: $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = 9(p + 1) + 10p = 19p + 9$.

Potrzeba $|AC|$ - obliczamy z $\triangle ABC$ lub $\triangle ACD$, ale w obu brakuje danych - droga dłuższa niż Metoda I.

Krok 4: pole - METODY

Metoda I - suma dwóch trójkątów

$P = P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \sin 60° + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin 120°$

$= 45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$.

Metoda II - wzór dla czworokąta cyklicznego (Brahmagupta)

$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, gdzie $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

$a = 9, b = 5, c = 6, d = 10, s = 15$.

$P = \sqrt{(15-9)(15-5)(15-6)(15-10)} = \sqrt{6 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 5} = \sqrt{2700} = 30\sqrt{3}$ ✓.

Metoda III - wzór dla czworokąta stycznego

$P = r \cdot s$, gdzie r - promień okręgu wpisanego, s - półobwód = 15.

Z Metody I/II $P = 30\sqrt{3}$, więc $r = 2\sqrt{3}$ (jako wartość dodatkowa).

Odp: $|BC| = 5$, $|CD| = 6$, $P_{ABCD} = 30\sqrt{3}$

Zadanie 12.1

Zad. 12.1. (0-3pkt) Wykaż $P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$ dla trójkąta równoram. o podstawie x z wpisanym kołem $r = 2$.

Metoda I - wzór $r = P/s$

Niech h - wysokość trójkąta z wierzchołka na podstawę, b - długość ramienia.

Z Pitagorasa: $b^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$.

Pole: $P = \frac{xh}{2}$. Półobwód: $s = \frac{x + 2b}{2}$.

Wzór na promień okręgu wpisanego: $r = \frac{P}{s} = \frac{xh/2}{(x + 2b)/2} = \frac{xh}{x + 2b} = 2$.

$xh = 2x + 4b \Rightarrow b = \frac{xh - 2x}{4} = \frac{x(h - 2)}{4}$.

Podstaw do Pitagorasa: $\frac{x^2(h - 2)^2}{16} = h^2 + \frac{x^2}{4}$.

Mnożę przez 16: $x^2(h - 2)^2 = 16h^2 + 4x^2 \Rightarrow x^2\left[(h - 2)^2 - 4\right] = 16h^2$.

$(h - 2)^2 - 4 = (h - 2 - 2)(h - 2 + 2) = h(h - 4)$.

$x^2h(h - 4) = 16h^2 \Rightarrow x^2(h - 4) = 16h \Rightarrow h(x^2 - 16) = 4x^2 \Rightarrow h = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$.

Pole: $P = \frac{xh}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 16} = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$. **CKD.**

Metoda II - styczność do ramienia

Umieszczamy trójkąt: wierzchołek główny w $(0, h)$, podstawa od $(-\frac{x}{2}, 0)$ do $(\frac{x}{2}, 0)$. Środek koła wpisanego: $(0, r) = (0, 2)$ (na osi symetrii).

Prosta zawierająca prawe ramię: od $(0, h)$ do $(\frac{x}{2}, 0)$. Postać ogólna: $\frac{X - 0}{x/2 - 0} = \frac{Y - h}{0 - h}$, czyli $-hX/(\frac{x}{2}) = Y - h$, co daje: $hX + \frac{x}{2}Y = \frac{xh}{2}$, czyli $2hX + xY - xh = 0$.

Odległość od $(0, 2)$ do tej prostej $= r = 2$:

$$\frac{|2h \cdot 0 + x \cdot 2 - xh|}{\sqrt{4h^2 + x^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|2x - xh|}{\sqrt{4h^2 + x^2}} = 2.$$

Dla $h > 2$ licznik $= x(h - 2)$. Podnosimy do kwadratu: $x^2(h - 2)^2 = 4(4h^2 + x^2)$.

$x^2(h - 2)^2 - 4x^2 = 16h^2 \Rightarrow x^2[(h - 2)^2 - 4] = 16h^2$ - jak w Metodzie I, dalej tak samo. **CKD.**

Metoda III - geometria okręgu wpisanego (połowa kąta)

Niech α - połowa kąta przy wierzchołku głównym. Wtedy: $\tan\alpha = \frac{x/2}{h}$.

W $\triangle$ stworzonym przez wierzchołek, środek okręgu i punkt styczności z ramieniem: $\sin\alpha = \frac{r}{h - r} = \frac{2}{h - 2}$.

Z $\sin\alpha = \frac{x/2}{b}$ gdzie b to ramię: $\frac{x/2}{b} = \frac{2}{h - 2}$, więc $b = \frac{x(h - 2)}{4}$. Dalej jak Metoda I. **CKD.**

Zadanie 12.2

Zad. 12.2. (0-4pkt) $P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$, $x \in (4, 10]$. Wyznacz x minimalizujące pole.

Metoda I - pochodna (iloraz)

$P'(x) = \frac{6x^2(x^2-16) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2-16)^2} = \frac{6x^4 - 96x^2 - 4x^4}{(x^2-16)^2} = \frac{2x^4 - 96x^2}{(x^2-16)^2} = \frac{2x^2(x^2-48)}{(x^2-16)^2}$.

W dziedzinie $x \in (4, 10]$: $2x^2 > 0$, $(x^2-16)^2 > 0$, więc znak P' zależy od $(x^2 - 48)$.

$x^2 - 48 = 0 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$ (dodatni). $4\sqrt{3} \approx 6{,}93 \in (4, 10]$ ✓.

Dla $x \in (4, 4\sqrt{3})$: $P' < 0$ (malejąca).

Dla $x \in (4\sqrt{3}, 10]$: $P' > 0$ (rosnąca).

Minimum w $x = 4\sqrt{3}$.

$P(4\sqrt{3}) = \frac{2(4\sqrt{3})^3}{(4\sqrt{3})^2 - 16} = \frac{2 \cdot 64 \cdot 3\sqrt{3}}{48 - 16} = \frac{384\sqrt{3}}{32} = 12\sqrt{3}$.

Metoda II - pochodna (zlogarytmowana)

$\ln P(x) = \ln 2 + 3\ln x - \ln(x^2 - 16)$.

$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{3}{x} - \frac{2x}{x^2-16} = \frac{3(x^2-16) - 2x^2}{x(x^2-16)} = \frac{x^2-48}{x(x^2-16)}$.

Znak P' taki sam jak znak $(x^2 - 48)$ na $(4, 10]$ (mianowniki dodatnie). Minimum w $x = 4\sqrt{3}$.

Metoda III - przekształcenie do funkcji łatwiejszej

Niech $u = x^2$, $u \in (16, 100]$. Wtedy $P^2(x) = \frac{4x^6}{(x^2-16)^2} = \frac{4u^3}{(u-16)^2}$.

Minimalizujemy $g(u) = \frac{u^3}{(u-16)^2}$.

$g'(u) = \frac{3u^2(u-16)^2 - u^3 \cdot 2(u-16)}{(u-16)^4} = \frac{u^2(u-16)[3(u-16) - 2u]}{(u-16)^4} = \frac{u^2(u-48)}{(u-16)^3}$.

$g'(u) = 0$ dla $u = 48$, czyli $x = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Wynik identyczny.

Odp: $x = 4\sqrt{3}$ **m,** $P_{min} = 12\sqrt{3}$ **m² ≈** $20{,}78$ **m².**

Skrót klucza odpowiedzi

Kluczowe wyniki (12 zadań otwartych)

1. $\lim = -\infty$

2. $P(A) = \frac{1}{28}$

3. $(x-y)^2(x+y) \geq 0 \rightarrow$ CKD

4. $|PQ| = \frac{a\sqrt{5}}{5} \rightarrow$ CKD

5. $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$

6. $r = -2$, $N = 1014$, $S = -1\,026\,168$

7. $x = \frac{k\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{12} + k\pi, \pm\frac{5\pi}{12} + k\pi$

8. $a = 3\sqrt{6}$, $\cos\varphi = \frac{5}{14}$

9. $\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$

10. $m \in (1, +\infty)$

11. $|BC| = 5$, $|CD| = 6$, $P = 30\sqrt{3}$

12.1. $h = \frac{4x^2}{x^2-16}$, $P = \frac{2x^3}{x^2-16} \rightarrow$ CKD

12.2. $x = 4\sqrt{3}$ m, $P_{min} = 12\sqrt{3}$ m²