CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-600, MMAP-R0-700, MMAP-R0-K00, MMAP-R0-Q00, MMAU-R0-100
Termin egzaminu:	15 maja 2024 r.
Data publikacji dokumentu:	28 czerwca 2024 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.13) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną […] do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia temperatury kawy po 15 minutach oraz poprawny wynik zaokrąglony do jedności: $59\ {}^\circ\mathrm{C}$.

1 pkt – obliczenie k^{-10}: $\frac{45}{60}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Z warunków zadania $T(10) = 65$, więc $65 = (80-20)\cdot k^{-10} + 20$ i stąd $k^{-10} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$. Zatem

$$T(15) = (80-20)\cdot k^{-15} + 20 = 60\cdot\left(k^{-10}\right)^{1{,}5} + 20 =$$

$$= 60\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{1{,}5} + 20 = 60\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 20 = \frac{45\sqrt{3}}{2} + 20 \approx 59$$

Temperatura kawy po następnych pięciu minutach była równa $59\ {}^\circ\mathrm{C}$.

Sposób II

Z warunków zadania $T(10) = 65$, więc $65 = (80-20)\cdot k^{-10} + 20$ i stąd $k^{-10} = \frac{3}{4}$.

Przyjmujemy teraz $T_p = 65, T_z = 20$ i obliczamy $T(5)$:

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1246).

$$T(5) = (65 - 20) \cdot k^{-5} + 20 = 45 \cdot (k^{-10})^{0,5} + 20 =$$

$$= 45 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} + 20 = \frac{45\sqrt{3}}{2} + 20 \approx 59$$

Temperatura kawy po następnych pięciu minutach była równa $59\ ^{\circ}\mathrm{C}$.

Zadanie 2. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.R1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia granicy oraz poprawny wynik: $(-\infty)$.

1 pkt – zapisanie wyrażenia $\frac{x^3-8}{(x-2)^2}$ w postaci $\frac{x^2+2x+4}{x-2}$ (lub w postaci $x + 4 + \frac{12}{x-2}$)

ALBO

– zapisanie równości

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3 - 8}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2}{2x - 4}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy wyrażenie $\frac{x^3-8}{(x-2)^2}$, korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów:

$$\frac{x^3 - 8}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)^2} = \frac{x^2+2x+4}{x-2}$$

dla każdego $x \neq 2$.

Ponieważ $\lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 2x + 4) = 12$ oraz $\lim\limits_{x \to 2^-} (x - 2) = 0^-$, więc

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3 - 8}{(x-2)^2} = -\infty$$

Sposób II

Zauważmy, że $\lim\limits_{x \to 2^-} (x^3 - 8) = 0$ oraz $\lim\limits_{x \to 2^-} (x - 2)^2 = 0$.

Funkcje $f(x) = x^3 - 8$ oraz $g(x) = (x-2)^2$ są różniczkowalne w zbiorze $(-\infty, 2)$.
Ponadto $g'(x) = 2(x-2) \neq 0$ dla każdego $x \in (-\infty, 2)$ oraz

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2}{2x-4} = -\infty$$

Zatem na podstawie reguły de l'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3-8}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2}{2x-4} = -\infty$$

Sposób III

Niech M będzie dowolną liczbą dodatnią. Oznaczmy $\delta = \frac{12}{7+M}$. Wtedy $\delta > 0$.
Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą spełniającą warunek $-\delta < x - 2 < 0$.
Wówczas

$$\frac{x^3-8}{(x-2)^2} = \frac{x^3-8}{x^2-4x+4} = x + 4 + \frac{12(x-2)}{(x-2)^2} = x + 4 + \frac{12}{x-2} < 6 - \frac{12}{\delta} =$$
$$= 6 - (7 + M) = -1 - M < -M$$

Zatem dla każdego $M > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego x spełniającego warunek $-\delta < x - 2 < 0$ zachodzi

$$\frac{x^3-8}{(x-2)^2} < -M$$

To oznacza, że

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3-8}{(x-2)^2} = -\infty$$

Zadanie 3. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymagania ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: XII.R2) stosuje schemat Bernoullego.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $0{,}996$.

2 pkt – zapisanie poprawnego prawdopodobieństwa uzyskania co najwyżej jednego sukcesu w dziesięciu próbach Bernoullego, np.

$$P = \binom{10}{0} \cdot (0{,}99)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0{,}01)^1 \cdot (0{,}99)^9,$$

$$P = (0{,}99)^{10} + 10 \cdot 0{,}01 \cdot (0{,}99)^9$$

1 pkt – zapisanie prawdopodobieństwa odniesienia sukcesu (p) i porażki (q) w pojedynczej próbie: $p = 0{,}01$, $q = 0{,}99$

ALBO

– zapisanie prawdopodobieństwa w postaci $q^{10} + 10p \cdot q^9$, gdzie p jest prawdopodobieństwem odniesienia sukcesu, q – porażki,

ALBO

– przedstawienie fragmentu drzewa zawierającego wszystkie istotne gałęzie odpowiadające sytuacji wylosowania dziesięciu opakowań ze śmietaną, która zawiera co najmniej 36% tłuszczu oraz odpowiadające sytuacji wylosowania dziesięciu opakowań, wśród których będzie dziewięć opakowań ze śmietaną, która zawiera co najmniej 36% tłuszczu i jedno opakowanie ze śmietaną, która zawiera mniej niż 36% tłuszczu,

ALBO

– przedstawienie fragmentu drzewa zawierającego gałąź odpowiadającą wylosowaniu dziesięciu opakowań, wśród których będzie dziewięć opakowań ze śmietaną, która zawiera co najmniej 36% tłuszczu i jedno opakowanie ze śmietaną, która zawiera mniej niż 36% tłuszczu **oraz** określenie na każdym odcinku gałęzi prawdopodobieństwa sukcesu i porażki.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze poprawne prawdopodobieństwa
$P(S_{10}^0) = \binom{10}{0} \cdot (0{,}01)^0 \cdot (0{,}99)^{10}$ oraz $P(S_{10}^1) = \binom{10}{1} \cdot (0{,}01)^1 \cdot (0{,}99)^9$, ale z dalszego rozwiązania <u>nie wynika</u>, że $P = P(S_{10}^0) + P(S_{10}^1)$, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający przyjmuje $p = 0{,}1$ oraz $q = 0{,}9$ (albo $p = 0{,}01$ i $q = 0{,}9$) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający przyjmuje $p = 0{,}99$ i $q = 0{,}01$, konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, lecz błędnie interpretuje wynik końcowy, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający nie określi sukcesu w pojedynczej próbie, ale z rozwiązania wynika, że poprawnie interpretuje warunki zadania, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Sukcesem w pojedynczej próbie Bernoullego jest wylosowanie jednego opakowania ze śmietaną, która zawiera mniej niż 36% tłuszczu. Określamy prawdopodobieństwo sukcesu (p) i porażki (q) w pojedynczej próbie Bernoullego: $p = 0{,}01$, $q = 1 - p = 0{,}99$.
Niech S_{10}^{k} oznacza zdarzenie polegające na tym, że wśród dziesięciu losowo wybranych opakowań ze śmietaną znajduje się dokładnie k opakowań ze śmietaną, która zawiera mniej niż 36% tłuszczu ($k \in \{0, 1\}$).
Obliczamy prawdopodobieństwo P zdarzenia polegającego na tym, że wśród dziesięciu opakowań ze śmietaną poddanych kontroli znajdzie się co najwyżej jedno opakowanie ze śmietaną, która zawiera mniej niż 36% tłuszczu:

$$P = P(S_{10}^{0}) + P(S_{10}^{1}) = \binom{10}{0} \cdot (0{,}01)^0 \cdot (0{,}99)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0{,}01)^1 \cdot (0{,}99)^9 =$$

$$= (0{,}99)^9 \cdot (0{,}99 + 10 \cdot 0{,}01) = (0{,}99)^9 \cdot 1{,}09 \approx 0{,}996$$

Zadanie 4. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.R2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.

Zasady oceniania
3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a = \frac{7}{2}$ oraz $b = -5$.
2 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P:

$$a = f'(2) = \frac{7}{2}.$$

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji f, np. $f'(x) = \frac{(3x^2-3)\cdot x-(x^3-3x+2)\cdot 1}{x^2}$,

$$f'(x) = 2x + 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający błędnie zastosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji lub błędnie obliczy pochodną funkcji $y = x^3 - 3x + 2$, lub $y = x$, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie, o ile nie popełni błędu w obliczaniu współczynnika a oraz b.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 3) \cdot x - (x^3 - 3x + 2) \cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy a w równaniu stycznej:

$$a = f'(2) = \frac{7}{2}$$

Obliczamy współczynnik b w równaniu stycznej:

$$f(2) = \frac{7}{2} \cdot 2 + b$$

$$2 = 7 + b$$

$$b = -5$$

Współczynniki w równaniu stycznej są równe: $a = \frac{7}{2}$ oraz $b = -5$.

Zadanie 5. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. I.R1) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{2\log_5 4+\log_4 3}{\log_5 4\cdot(1+\log_4 3)}$ lub $\log_{12} 80$, lub obydwu tych wyrażeń do takiej postaci, z której poprzez jednokrotne zastosowanie wzoru na logarytm iloczynu lub wzoru na zamianę podstawy logarytmu, lub logarytmu potęgi oraz ewentualne kilkukrotne przekształcenie wyrażenia wymiernego można otrzymać tezę

ALBO

– zapisanie jednego równania wymiernego z a, b oraz niewiadomą x, np. $bx+x=\frac{1}{a}+2$ (dla sposobu III),

ALBO

– zapisanie liczby 5 w postaci $4^{\frac{1}{a}}$ oraz liczby 4 w postaci $12^{\frac{1}{1+b}}$ (dla sposobu IV).

1 pkt – zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu lub na logarytm iloczynu, np. $\log_{12} 80=\frac{\log_4 80}{\log_4 12}$, $\log_{12} 80=\frac{\log_5 80}{\log_5 12}$, $2\cdot\log_5 4+1=\log_5(4\cdot 4\cdot 5)$, $1+\log_4 3=\log_4(4\cdot 3)$

ALBO

– zapisanie dwóch spośród liczb $3, 4, 5$ jako potęgi, której podstawą jest trzecia z nich, a wykładnik jest zależny od a lub b, np.: $5=4^{\frac{1}{a}}$ i $3=4^b$ **oraz** zapisanie równania $12^x=80$ (dla sposobu III),

ALBO

– zapisanie liczby 4 w postaci $12^{\frac{1}{1+b}}$ (dla sposobu IV).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy wyrażenie $\log_{12} 80$, stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu, a następnie wzór na logarytm iloczynu:

$$\log_{12} 80 = \frac{\log_4(16 \cdot 5)}{\log_4(4 \cdot 3)} = \frac{\log_4 16 + \log_4 5}{\log_4 4 + \log_4 3} = \frac{2 + \log_4 5}{1 + \log_4 3}$$

Korzystamy ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy

$$\log_4 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 4} = \frac{1}{\log_5 4} = \frac{1}{a}$$

Zatem

$$\log_{12} 80 = \frac{2 + \log_4 5}{1 + \log_4 3} = \frac{2 + \frac{1}{a}}{1 + b} = \frac{2a + 1}{a \cdot (1 + b)}$$

To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy wyrażenie $\frac{2a+1}{a \cdot (1+b)}$, korzystając z założenia oraz ze wzoru na logarytm sumy:

$$\frac{2a + 1}{a \cdot (1 + b)} = \frac{2 \cdot \log_5 4 + 1}{\log_5 4 \cdot (1 + \log_4 3)} = \frac{\log_5(4 \cdot 4 \cdot 5)}{\log_5 4 \cdot \log_4(4 \cdot 3)} = \frac{\log_5 80}{\log_5 4 \cdot \log_4 12}$$

Korzystamy dwukrotnie ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu i otrzymujemy dalej

$$\frac{\log_5 80}{\log_5 4 \cdot \log_4 12} = \frac{\log_4 80}{\log_4 12} = \log_{12} 80$$

Zatem $\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a \cdot (1+b)}$.

To należało wykazać.

Sposób III

Korzystamy z definicji logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy $5 = 4^{\frac{1}{a}}$ oraz $3 = 4^b$.

Oznaczmy przez x liczbę rzeczywistą taką, że $12^x = 80$. Wtedy

$$3^x \cdot 4^x = 80$$

$$(4^b)^x \cdot 4^x = 4^{\frac{1}{a}} \cdot 4^2$$

$$4^{bx+x} = 4^{\frac{1}{a}+2}$$

Stąd

$$bx + x = \frac{1}{a} + 2$$

$$x(1 + b) = \frac{2a + 1}{a}$$

$$x = \frac{2a + 1}{a \cdot (1 + b)}$$

Zatem $\log_{12} 80 = x = \dfrac{2a+1}{a\cdot(1+b)}$.

To należało wykazać.

Sposób IV

Korzystamy z definicji logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy $5 = 4^{\frac{1}{a}}$ oraz $3 = 4^b$. Stąd $12 = 4^{b+1}$, czyli $4 = 12^{\frac{1}{1+b}}$.Zatem

$$80 = 5\cdot 4^2 = 4^{\frac{1}{a}}\cdot 4^2 = 4^{\frac{1}{a}+2} = \left(12^{\frac{1}{1+b}}\right)^{\frac{1}{a}+2} = 12^{\frac{2a+1}{a\cdot(1+b)}}$$

czyli $\log_{12} 80 = \dfrac{2a+1}{a\cdot(1+b)}$.

To należało wykazać.

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XI.R1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $11\,040$.

2 pkt – zapisanie L_1 : $\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot 5!$ **oraz** zapisanie liczby zbiorów czteroelementowych złożonych z trzech cyfr nieparzystych i jednej cyfry parzystej różnej od zera: $\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{1}$

ALBO

– zapisanie L_2 : $\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{1}\cdot 4!$ **oraz** zapisanie liczby zbiorów pięcioelementowych złożonych z trzech cyfr nieparzystych i dwóch cyfr parzystych: $\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{2}$,

ALBO

– zapisanie P : $4\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot 4!$ **oraz** zapisanie liczby ciągów pięciowyrazowych w jednym z przypadków, w których pierwszy wyraz jest cyfrą nieparzystą, np. liczba ciągów postaci (n,p,n,p,n) jest równa $5\cdot 5\cdot 4\cdot 4\cdot 3$,

ALBO

– zapisanie N: $5 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4!$ **oraz** zapisanie liczby ciągów pięciowyrazowych w jednym z przypadków, w których pierwszy wyraz jest cyfrą parzystą różną od zera, np. liczba ciągów postaci (p, n, n, p, n) jest równa $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3$,
ALBO
– zapisanie Z^+: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ **oraz** zapisanie liczby ciągów pięciowyrazowych w jednym z przypadków, w których żaden wyraz nie jest równy zero, np. liczba ciągów postaci (n, n, n, p, p), gdzie $p \in \{2, 4, 6, 8\}$, jest równa $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3$,
ALBO
– zapisanie Z^-: $10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ **oraz** zapisanie liczby ciągów pięciowyrazowych w jednym z przypadków, w których jeden z wyrazów jest równy zero, np. liczba ciągów postaci $(p, n, n, n, 0)$, gdzie $p \in \{2, 4, 6, 8\}$, jest równa $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$.

1 pkt – zapisanie L_1 (lub L_2), np. $L_1 = \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot 5!$, $L_2 = \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot 4!$
ALBO
– zapisanie P (lub N), np. $P = 4 \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot 4!$, $N = 5 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4!$,
ALBO
– zapisanie Z^+ (lub Z^-), np. $Z^+ = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 3\,840$, $Z^- = 10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 7\,200$,
ALBO
– zapisanie liczby zbiorów pięcioelementowych złożonych z trzech cyfr nieparzystych i dwóch cyfr parzystych: $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2}$ **oraz** zapisanie liczby zbiorów czteroelementowych złożonych z trzech cyfr nieparzystych i jednej cyfry parzystej różnej od zera: $\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{1}$,
ALBO
– zapisanie liczby ciągów pięciowyrazowych w jednym z przypadków, w których pierwszy wyraz jest cyfrą nieparzystą (np. liczba ciągów postaci (n, p, n, p, n) jest równa $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3$) **oraz** zapisanie liczby ciągów pięciowyrazowych w jednym z przypadków, w których pierwszy wyraz jest cyfrą parzystą różną od zera (np. liczba ciągów postaci (p, n, n, p, n) jest równa $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający rozpatruje liczby inne niż pięciocyfrowe, to otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązania
Sposób I
Niech L_1 będzie liczbą wszystkich ciągów pięcioelementowych, których:

- wyrazy są cyframi, parami różnymi
- trzy wyrazy są liczbami nieparzystymi, a dwa są liczbami parzystymi.

Aby wygenerować taki ciąg należy wybrać trzy cyfry spośród pięciu nieparzystych, dwie cyfry spośród dwóch parzystych i wybrane pięć cyfr ustawić w ciąg. Zatem

$$L_1 = \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot 5!$$

Niech L_2 będzie liczbą wszystkich ciągów pięcioelementowych, których:

- wyrazy są cyframi, parami różnymi

- pierwszy wyraz jest zerem, a wśród pozostałych wyrazów są trzy cyfry nieparzyste i jedna cyfra parzysta.

Aby wygenerować taki ciąg należy wybrać trzy cyfry spośród pięciu nieparzystych oraz jedną cyfrę spośród cyfr: $2, 4, 6, 8$, i wybrane cztery cyfry ustawić w ciąg. Następnie na początku ciągu ustawić cyfrę 0. Zatem

$$L_2 = \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot 4!$$

Wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, o różnych cyfrach, w których dokładnie trzy cyfry są nieparzyste, a pozostałe są parzyste, jest

$$L_1 - L_2 = \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot 5! - \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot 4! = 10 \cdot 10 \cdot 120 - 10 \cdot 4 \cdot 24 = 11\,040$$

Sposób II

Niech P będzie liczbą wszystkich ciągów pięcioelementowych, których:

- wyrazy są cyframi, parami różnymi
- pierwszy wyraz jest cyfrą parzystą różną od zera, a wśród pozostałych wyrazów są trzy cyfry nieparzyste i jedna cyfra parzysta.

Pierwszy wyraz takiego ciągu można ustalić na cztery sposoby (wybieramy jedną cyfrę parzystą spośród $2, 4, 6, 8$). Pozostałe wyrazy można ustalić poprzez wybór jednej cyfry parzystej spośród czterech, trzech cyfr nieparzystych spośród pięciu, a następnie ustawienie wybranych czterech cyfr na ostatnich czterech pozycjach w ciągu. Zatem

$$P = 4 \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot 4!$$

Niech N będzie liczbą wszystkich ciągów pięcioelementowych, których:

- wyrazy są cyframi, parami różnymi
- pierwszy wyraz jest cyfrą nieparzystą, a wśród pozostałych wyrazów są dwie cyfry nieparzyste i dwie cyfry parzyste.

Pierwszy wyraz takiego ciągu można ustalić na pięć sposobów (wybieramy jedną cyfrę nieparzystą spośród pięciu). Pozostałe wyrazy można ustalić poprzez wybór dwóch cyfr parzystych spośród pięciu, dwóch cyfr nieparzystych spośród czterech, a następnie ustawienie wybranych czterech cyfr na ostatnich czterech pozycjach w ciągu. Zatem

$$N = 5 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4!$$

Wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, o różnych cyfrach, w których dokładnie trzy cyfry są nieparzyste, a pozostałe są parzyste, jest

$$P + N = 4 \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot 4! + 5 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4! = 4 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 24 + 5 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 24 = 11\,040$$

Sposób III

Rozważmy dwa przypadki:

1. Gdy w zapisie liczby występuje cyfra zero. Cyfrę tę możemy wstawić na jedno z 4 miejsc. Miejsce dla drugiej, różnej od zera cyfry parzystej możemy wybrać na 4 sposoby, a na wybranym miejscu możemy wstawić jedną z pozostałych 4 cyfr parzystych. Na pierwsze z pozostałych trzech wolnych miejsc możemy wstawić jedną z 5 cyfr nieparzystych, na drugie z pozostałych dwóch wolnych miejsc możemy wstawić jedną z pozostałych 4 cyfr nieparzystych, a na ostatnim wolnym miejscu – jedną z pozostałych 3 cyfr nieparzystych. Zatem liczba Z^+ wszystkich rozpatrywanych liczb w tym przypadku jest równa

$$Z^+ = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 3\,840$$

2. Gdy w zapisie liczby nie występuje cyfra zero. Dwa miejsca dla cyfr parzystych możemy wybrać na $\binom{5}{2} = 10$ sposobów. Na pierwsze z wybranych dwóch miejsc możemy wstawić jedną z 4 cyfr parzystych, a na drugie – jedną z 3. Na pierwsze z pozostałych trzech wolnych miejsc możemy wstawić jedną z 5 cyfr nieparzystych, na drugie z pozostałych dwóch wolnych miejsc możemy wstawić jedną z pozostałych 4 cyfr nieparzystych, a na ostatnim wolnym miejscu – jedną z pozostałych 3 cyfr nieparzystych. Zatem liczba Z^- wszystkich rozpatrywanych liczb w tym przypadku jest równa

$$Z^- = 10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 7\,200$$

Stąd wszystkich rozważanych liczb jest $Z^+ + Z^- = 3\,840 + 7\,200 = 11\,040$.

Zadanie 7. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.6) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań […].

Zasady oceniania (dla *sposobu I* i *II*)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x = 5$, $y = 20$, $z = 80$.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą r, np. $(35 - r)^2 = (35 - 2r) \cdot (35 + 3r)$

ALBO

– poprawne wyznaczenie r w zależności od x z równania $(x + r)^2 = x(x + 5r)$: $r = 3x$.

2 pkt – zapisanie x, y oraz z w zależności od r: $x = 35 - 2r$, $y = 35 - r$, $z = 35 + 3r$

ALBO

– zapisanie układu równań

$x + x + r + x + 5r = 105$ i $(x + r)^2 = x(x + 5r)$ lub

$x + x + r + x + 5r = 105$ i $x + x \cdot \frac{x + 5r}{x + r} + x \cdot \left(\frac{x + 5r}{x + r}\right)^2 = 105$

1 pkt – zapisanie równania $x + x + r + x + 5r = 105$

ALBO

– zapisanie równania $(x + r)^2 = x(x + 5r)$,

ALBO

– zapisanie równania $x + x \cdot \frac{x + 5r}{x + r} + x \cdot \left(\frac{x + 5r}{x + r}\right)^2 = 105$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla *sposobu III*)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x = 5$, $y = 20$, $z = 80$.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą y, np. $y^2 = (2y - 35) \cdot (140 - 3y)$.

2 pkt – zapisanie x oraz z w zależności od y: $x = 2y - 35$, $z = 140 - 3y$.

1 pkt – zapisanie równania $4 \cdot (y - x) = z - y$ lub $y^2 = xz$, lub $5(y - x) = z - x$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla *sposobu IV*)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x = 5$, $y = 20$, $z = 80$.

3 pkt – zapisanie równania $x + x \cdot q + x \cdot q^2 = 105$ **oraz** obliczenie q: $q = 4$

ALBO

– zapisanie równania $x + x \cdot q + x \cdot q^2 = 105$ **oraz** zapisanie, że ciąg (x, y, z) jest rosnący, więc $x \neq 0$, **oraz** zapisanie równania $q^2 - 5q + 4 = 0$.

2 pkt – zapisanie równania $4 \cdot (x \cdot q - x) = x \cdot q^2 - x \cdot q$ **oraz** zapisanie, że ciąg (x, y, z) jest rosnący, więc $x \neq 0$ i $q \neq 1$, **oraz** obliczenie q: $q = 4$

ALBO
– zapisanie równań $4 \cdot (x \cdot q - x) = x \cdot q^2 - x \cdot q$ **oraz** $x + x \cdot q + x \cdot q^2 = 105$.

1 pkt – zapisanie równania $4 \cdot (x \cdot q - x) = x \cdot q^2 - x \cdot q$ lub $x + x \cdot q + x \cdot q^2 = 105$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony otrzymanego równania przez wyrażenie zawierające niewiadomą i nie umieszcza zapisu, że to wyrażenie jest różne od zera, oraz konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający popełni błąd, który nie jest rachunkowy, np. $\frac{a_1 + a_1 + 5r}{2} \cdot 6 = 105$, $y - x = 4 \cdot (z - y)$ i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za spełnienie kryterium z kategorii za 1 pkt oraz za obliczenie x, y oraz z).

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech r będzie różnicą ciągu arytmetycznego (a_n). Wtedy $y = x + r$ oraz $z = x + 5r$.
Ponieważ $x + y + z = 105$, więc

$$x + (x + r) + (x + 5r) = 105$$

$$x + 2r = 35$$

$$x = 35 - 2r$$

Zatem $y = 35 - 2r + r = 35 - r$ oraz $z = 35 - 2r + 5r = 35 + 3r$.
Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$y^2 = x \cdot z$$

$$(35 - r)^2 = (35 - 2r) \cdot (35 + 3r)$$

$$35^2 - 70r + r^2 = 35^2 + 35r - 6r^2$$

$$7r^2 - 105r = 0$$

$$r = 0 \ \lor \ r = 15$$

Dla $r = 0$ otrzymujemy $x = y = z$, więc warunki zadania nie są spełnione.
Dla $r = 15$ otrzymujemy $x = 5, y = 20, z = 80$. Ciąg $(5, 20, 80)$ jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105. Ponadto wyrazy tego ciągu są – odpowiednio – pierwszym, drugim i szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 5 + 15n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem ostatecznie $x = 5, y = 20, z = 80$.

Sposób II

Niech r będzie różnicą ciągu arytmetycznego (a_n). Wtedy $y = x + r$ oraz $z = x + 5r$.
Ponieważ $x + y + z = 105$, więc

$$x + (x + r) + (x + 5r) = 105$$

Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$y^2 = x \cdot z$$

Ponieważ $y = x + r$ oraz $z = x + 5r$, więc

$$(x + r)^2 = x \cdot (x + 5r)$$

Zatem otrzymujemy układ dwóch równań z niewiadomymi x oraz r:

$$\begin{cases} x + x + r + x + 5r = 105 \\ (x + r)^2 = x(x + 5r) \end{cases}$$

Ze związku $(x + r)^2 = x \cdot (x + 5r)$ otrzymujemy kolejno:

$$x^2 + 2xr + r^2 = x^2 + 5xr$$

$$r^2 - 3rx = 0$$

$$r = 0 \ \lor \ r = 3x$$

Dla $r = 0$ otrzymujemy $x = y = z$, więc warunki zadania nie są spełnione.
Dla $r = 3x$ otrzymujemy

$$\begin{cases} 3x + 6r = 105 \\ r = 3x \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 5 \\ r = 15 \end{cases}$

Stąd $y = x + r = 5 + 15 = 20$ oraz $z = x + 5r = 5 + 75 = 80$.
Ciąg $(5, 20, 80)$ jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105.
Ponadto wyrazy tego ciągu są – odpowiednio – pierwszym, drugim i szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 5 + 15n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem ostatecznie $x = 5$, $y = 20$, $z = 80$.

Sposób III

Z warunków zadania oraz z własności ciągów geometrycznego i arytmetycznego otrzymujemy zależności między x, y oraz z:

$$x + y + z = 105$$

$$y^2 = xz$$

$$4 \cdot (y - x) = z - y$$

Rozwiązujemy układ tych trzech równań:

$$\begin{cases} z = 105 - x - y \\ y^2 = x \cdot (105 - x - y) \\ 4 \cdot (y - x) = 105 - x - y - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 105 - x - y \\ y^2 = x \cdot (105 - x - y) \\ x = 2y - 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 140 - 3y \\ y^2 = (2y - 35) \cdot (140 - 3y) \\ x = 2y - 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 140 - 3y \\ 7y^2 - 385y + 4900 = 0 \\ x = 2y - 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 80 \\ y = 20 \\ x = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} z = 35 \\ y = 35 \\ x = 35 \end{cases}$$

Dla $x = y = z = 35$ warunki zadania nie są spełnione.
Ciąg $(5, 20, 80)$ jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105. Ponadto wyrazy tego ciągu są – odpowiednio – pierwszym, drugim i szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 5 + 15n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem $x = 5$, $y = 20$, $z = 80$.

Sposób IV

Niech q będzie ilorazem ciągu geometrycznego (x, y, z). Wtedy $y = x \cdot q$ oraz $z = x \cdot q^2$. Z warunków zadania oraz własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$4 \cdot (y - x) = z - y$$

$$4 \cdot (x \cdot q - x) = x \cdot q^2 - x \cdot q$$

Ponieważ ciąg (x, y, z) jest rosnący, więc $x \neq 0$ i $q \neq 1$. Zatem

$$4 \cdot (x \cdot q - x) = x \cdot q^2 - x \cdot q$$

$$4 \cdot x \cdot (q - 1) = x \cdot q \cdot (q - 1)$$

$$4 = q$$

Z warunków zadania $x + y + z = 105$, więc $x + x \cdot q + x \cdot q^2 = 105$ i dalej $x + x \cdot 4 + x \cdot 4^2 = 105$. Stąd otrzymujemy $x = 5$. Wówczas $y = 5 \cdot 4 = 20$ oraz $z = 5 \cdot 4^2 = 80$.
Ciąg $(5, 20, 80)$ jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105. Ponadto wyrazy tego ciągu są – odpowiednio – pierwszym, drugim i szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 5 + 15n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem $x = 5$, $y = 20$, $z = 80$.

Zadanie 8. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.R3) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania (dla *sposobów I–V*)

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

3 pkt – zapisanie związków $\frac{|AD|}{x} = \frac{c}{a}$ oraz $\frac{x}{a} = \frac{a}{b}$ (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie związku $\frac{b}{a} = \frac{|EC|}{b}$ (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie związków $|AF| = a = r$ i $|AF| \cdot c = |AG|^2$ **oraz** zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do trójkąta ACG (dla sposobu III),

ALBO

– zapisanie, że w czworokącie wypukłym wpisanym w okrąg iloczyn długości przekątnych czworokąta jest sumą iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta **oraz** zapisanie związku $|CH| = a$ (dla sposobu IV),

ALBO

– zapisanie związku $b^2 - \left(a + \frac{c-a}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2$ (dla sposobu V).

2 pkt – zapisanie związku $\frac{|AD|}{x} = \frac{c}{a}$ (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie związku $\frac{x}{a} = \frac{a}{b}$ (dla sposobu I),

ALBO

– zapisanie, że trójkąty EAC i ABC są podobne (dla sposobu II),

ALBO

– zapisanie związków $|AF| = a = r$ oraz $|AF| \cdot c = |AG|^2$, (dla sposobu III),

ALBO

– zapisanie, że w czworokącie wypukłym wpisanym w okrąg iloczyn długości przekątnych czworokąta jest sumą iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta (dla sposobu IV),

ALBO

– zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów AKC i BKC oraz zapisanie równości

$$b^2 = \left(a + \frac{c-a}{2}\right)^2 + h^2 \quad \text{oraz} \quad a^2 = \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + h^2$$

(dla sposobu V).

1 pkt – zapisanie, że trójkąty CAB i CBD są podobne (dla sposobu I)

ALBO

– zdefiniowanie na prostej CB punktu E, takiego że $|BE| = |AB| = c$ oraz B należy do odcinka CE (dla sposobu II),
ALBO
– zapisanie, że trójkąt CFA jest równoramienny (dla sposobu III),
ALBO
– zapisanie związku $|AF| \cdot c = |AG|^2$ (dla sposobu III),
ALBO
– zdefiniowanie punktu H jako takiego, że czworokąt $ABCH$ jest trapezem równoramiennym o ramionach BC i AH **oraz** zapisanie, że na tym trapezie można opisać okrąg (dla sposobu IV),
ALBO
– zdefiniowanie punktu L, który jest obrazem punktu B w symetrii względem prostej zawierającej wysokość CK **oraz** zapisanie, że trójkąt ALC jest równoramienny (dla sposobu V).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla *sposobów VI–X*)

4 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

3 pkt – wyznaczenie cosinusa kąta BAC w zależności od długości boków trójkąta ABC **oraz** zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta ABC i zapisanie związku

$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \frac{b}{2 \cdot a}$ lub

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot [2 \cdot \left(\frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 - 1]$

ALBO

– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta ABC **oraz** zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równań

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot (2\cos^2\alpha - 1)$ **oraz**

$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos\alpha$ **oraz**

$b = 2 \cdot a \cdot \cos\alpha$,

ALBO

– przekształcenie stron równania $2 \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 - 1 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ do postaci ilorazu wielomianów, z których każdy jest rozłożony do postaci iloczynowej, np.

$$\frac{(b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)}{2b^2c^2} = \frac{(a-c-b)(a-c+b)}{2ac}$$

ALBO

– zastosowanie wzoru na sumę sinusów i zapisanie wyrażenia $a^2 + c \cdot a$ w postaci $4R^2 \cdot \sin\alpha \cdot 2\sin(2\alpha) \cdot \cos\alpha$,
ALBO
– wyznaczenie długości boku BC w zależności od długości odcinków AK (lub BK) oraz AB (w przypadku, gdy K leży na odcinku AB), np. $a^2 = (2z - c)^2$ (dla sposobu X).

2 pkt – zapisanie związku między cosinusem kąta BAC a długościami boków AC i BC trójkąta ABC, np. $\cos\alpha = \frac{b}{2\cdot a}$

ALBO

– spełnienie kryteriów 1) i 3) zasad oceniania za 1 pkt,

ALBO

– spełnienie kryteriów 2) i 3) zasad oceniania za 1 pkt,

ALBO

– wyeliminowanie $\cos\alpha$ z układu równań podanego w kryterium 3) zasad oceniania za 1 pkt, np.

$$2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 - 1 = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

ALBO

– zapisanie wyrażenia $a^2 + c\cdot a$ w zależności od R, $\sin\alpha$ oraz $\sin(3\alpha)$, np. $4R^2\cdot\sin^2\alpha + 4R^2\cdot\sin(3\alpha)\cdot\sin\alpha$,

ALBO

– spełnienie kryterium 5) zasad oceniania za 1 pkt **oraz** zastosowanie twierdzenia Pitagorasa w trójkątach AKC i KBC **oraz** zapisanie związków $b^2 = |AK|^2 + |KC|^2$ oraz $a^2 = |KB|^2 + |KC|^2$ (dla sposobu X).

1 pkt – spełnienie jednego z poniższych kryteriów 1)-5):

1) zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta ABC i zapisanie związku
$$\frac{b}{\sin(2\alpha)} = \frac{a}{\sin\alpha}$$
2) zastosowanie wzoru na pole trójkąta i zapisanie związku
$$\frac{1}{2}\cdot c\cdot a\cdot\sin(2\alpha) = \frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot\sin\alpha,$$
3) zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta ABC **oraz** zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równań

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot(2\cos^2\alpha - 1)$ **oraz**

$a^2 = c^2 + b^2 - 2\cdot c\cdot b\cdot\cos\alpha$,

4) zastosowanie twierdzenia sinusów i zapisanie $a^2 + c\cdot a$ jako $(2R\cdot\sin\alpha)^2 + 2R\cdot\sin|\sphericalangle BCA|\cdot 2R\cdot\sin\alpha$,

5) poprowadzenie wysokości CK w trójkącie ABC **oraz** zastosowanie definicji tangensa kąta ostrego w trójkątach AKC i KBC **oraz** zastosowanie wzoru na tangens podwojonego kąta i uzyskanie zależności między długościami odcinków AK, BK i CK, np. $\frac{h}{c-z} = \frac{2\cdot\frac{h}{z}}{1-\left(\frac{h}{z}\right)^2}$ (dla sposobu X).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

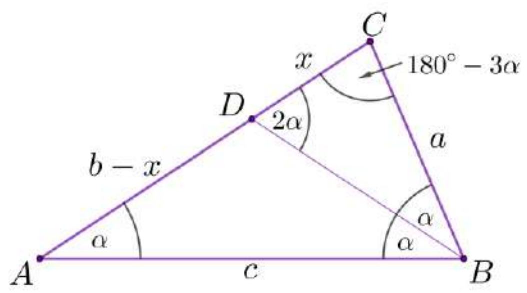
Uwaga:

Jeżeli w rozwiązaniu zdający wykorzystuje wysokość CK trójkąta ABC oraz przeprowadzi rozumowanie tylko w jednym przypadku (np. gdy K leży między A i B) i nie stwierdzi, że w drugim przypadku (gdy B leży między K i A) rozumowanie przebiega analogicznie, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**; jeżeli natomiast takie stwierdzenie zapisze, to może otrzymać **4 punkty**.

Przykładowe pełne rozwiązania

We wszystkich poniższych rozwiązaniach przyjmujemy następujące oznaczenia:
$a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, $\alpha = |\sphericalangle CAB|$.

Sposób I (poprzez dwusieczną kąta ABC)
Ponieważ $\alpha = |\sphericalangle CAB|$, więc $|\sphericalangle ABC| = 2\alpha$.
Niech D będzie punktem leżącym na przecięciu prostej AC z dwusieczną kąta ABC.
Oznaczmy przez x długość odcinka DC. Wtedy $|\sphericalangle CBD| = \alpha$, $|\sphericalangle DCB| = 180° - 3\alpha$ oraz $|\sphericalangle BDC| = 2\alpha$ (zobacz rysunek).



Zatem trójkąty CAB i CBD są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów).

Z podobieństwa tych trójkątów otrzymujemy $\frac{x}{a} = \frac{a}{b}$, więc $x = \frac{a^2}{b}$.
Z twierdzenia o dwusiecznej zastosowanego w trójkącie ABC otrzymujemy

$$\frac{|AD|}{x} = \frac{c}{a}$$

i stąd wyznaczamy długość x odcinka DC:

$$\frac{b - x}{x} = \frac{c}{a}$$

$$b = x \cdot \frac{c}{a} + x$$

$$x = \frac{b \cdot a}{c + a}$$

Stąd i ze związku $x = \frac{a^2}{b}$ otrzymujemy:

$$\frac{a^2}{b} = \frac{b \cdot a}{c + a}$$

$$b^2 = a^2 + c \cdot a$$

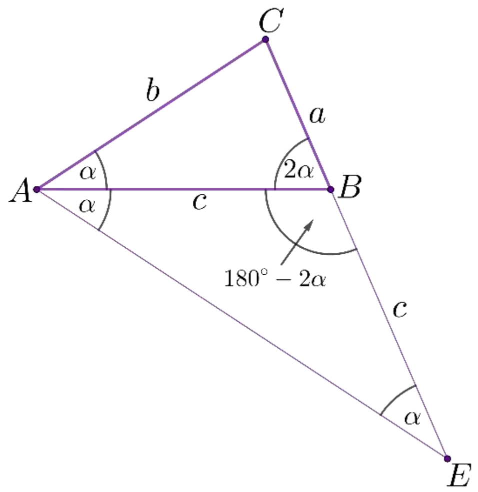
$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$$

To należało wykazać.

Sposób II (poprzez trójkąty podobne)

Ponieważ $\alpha = |\measuredangle CAB|$, więc $|\measuredangle ABC| = 2\alpha$.

Niech E będzie punktem leżącym na prostej CB, takim że $|BE| = |AB| = c$ oraz B należy do odcinka CE. Wtedy trójkąt ABE jest równoramienny i $|\measuredangle ABE| = 180° - 2\alpha$ oraz $|\measuredangle BEA| = |\measuredangle BAE| = \alpha$ (zobacz rysunek).



Stąd miary kątów trójkąta EAC są równe

$$|\measuredangle EAC| = 2\alpha,\ |\measuredangle CEA| = \alpha \text{ oraz } |\measuredangle ACE| = 180° - 3\alpha.$$

Zatem trójkąty EAC i ABC są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów).

Z podobieństwa tych trójkątów otrzymujemy $\frac{b}{a} = \frac{|EC|}{b}$, więc

$$b^2 = a \cdot |CE|$$

$$b^2 = a \cdot (|CB| + |BE|)$$

$$b^2 = a \cdot (a + c)$$

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$$

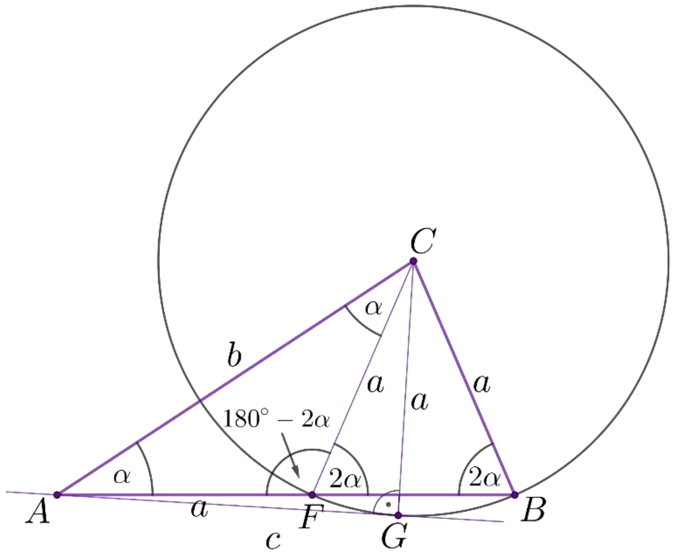
To należało wykazać.

Sposób III (poprzez sieczną)

Ponieważ $\alpha = |\measuredangle CAB|$, więc $|\measuredangle ABC| = 2\alpha$.

Niech F będzie punktem przecięcia okręgu o środku w punkcie C i promieniu $a = |BC|$ z prostą AB.

Przez punkt A prowadzimy prostą styczną do tego okręgu i oznaczamy punkt styczności przez G (zobacz rysunek).



Z twierdzenia o odcinkach siecznej i stycznej otrzymujemy

$$|AF|\cdot|AB| = |AG|^2$$

Ponieważ $|BC| = |FC| = a$ i $|\measuredangle ABC| = 2\alpha$ oraz $|\measuredangle BAC| = \alpha$, więc $|\measuredangle AFC| = 180° - 2\alpha$ i $|\measuredangle FCA| = |\measuredangle BAC| = \alpha$. Zatem $|AF| = |FC| = |BC| = a$.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AGC otrzymujemy

$$|AG|^2 = |AC|^2 - |CG|^2$$

$$|AG|^2 = b^2 - a^2$$

Zatem równość $|AF|\cdot|AB| = |AG|^2$ przyjmuje postać

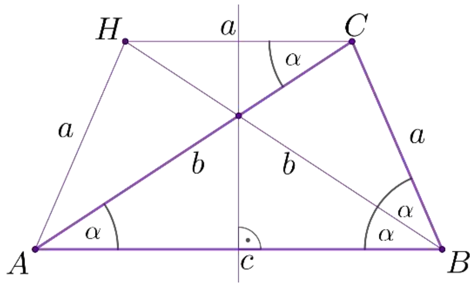
$$a\cdot c = b^2 - a^2$$

$$b^2 = a^2 + c\cdot a$$

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|\cdot|BC|$$

To należało wykazać.

Sposób IV (poprzez trapez wpisany w okrąg)
Ponieważ $\alpha = |\measuredangle CAB|$, więc $|\measuredangle ABC| = 2\alpha$.
Niech H będzie obrazem punktu C w symetrii osiowej względem symetralnej boku AB.
Wtedy czworokąt $ABCH$ jest trapezem równoramiennym o ramionach BC i AH (zobacz rysunek).



Suma miar przeciwległych kątów trapezu równoramiennego jest równa $180°$, więc na trapezie $ABCH$ można opisać okrąg. Ponieważ w czworokącie wypukłym wpisanym w okrąg iloczyn długości przekątnych czworokąta jest sumą iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta (twierdzenie Ptolemeusza), więc

$$|AC| \cdot |BH| = |BC| \cdot |AH| + |AB| \cdot |CH|$$

Ponieważ $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACH|$ i trapez $ABCH$ jest równoramienny, więc $|CH| = |AH| = |BC| = a$ oraz $|BH| = |AC| = b$.
Stąd i z równości $|AC| \cdot |BH| = |BC| \cdot |AH| + |AB| \cdot |CH|$ otrzymujemy

$$b \cdot b = a \cdot a + c \cdot a$$

$$b^2 = a^2 + c \cdot a$$

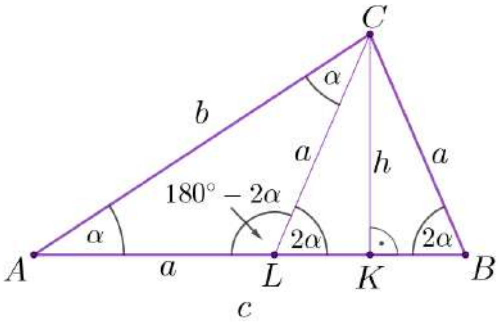
$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$$

To należało wykazać.

Sposób V (poprzez trójkąty równoramienne i twierdzenie Pitagorasa)
Niech K będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka C. Oznaczmy długość tej wysokości przez h. Punkt K nie może pokrywać się z wierzchołkiem B, gdyż wtedy trójkąt ABC byłby równoramienny, co jest sprzeczne z założeniem.
Niech L będzie obrazem punktu B w symetrii środkowej względem punktu K.
Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1. (gdy punkt K leży na boku AB).

Wtedy trójkąt LBC jest równoramienny i $|\sphericalangle BLC| = 2\alpha$. Zatem $|LC| = |BC| = a$ oraz $|\sphericalangle ALC| = 180° - 2\alpha$. Stąd wynika, że $|\sphericalangle LCA| = \alpha$, co oznacza, że trójkąt ALC jest równoramienny. Zatem $|AL| = |LC| = a$ (zobacz rysunek).



Wobec tego $|LB| = c - a$ oraz $|LK| = |KB| = \frac{c-a}{2}$.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów AKC i BKC otrzymujemy:

$$|AC|^2 = |AK|^2 + |KC|^2 \text{ oraz } |BC|^2 = |KB|^2 + |KC|^2$$

$$b^2 = \left(a + \frac{c-a}{2}\right)^2 + h^2 \text{ oraz } a^2 = \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = b^2 - \left(a + \frac{c-a}{2}\right)^2 \text{ oraz } h^2 = a^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2$$

Stąd

$$b^2 - \left(a + \frac{c-a}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2$$

$$b^2 - \frac{a^2+2ac+c^2}{4} = a^2 - \frac{a^2-2ac+c^2}{4}$$

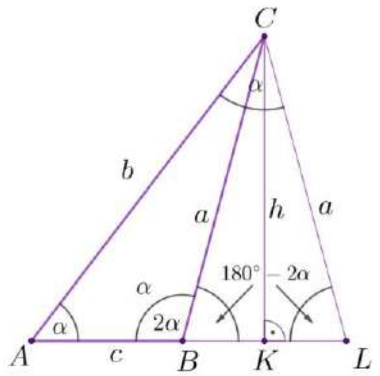
$$4b^2 - a^2 - 2ac - c^2 = 4a^2 - a^2 + 2ac - c^2$$

$$4b^2 = 4a^2 + 4ac$$

$$b^2 = a^2 + ac$$

To kończy dowód w tym przypadku.

Przypadek 2. (gdy punkt K leży na przedłużeniu boku AB).
Wtedy punkt B leży między punktami A i K, trójkąt LBC jest równoramienny oraz $|\sphericalangle LBC| = 180° - 2\alpha$. Zatem $|LC| = |BC| = a$ oraz $|\sphericalangle BLC| = |\sphericalangle LBC| = 180° - 2\alpha$. Stąd wynika, że $|\sphericalangle LCA| = \alpha$, co oznacza, że trójkąt ALC jest równoramienny, więc $|AL| = |LC| = a$ (zobacz rysunek).
Wobec tego $|LB| = a - c$ oraz $|LK| = |KB| = \frac{a-c}{2}$.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów AKC i BKC otrzymujemy:

$$|AC|^2 = |AK|^2 + |KC|^2 \text{ oraz } |BC|^2 = |KB|^2 + |KC|^2$$

$$b^2 = \left(c + \frac{a-c}{2}\right)^2 + h^2 \text{ oraz } a^2 = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = b^2 - \left(c + \frac{a-c}{2}\right)^2 \text{ oraz } h^2 = a^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

Stąd

$$b^2 - \left(c + \frac{a-c}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

$$b^2 - \frac{a^2+2ac+c^2}{4} = a^2 - \frac{a^2-2ac+c^2}{4}$$

$$4b^2 - a^2 - 2ac - c^2 = 4a^2 - a^2 + 2ac - c^2$$

$$4b^2 = 4a^2 + 4ac$$

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$$

To należało wykazać.

Sposób VI (z wyznaczeniem $\cos\alpha$ poprzez twierdzenie sinusów)

Ponieważ $\alpha = |\sphericalangle CAB|$, więc $|\sphericalangle ABC| = 2\alpha$.

Stosujemy twierdzenie sinusów do trójkąta ABC oraz wzór na sinus podwojonego kąta i otrzymujemy:

$$\frac{b}{\sin(2\alpha)} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\frac{b}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{2 \cdot a}$$

Stąd i z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta ABC otrzymujemy:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos\alpha$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \frac{b}{2 \cdot a}$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - c \cdot \frac{b^2}{a}$$

$$a^2 - c^2 = b^2 - c \cdot \frac{b^2}{a}$$

$$(a-c) \cdot (a+c) = b^2 \cdot \left(1 - \frac{c}{a}\right)$$

$$(a-c) \cdot (a+c) \cdot a = b^2 \cdot (a-c)$$

Ponieważ trójkąt ABC nie jest równoramienny, więc $a - c \neq 0$. Zatem

$$(a+c) \cdot a = b^2$$

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$$

To należało wykazać.

Sposób VII (z wyznaczeniem $\cos\alpha$ poprzez porównanie pól)

Ponieważ $\alpha = |\sphericalangle CAB|$, więc $|\sphericalangle ABC| = 2\alpha$.

Stosujemy wzór na pole trójkąta w zależności od długości dwóch boków i sinusa kąta między tymi bokami, otrzymując

$$\frac{1}{2}\cdot c\cdot a\cdot \sin(2\alpha) = \frac{1}{2}\cdot c\cdot b\cdot \sin\alpha$$

Stąd, po zastosowaniu wzoru na sinus podwojonego kąta, otrzymujemy

$$2\cdot a\cdot \cos\alpha = b$$

Dwukrotnie stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie cosinusów:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos(2\alpha)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos\alpha$$

Stąd, po zastosowaniu wzoru na cosinus podwojonego kąta oraz skorzystaniu z zależności $2\cdot a\cdot \cos\alpha = b$, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot (2\cos^2\alpha - 1) \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot 2\cdot a\cdot \cos\alpha\cdot c\cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Po odjęciu od stron pierwszego równania stron drugiego równania otrzymujemy kolejno:

$$b^2 - a^2 = a^2 - b^2 + 2\cdot a\cdot c$$

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|\cdot|BC|$$

To należało wykazać.

Sposób VIII (poprzez dwukrotne zastosowanie twierdzenia cosinusów)

Ponieważ $\alpha = |\sphericalangle CAB|$, więc $|\sphericalangle ABC| = 2\alpha$.

Dwukrotnie stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie cosinusów:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos(2\alpha)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos\alpha$$

Z uzyskanych równań eliminujemy (po zastosowaniu wzoru na cosinus podwojonego kąta) $\cos\alpha$:

$$\cos(2\alpha) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \wedge \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \wedge \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 - 1 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Przekształcamy otrzymane równanie i otrzymujemy kolejno:

$$\frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{2b^2c^2} - \frac{4b^2c^2}{2b^2c^2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - \frac{2ac}{2ac}$$

$$\frac{(b^2+c^2-a^2-2bc)(b^2+c^2-a^2+2bc)}{2b^2c^2}=\frac{(a-c)^2-b^2}{2ac}$$

$$\frac{((b-c)^2-a^2)((b+c)^2-a^2)}{2b^2c^2}=\frac{(a-c-b)(a-c+b)}{2ac}$$

$$\frac{(b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)}{2b^2c^2}=\frac{(a-c-b)(a-c+b)}{2ac}$$

Korzystamy z tego, że w trójkącie $b+c\neq a$ oraz $a+b\neq c$, i otrzymujemy dalej

$$\frac{(b-c-a)(b+c+a)}{2b^2c^2}=-\frac{1}{2ac}$$

$$2a[b^2-(a+c)^2]+2b^2c=0$$

$$ab^2-a(a+c)^2+b^2c=0$$

$$b^2(a+c)-a(a+c)^2=0 \qquad /:(a+c)$$

$$b^2=a(a+c)$$

$$|AC|^2=|BC|^2+|AB|\cdot|BC|$$

To należało wykazać.

Sposób IX (poprzez twierdzenie sinusów i przekształcenia trygonometryczne)

Ponieważ $\alpha=|\measuredangle CAB|$, więc $|\measuredangle ABC|=2\alpha$. Niech R będzie promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Trzykrotnie stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$a^2+c\cdot a=(2R\cdot\sin\alpha)^2+2R\cdot\sin|\measuredangle BCA|\cdot 2R\cdot\sin\alpha=$$
$$=(2R\cdot\sin\alpha)^2+2R\cdot\sin(180^\circ-3\alpha)\cdot 2R\cdot\sin\alpha$$

Stosujemy wzory redukcyjne oraz wzór na sumę sinusów, otrzymując

$$a^2+c\cdot a=4R^2\cdot\sin^2\alpha+4R^2\cdot\sin(3\alpha)\cdot\sin\alpha=$$
$$=4R^2\cdot\sin\alpha\cdot[\sin\alpha+\sin(3\alpha)]=4R^2\cdot\sin\alpha\cdot 2\sin(2\alpha)\cdot\cos\alpha$$

Stąd, po skorzystaniu ze wzoru na sinus podwojonego kąta oraz z twierdzenia sinusów, dostajemy

$$|BC|^2+|AB|\cdot|BC|=4R^2\cdot\sin^2(2\alpha)=[2R\cdot\sin(2\alpha)]^2=|AC|^2$$

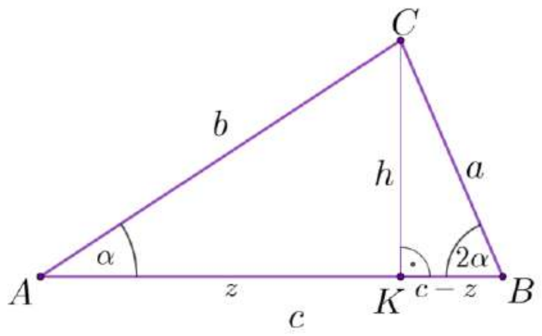
To należało wykazać.

Sposób X (poprzez tangens podwojonego kąta i twierdzenie Pitagorasa)

Niech K będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC opuszczonej w wierzchołka C. Oznaczmy długość tej wysokości przez h. Punkt K nie może pokrywać się z wierzchołkiem B, gdyż wtedy trójkąt ABC byłby równoramienny, co jest sprzeczne z założeniem.

Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1. (gdy punkt K leży na boku AB).
Oznaczmy $z = |AK|$. Wtedy $|KB| = c - z$ (zobacz rysunek).



Trójkąty AKC i KBC są prostokątne, więc $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{z}$ oraz $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{h}{c-z}$.
Stąd i ze wzoru na tangens podwojonego kąta otrzymujemy:

$$\frac{h}{c-z} = \frac{2 \cdot \frac{h}{z}}{1 - \left(\frac{h}{z}\right)^2}$$

$$\frac{1}{c-z} = \frac{\frac{2}{z}}{1 - \left(\frac{h}{z}\right)^2}$$

$$\frac{2}{z} \cdot (c-z) = 1 - \frac{h^2}{z^2}$$

$$2z(c-z) = z^2 - h^2$$

$$h^2 = 3z^2 - 2cz$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów AKC i KBC otrzymujemy:

$$|AC|^2 = |AK|^2 + |KC|^2 \text{ oraz } |BC|^2 = |KB|^2 + |KC|^2$$

$$b^2 = z^2 + h^2 \text{ oraz } a^2 = (c-z)^2 + h^2$$

Ze związków $h^2 = 3z^2 - 2cz$ i $a^2 = (c-z)^2 + h^2$ otrzymujemy

$$a^2 = c^2 - 2cz + z^2 + 3z^2 - 2cz$$

$$a^2 = 4z^2 - 4cz + c^2$$

$$a^2 = (2z - c)^2$$

$$a = 2z - c \text{ lub } a = c - 2z$$

Ponieważ w rozpatrywanym przypadku $|AK| > |KB|$, tj. $z > c - z$, więc $2z - c > 0$, czyli $a = 2z - c$.

Równość $b^2 = z^2 + h^2$ możemy, wykorzystując równość $h^2 = 3z^2 - 2cz$, zapisać w postaci

$$b^2 = 4z^2 - 2cz$$

Stąd i z równości $a = 2z - c$ otrzymujemy

$$b^2 = 2z(2z - c)$$

$$b^2 = 2za$$

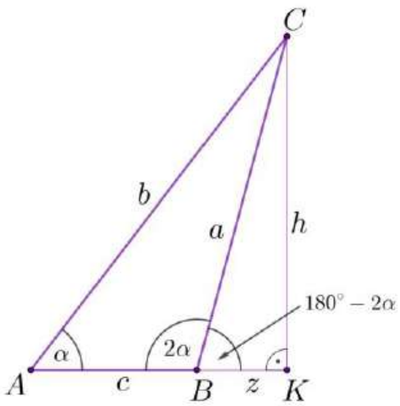
$$b^2 = (a + c) \cdot a$$

$$b^2 = a^2 + ca$$

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$$

To kończy dowód w tym przypadku.

Przypadek 2. (gdy punkt K leży na przedłużeniu boku AB).
Wtedy punkt B leży między punktami A i K. Oznaczmy $z = |BK|$. Wtedy $|AK| = c + z$ oraz $|\sphericalangle KBC| = 180^\circ - 2\alpha$ (zobacz rysunek).



Trójkąty AKC i KBC są prostokątne, więc $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{c+z}$ oraz $\operatorname{tg}(180^\circ - 2\alpha) = \frac{h}{z}$.

Ponieważ $\operatorname{tg}(180^\circ - 2\alpha) = -\operatorname{tg}(2\alpha)$, więc $\frac{h}{z} = -\operatorname{tg}(2\alpha)$.

Analogicznie jak w poprzednim przypadku stosujemy wzór na tangens podwojonego kąta i otrzymujemy:

$$-\frac{h}{z} = \frac{2 \cdot \frac{h}{c+z}}{1 - \left(\frac{h}{c+z}\right)^2}$$

$$\frac{2}{c+z} \cdot z = \left(\frac{h}{c+z}\right)^2 - 1$$

$$2z(c + z) = h^2 - (c + z)^2$$

$$h^2 = 3z^2 + 4cz + c^2$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów AKC i BKC otrzymujemy:

$$|AC|^2 = |AK|^2 + |KC|^2 \text{ oraz } |BC|^2 = |KB|^2 + |KC|^2$$

$$b^2 = (c+z)^2 + h^2 \text{ oraz } a^2 = z^2 + h^2$$

Ze związków $h^2 = 3z^2 + 4cz + c^2$ i $a^2 = z^2 + h^2$ otrzymujemy

$$a^2 = z^2 + 3z^2 + 4cz + c^2$$

$$a^2 = (2z+c)^2$$

$$a = 2z + c$$

Równość $b^2 = (c+z)^2 + h^2$ możemy, wykorzystując równość $h^2 = 3z^2 + 4cz + c^2$, zapisać w postaci

$$b^2 = 4z^2 + 6cz + 2c^2$$

Stąd i z równości $a = 2z + c$ otrzymujemy

$$b^2 = (4z^2 + 4cz + c^2) + 2cz + c^2$$

$$b^2 = (2z+c)^2 + c(2z+c)$$

$$b^2 = a^2 + ca$$

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$$

To należało wykazać.

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VIII.7) stosuje twierdzenia: Talesa, o dwusiecznej kąta […].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $P_{AGF} = \frac{1}{12}a^2$ i $P_{CEFG} = \frac{1}{6}a^2$.

3 pkt – obliczenie pola trójkąta AGF: $P_{AGF} = \frac{1}{12}a^2$

ALBO

– obliczenie pola czworokąta $CEFG$: $P_{CEFG} = \frac{1}{6}a^2$.

2 pkt – obliczenie długości jednego z odcinków FG, DF, AF, FE, BF:

$|FG| = \frac{a\sqrt{2}}{6}$, $|DF| = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, $|AF| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$, $|FE| = \frac{a\sqrt{5}}{6}$, $|BF| = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$

ALBO

– zapisanie, że trójkąty AGF i FDE mają równe pola **oraz** zapisanie związku między polami trójkątów AFD i EFG: $P_{AFD} = 4 \cdot P_{EFG}$,

ALBO

– zapisanie, że trójkąty AGF i FDE mają równe pola **oraz** zapisanie związku między polami trójkątów ADF i EDF: $P_{AFD} = 2 \cdot P_{EDF}$,

ALBO

– zapisanie, że trójkąty AFD i BEF mają równe pola **oraz** zapisanie związku między polami trójkątów ABF i EDF: $P_{ABF} = 4 \cdot P_{EDF}$,

ALBO

– zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć pole trójkąta AGF, np.:

$x + y = \frac{1}{8}a^2$ oraz $x + 4y = \frac{1}{4}a^2$, gdzie $x = P_{AGF} = P_{FDE}$, $y = P_{EFG}$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktów E i F: $E = \left(\frac{1}{2}a\,, a\right)$ oraz $F = \left(\frac{1}{3}a\,, \frac{2}{3}a\right)$,

ALBO

– narysowanie kwadratu $ABCD$ na siatce kwadratowej 12 x 12 **oraz** wyznaczenie pól trójkątów ABF i ABG: $P_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot 12m \cdot 8m$ oraz $P_{ABG} = \frac{1}{2} \cdot 12m \cdot 6m$, gdzie $m = \frac{1}{12}a$.

1 pkt – zapisanie wraz z uzasadnieniem, że $|DF| : |FG| = 2 : 1$

ALBO

– zapisanie wraz z uzasadnieniem, że $|AF| : |FE| = 2 : 1$,

ALBO

– zapisanie wraz z uzasadnieniem, że $|BF| : |FD| = 2 : 1$,

ALBO

– zapisanie, że trójkąt ABF jest podobny do trójkąta EDF w skali $2:1$,
ALBO
– zapisanie, że trójkąt AFD jest podobny do trójkąta EFG w skali $2:1$,
ALBO
– zapisanie, że trójkąt AFG jest podobny do trójkąta AEQ w skali $2:3$, gdzie Q to rzut prostokątny punktu E na przekątną AC,
ALBO
– obliczenie długości odcinka AG i dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta EAC, np. $|AG|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ oraz $\cos\sphericalangle EAC=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,
ALBO
– zapisanie, że trójkąty AGF i FDE (lub AFD i BEF) mają równe pola,
ALBO
– umieszczenie kwadratu $ABCD$ w układzie współrzędnych **oraz** wyznaczenie równań prostych AE i BD, np. $y=2x$ oraz $y=-x+a$,
ALBO
– narysowanie kwadratu $ABCD$ na siatce kwadratowej 12 x 12.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający popełnia błąd, przyjmując, że punkt F dzieli odcinek AE lub DG, lub BD w stosunku innym niż $2:1$, i na tym opiera rozwiązanie, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający przyjmuje, że punkt F dzieli odcinek AE lub DG, lub BD w poprawnym stosunku $2:1$ bez uzasadnienia, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (brak uzasadnienia traktujemy na równi z błędem rachunkowym).
3. Jeżeli zdający popełnia błąd, przyjmując, że miara kąta DAE jest równa $30°$ (lub miara kąta DEA jest równa $60°$) i na tym opiera swoje rozwiązanie, to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył praw do innej punktacji.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez środek ciężkości trójkąta)

Punkt F jest środkiem ciężkości trójkąta ACD, więc $|DF|:|FG|=2:1$, czyli

$$|FG|=\frac{1}{3}|DG|$$

Trójkąty AGF i AGD mają wspólną wysokość AG oraz pole trójkąta AGD jest równe $\frac{1}{4}a^2$, więc

$$P_{AGF}=\frac{1}{3}\cdot P_{AGD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{12}a^2$$

Zatem

$$P_{CEFG}=P_{ACE}-P_{AGF}=\frac{1}{4}\cdot P_{ABCD}-\frac{1}{12}\cdot P_{ABCD}=\frac{1}{6}a^2$$

Sposób II (poprzez długości boków AG i FG)

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ADE i wyznaczamy długość odcinka AE:

$$|AE|^2 = |AD|^2 + |DE|^2$$

$$|AE|^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$|AE| = \frac{\sqrt{5}a}{2}$$

Stosujemy twierdzenie o dwusiecznej do trójkąta ADE i wyznaczamy $|AF|$:

$$\frac{|AF|}{|FE|} = \frac{|AD|}{|DE|}$$

$$\frac{|AF|}{|FE|} = \frac{a}{\frac{1}{2}a}$$

$$\frac{|AF|}{|AE| - |AF|} = 2$$

$$\frac{|AF|}{\frac{\sqrt{5}a}{2} - |AF|} = 2$$

$$|AF| = \sqrt{5}a - 2 \cdot |AF|$$

$$|AF| = \frac{\sqrt{5}a}{3}$$

Wyznaczamy długość odcinka FG:

$$|FG|^2 = |AF|^2 - |AG|^2$$

$$|FG|^2 = \left(\frac{\sqrt{5}a}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2$$

$$|FG| = \frac{\sqrt{2}a}{6}$$

Obliczamy pole P_{AGF} trójkąta AGF:

$$P_{AGF} = \frac{1}{2} \cdot |AG| \cdot |FG| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}a}{6} = \frac{a^2}{12}$$

Obliczamy pole P_{ACE} trójkąta ACE:

$$P_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot |EC| \cdot |AD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{a^2}{4}$$

Obliczamy pole P_{CEFG} czworokąta $CEFG$:

$$P_{CEFG} = P_{ACE} - P_{AGF} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{6}$$

Sposób III (poprzez pole trójkąta ADF)

Stosujemy twierdzenie o dwusiecznej do trójkąta ADE i otrzymujemy

$$\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{|AF|}{|FE|}$$

$$2 = \frac{|AF|}{|FE|}$$

Wysokość trójkąta FDE poprowadzona z wierzchołka D na bok FE jest jednocześnie wysokością trójkąta ADF, więc stosunek pól tych trójkątów jest równy

$$\frac{P_{ADF}}{P_{FDE}} = \frac{|AF|}{|FE|} = 2$$

Stąd i z tego, że pole trójkąta ADE jest równe $\frac{1}{4}a^2$, otrzymujemy

$$P_{ADF} = \frac{2}{3} \cdot P_{ADE} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{6}a^2$$

oraz

$$P_{FDE} = \frac{1}{3} \cdot P_{ADE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{12}a^2$$

Zatem

$$P_{AGF} = P_{ADG} - P_{ADF} = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{6}a^2 = \frac{1}{12}a^2$$

oraz

$$P_{CEFG} = P_{GDC} - P_{FDE} = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{6}a^2$$

Sposób IV (poprzez pole trójkąta DEF)

Trójkąty ADE i ADG mają wspólną podstawę AD, a wysokości tych trójkątów opuszczone na bok AD są równe. Zatem $P_{ADE} = P_{ADG}$. Stąd pola trójkątów AGF i FDE są równe: $P_{AGF} = P_{FDE}$.

Ponieważ pola trójkątów ADG i GDC są równe i $P_{AGF} = P_{FDE}$, więc $P_{ADF} = P_{CEFG}$.

Stosujemy twierdzenie o dwusiecznej do trójkąta ADE i otrzymujemy

$$\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{|AF|}{|FE|}$$

$$2 = \frac{|AF|}{|FE|}$$

Wysokość trójkąta FDE poprowadzona z wierzchołka D na bok FE jest jednocześnie wysokością trójkąta ADF, więc stosunek pól tych trójkątów jest równy

$$\frac{P_{ADF}}{P_{FDE}} = \frac{|AF|}{|FE|} = 2$$

Stąd i z tego, że pole trójkąta ADE jest równe $\frac{1}{4}a^2$, otrzymujemy

$$P_{ADF} = \frac{2}{3} \cdot P_{ADE} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{6}a^2$$

oraz

$$P_{FDE} = \frac{1}{3} \cdot P_{ADE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{12}a^2$$

Zatem

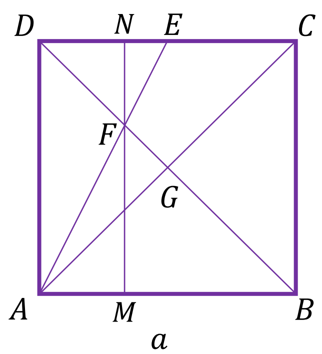
$$P_{AGF} = P_{FDE} = \frac{1}{12}a^2$$

oraz

$$P_{CEFG} = P_{ADF} = \frac{1}{6}a^2$$

Sposób V (poprzez odcinek MN)

Oznaczmy przez M i N punkty przecięcia prostej równoległej do AD i przechodzącej przez punkt F z bokami – odpowiednio – AB i CD kwadratu (zobacz rysunek).



Trójkąty ABF i EDF są podobne (cecha kkk), a skala tego podobieństwa jest równa $\frac{|AB|}{|DE|} = 2$. Zatem

$$|FM| = \frac{2}{3}a \text{ oraz } |FN| = \frac{1}{3}a$$

Stąd

$$P_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |FM| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3}a = \frac{1}{3}a^2$$

Ponieważ $P_{ABG} = \frac{1}{4}P_{ABCD} = \frac{1}{4}a^2$ oraz $P_{AGF} = P_{ABF} - P_{ABG}$, więc

$$P_{AGF} = P_{ABF} - P_{ABG} = \frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{12}a^2$$

Obliczamy pole trójkąta EDF:

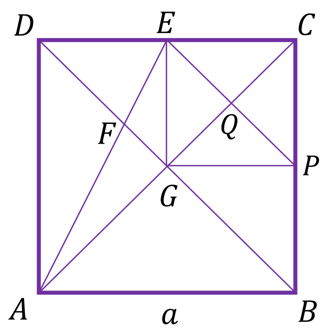
$$P_{EDF}=\frac{1}{2}\cdot|DE|\cdot|FN|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}a=\frac{1}{12}a^2$$

Ponieważ $P_{CDG}=\frac{1}{4}P_{ABCD}=\frac{1}{4}a^2$ oraz $P_{CEFG}=P_{CDG}-P_{EDF}$, więc

$$P_{CEFG}=P_{CDG}-P_{EDF}=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{12}a^2=\frac{1}{6}a^2$$

Sposób VI (poprzez trójkąty AEQ i AGF)

Oznaczmy przez P środek boku BC, a przez Q – punkt przecięcia przekątnej AC i odcinka PE (zobacz rysunek).



Trójkąty AFG i AEQ są podobne (cecha kkk), a skala tego podobieństwa jest równa

$$\frac{|AG|}{|AQ|}=\frac{\frac{1}{2}|AC|}{\frac{3}{4}|AC|}=\frac{2}{3}$$

Zatem

$$P_{AGF}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot P_{AQE}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{4}a\sqrt{2}=\frac{1}{12}a^2$$

Wobec tego

$$P_{CEFG}=P_{ACE}-P_{AGF}=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{12}a^2=\frac{1}{6}a^2$$

Sposób VII (poprzez pola trójkątów w trapezie $ADEG$)

Trójkąty ADE i ADG mają wspólną podstawę AD, a wysokości tych trójkątów opuszczone na bok AD są równe. Zatem $P_{ADE}=P_{ADG}$. Stąd

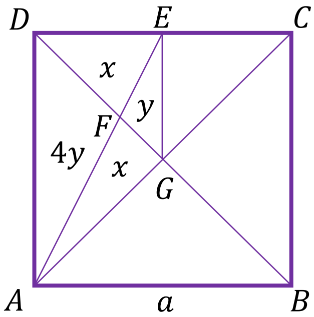
$$P_{AGF}=P_{AGD}-P_{AFD}=P_{ADE}-P_{AFD}=P_{FDE}$$

Oznaczmy $x=P_{AGF}=P_{FDE}$ oraz $y=P_{EFG}$.

Trójkąty AFD i EFG są podobne (cecha kkk), a skala tego podobieństwa jest równa $\frac{|AD|}{|EG|}=2$. Zatem

$$P_{AFD}=2^2\cdot P_{EFG}=4y$$

(zobacz rysunek).



Pola trójkątów DEG i AGD stanowią – odpowiednio – ósmą i czwartą część pola kwadratu $ABCD$. Otrzymujemy zatem układ równań

$$x + y = \frac{1}{8}a^2 \text{ oraz } x + 4y = \frac{1}{4}a^2$$

Stąd

$$3y = \frac{1}{8}a^2$$

$$y = \frac{1}{24}a^2$$

Zatem

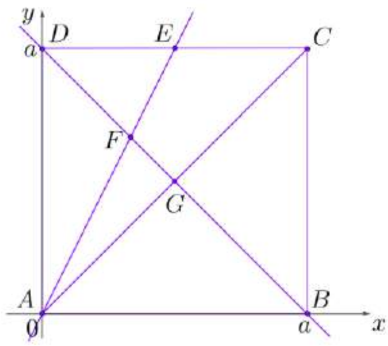
$$x = \frac{1}{8}a^2 - y = \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{24}a^2 = \frac{1}{12}a^2$$

Wobec tego

$$P_{CEFG} = P_{GCE} + P_{EFG} = x + 2y = \frac{1}{12}a^2 + 2 \cdot \frac{1}{24}a^2 = \frac{1}{6}a^2$$

Sposób VIII (w układzie współrzędnych)

Umieszczamy kwadrat $ABCD$ w układzie współrzędnych tak, że $A = (0,0)$, $B = (a,0)$, $C = (a,a)$ oraz $D = (0,a)$, gdzie $a > 0$ (zobacz rysunek).



Wedy $G = \left(\frac{0+a}{2}, \frac{0+a}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$ oraz $E = \left(\frac{1}{2}a, a\right)$.

Prosta AE ma równanie postaci $y = \frac{a}{\frac{1}{2}a}x$, czyli $y = 2x$.

Prosta BD ma równanie postaci $y = \frac{a}{-a}x + a$, czyli $y = -x + a$.

Wyznaczamy współrzędne punktu F przecięcia prostych AE i BD, rozwiązując układ równań $y = 2x$ i $y = -x + a$. Stąd

$$2x = -x + a$$

$$x = \frac{1}{3}a$$

więc $y = \frac{2}{3}a$ oraz $F = \left(\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a\right)$.

Obliczamy pola trójkątów AGF i ACE:

$$P_{AGF} = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{3}a - \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}a\right| = \frac{1}{12}a^2$$

oraz

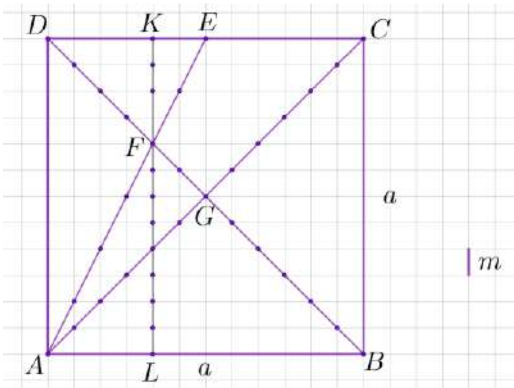
$$P_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot \left|a \cdot a - a \cdot \frac{1}{2}a\right| = \frac{1}{4}a^2$$

Zatem

$$P_{CEFG} = P_{ACE} - P_{AGF} = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{6}a^2$$

Sposób IX (poprzez punkty kratowe)

Kwadrat $ABCD$ umieszczamy na sieci złożonej z przystających kwadratów o boku $m = \frac{1}{12}a$ (jak na rysunku).



Wtedy

$$P_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot 12m \cdot 8m = 48m^2$$

oraz

$$P_{ABG} = \frac{1}{2} \cdot 12m \cdot 6m = 36m^2$$

Zatem

$$P_{AGF} = P_{ABF} - P_{ABG} = 12m^2 = 12 \cdot \left(\frac{1}{12}a\right)^2 = \frac{1}{12}a^2$$

oraz

$$P_{CEFG} = P_{CDG} - P_{DFE} = \frac{1}{2} \cdot 12m \cdot 6m - \frac{1}{2} \cdot 6m \cdot 4m = 24m^2 = 24 \cdot \left(\frac{1}{12}a\right)^2 = \frac{1}{6}a^2$$

Zadanie 10. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$.

4 pkt – zapisanie alternatywy równań $\sin(2x) - 1 = 0$ lub $2\cos(2x) - 1 = 0$ **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w zbiorze $[0, 2\pi]$ (lub obydwu w zbiorze $\mathbb{R}$), np.

$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ (rozwiązania równania $\sin(2x) - 1 = 0$ w zbiorze $[0, 2\pi]$),

$\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ (rozwiązania równania $2\cos(2x) - 1 = 0$ w zbiorze $[0, 2\pi]$),

$\frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (rozwiązania równania $\sin(2x) - 1 = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$) oraz

$\frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $-\frac{\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (rozwiązania równania $2\cos(2x) - 1 = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$)

ALBO

– zapisanie alternatywy trzech równań

$\sin(2x) - 1 = 0$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = -\frac{1}{2}$

oraz rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w zbiorze $[0, 2\pi]$ (lub co najmniej dwóch z tych równań w zbiorze $\mathbb{R}$),

ALBO

– zapisanie alternatywy trzech równań

$\sin(2x) - 1 = 0$ lub $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

oraz rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w zbiorze $[0, 2\pi]$ (lub co najmniej dwóch z tych równań w zbiorze $\mathbb{R}$).

3 pkt – przekształcenie równoważne równania $\sin(4x) - \sin(2x) = 4\cos^2 x - 3$ do postaci alternatywy dwóch równań trygonometrycznych, np.:

$\sin(2x) - 1 = 0$ lub $2\cos(2x) - 1 = 0$,

$\sin(2x) - 1 = 0$ lub $1 - 4\sin^2 x = 0$,

$\sin(2x) - 1 = 0$ lub $4\cos^2 x - 3 = 0$

ALBO

– przekształcenie równoważne równania $\sin(4x) - \sin(2x) = 4\cos^2 x - 3$ do postaci

$[\sin(2x) - 1] \cdot [2\cos(2x) - 1] = 0$ lub

$[\sin(2x) - 1] \cdot (1 - 4\sin^2 x) = 0$, lub

$(4\cos^2 x - 3) \cdot [\sin(2x) - 1] = 0$.

2 pkt – przekształcenie równania do postaci

$\sin(2x)\cdot[2\cos(2x)-1]=2\cos(2x)-1$ lub
$\sin(2x)\cdot(4\cos^2 x-3)=4\cos^2 x-3$, lub
$\sin(2x)\cdot(1-4\sin^2 x)=1-4\sin^2 x$, lub
$2\sin x\cdot\cos x\cdot[2\cos(2x)-1]=2\cos(2x)-1$, lub
$2\sin x\cdot\cos x\cdot(4\cos^2 x-3)=4\cos^2 x-3$, lub
$2\sin x\cdot\cos x\cdot(1-4\sin^2 x)=1-4\sin^2 x$, lub
$2\cdot(4\cos^3 x-3\cos x)\cdot\sin x=4\cos^2 x-3$.

1 pkt – zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta lub cosinus podwojonego kąta, lub różnicę sinusów i zapisanie równania w postaci

$2\cdot\sin(2x)\cdot\cos(2x)-\sin(2x)=4\cos^2 x-3$ lub
$\sin(4x)-\sin(2x)=2\cos(2x)-1$, lub
$2\cos(3x)\cdot\sin x=4\cos^2 x-3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający przed uzyskaniem trygonometrycznych równań elementarnych popełni jedynie błędy rachunkowe i otrzyma równania elementarne, z których co najmniej jedno ma dwie serie rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający popełnia błędy inne niż rachunkowe i uzyska błędną alternatywę (albo błędną postać iloczynową), ale jednym z równań tej alternatywy jest: $\sin(2x)-1=0$, $2\cos(2x)-1=0$, $4\cos^2 x-3=0$, $1-4\sin^2 x=0$, i to równanie rozwiąże w przedziale $[0,2\pi]$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez wyrażenie $a(x)$, zawierające niewiadomą x i nie rozważa przypadku $a(x)=0$, ale konsekwentnie rozwiąże otrzymane równanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

4. Jeżeli zdający popełnia jednokrotnie błąd polegający na niepoprawnym zastosowaniu wzorów trygonometrycznych i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Stosujemy wzory na sinus i cosinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie $\sin(4x)-\sin(2x)=4\cos^2x-3$ równoważnie, otrzymując:

$$\sin(4x)-\sin(2x)=4\cos^2x-3$$

$$\sin(2\cdot 2x)-\sin(2x)=2\cdot(2\cos^2x-1)-1$$

$$2\cdot\sin(2x)\cdot\cos(2x)-\sin(2x)=2\cdot(2\cos^2x-1)-1$$

$$2\cdot\sin(2x)\cdot\cos(2x)-\sin(2x)=2\cos(2x)-1$$

$$\sin(2x)\cdot[2\cos(2x)-1]=2\cos(2x)-1$$

$$[\sin(2x) - 1] \cdot [2\cos(2x) - 1] = 0$$

$$\sin(2x) - 1 = 0 \quad \vee \quad 2\cos(2x) - 1 = 0$$

$$\sin(2x) = 1 \quad \vee \quad \cos(2x) = \frac{1}{2}$$

Rozwiązujemy równanie $\sin(2x) = 1$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\sin(2x) = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\sin(2x) = 1$ w zbiorze $[0, 2\pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

Rozwiązujemy równanie $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ w zbiorze $[0, 2\pi]$: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

Zatem rozwiązaniami równania $\sin(4x) - \sin(2x) = 4\cos^2 x - 3$ w zbiorze $[0, 2\pi]$ są liczby: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$.

Sposób II

Stosujemy wzory na sinus i cosinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie $\sin(4x) - \sin(2x) = 4\cos^2 x - 3$ równoważnie, otrzymując:

$$\sin(4x) - \sin(2x) = 4\cos^2 x - 3$$

$$\sin(2 \cdot 2x) - \sin(2x) = 4\cos^2 x - 3$$

$$2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x) - \sin(2x) = 4 \cdot (1 - \sin^2 x) - 3$$

$$2 \cdot \sin(2x) \cdot (1 - 2\sin^2 x) - \sin(2x) = 1 - 4\sin^2 x$$

$$\sin(2x) \cdot (1 - 4\sin^2 x) = 1 - 4\sin^2 x$$

$$[\sin(2x) - 1] \cdot (1 - 4\sin^2 x) = 0$$

$$\sin(2x) - 1 = 0 \quad \vee \quad 1 - 4\sin^2 x = 0$$

$$\sin(2x) = 1 \quad \vee \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

Rozwiązujemy równanie $\sin(2x) = 1$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\sin(2x) = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\sin(2x) = 1$ w zbiorze $[0, 2\pi]$: $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

Rozwiązujemy równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\sin x = \frac{1}{2}$ w zbiorze $[0, 2\pi]$: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Rozwiązujemy równanie $\sin x = -\frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy rozwiązania równania $\sin x = -\frac{1}{2}$ w zbiorze $[0, 2\pi]$: $\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.

Zatem rozwiązaniami równania $\sin(4x) - \sin(2x) = 4\cos^2 x - 3$ w zbiorze $[0, 2\pi]$ są liczby: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$.

Zadanie 11. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; IX.5) oblicza odległość punktu od prostej. IX.R1) posługuje się równaniem prostej w postaci ogólnej na płaszczyźnie […].

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $S = (6, 7)$ oraz $S = (-4, -3)$.

4 pkt – obliczenie obydwu wartości x_S: 6 oraz (-4)

ALBO

– obliczenie obydwu współrzędnych punktu S tylko dla jednego przypadku: $S = (6, 7)$ albo $S = (-4, -3)$.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (współrzędną punktu S), np.

$(x_S - 1)^2 + (x_S + 1 - 2)^2 = 50$, $\dfrac{|2x_S - (x_S + 1)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$,

$(x_S - (-5))^2 + (x_S + 1 - (-1))^2 = 5$,

$(x_S - (-2))^2 + (x_S + 1 - (-4))^2 = 5$,

$(x_S - 4)^2 + (x_S + 1 - 8)^2 = 5$,

$(x_S - 7)^2 + (x_S + 1 - 5)^2 = 5$.

2 pkt – obliczenie długości m odcinka AB (lub AC) stycznej: $3\sqrt{5}$

ALBO

– obliczenie długości odcinka AS: $|AS| = 5\sqrt{2}$.

1 pkt – zapisanie współrzędnych punktu S w zależności od jednej zmiennej, np.

$S = (x, x + 1)$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością m odcinka AB stycznej), np.

$15 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \sqrt{5}$,

ALBO

– zapisanie układ trzech równań:

$|z|^2 = m^2 + m^2 - 2m \cdot m \cdot \cos\alpha$ oraz

$|z|^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$ oraz

$15 = \frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \sin(180^\circ - \alpha)$,

gdzie $z = |BC|$, $m = |AB|$, $\alpha = |\measuredangle BAC|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

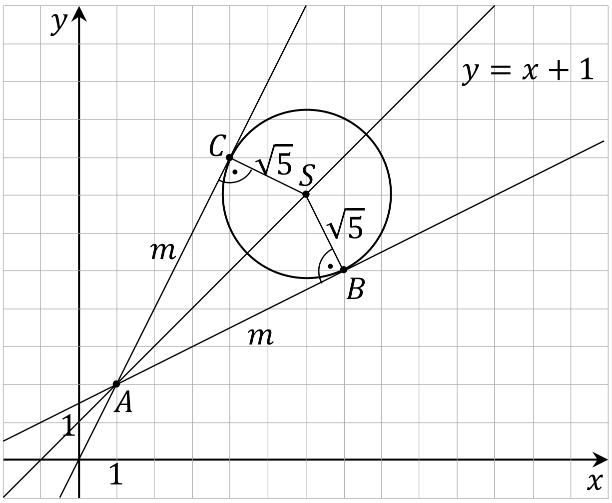
1. Jeżeli zdający pomija współczynnik $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta lub deltoidu, to błąd ten traktujemy jako błąd rachunkowy.

2. Jeżeli zdający rozwiąże zadanie do końca, ale otrzyma więcej niż dwa punkty S, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Promienie BS oraz CS okręgu poprowadzone do punktów styczności są prostopadłe do stycznych – odpowiednio – AB i AC, więc trójkąty ABS oraz ACS są prostokątne. Ponadto odcinki AB oraz AC mają równe długości, więc trójkąty te są przystające (na podstawie cechy bbb przystawania trójkątów). Oznaczmy $m = |AB| = |AC|$ (zobacz rysunek).



Pole P_{ABSC} czworokąta $ABSC$ jest sumą pól trójkątów przystających ABS oraz ACS, więc

$$P_{ABSC} = P_{ABS} + P_{ACS}$$

$$15 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \sqrt{5}$$

$$m = 3\sqrt{5}$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ABS otrzymujemy

$$|AS|^2 = |AB|^2 + |BS|^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 50$$

Niech x_S będzie pierwszą współrzędną punktu S. Punkt S leży na prostej o równaniu $y = x + 1$, więc $S = (x_S\,, x_S + 1)$.

Wtedy

$$(x_S - 1)^2 + (x_S + 1 - 2)^2 = 50$$

Stąd dalej otrzymujemy

$$(x_S - 1)^2 = 25$$

$$|x_S - 1| = 5$$

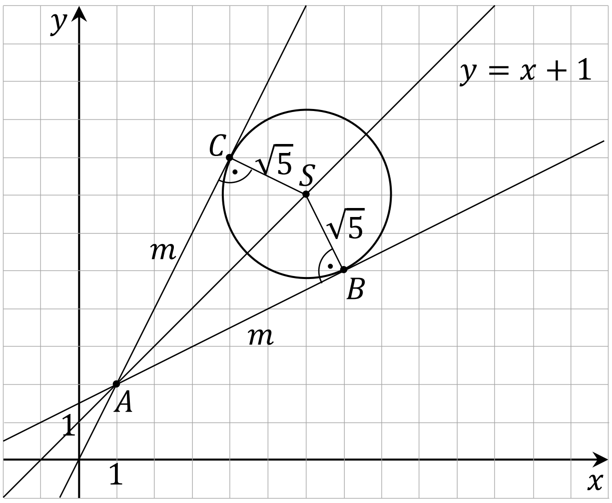
$$x_S = 6 \quad \vee \quad x_S = -4$$

Zatem $S = (6, 7)$ lub $S = (-4, -3)$.

Sposób II

Niech x_S będzie pierwszą współrzędną punktu S. Punkt S leży na prostej o równaniu $y = x + 1$, więc $S = (x_S, x_S + 1)$.

Promienie BS oraz CS okręgu poprowadzone do punktów styczności są prostopadłe do stycznych – odpowiednio – AB i AC, więc trójkąty ABS oraz ACS są prostokątne. Ponadto odcinki AB oraz AC mają równe długości, więc trójkąty te są przystające (na podstawie cechy bbb przystawania trójkątów). Oznaczmy $m = |AB| = |AC|$ (zobacz rysunek).



Pole P_{ABSC} czworokąta $ABSC$ jest sumą pól trójkątów przystających ABS oraz ACS, więc

$$P_{ABSC} = P_{ABS} + P_{ACS}$$

$$15 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \sqrt{5}$$

$$m = 3\sqrt{5}$$

Zauważmy, że punkt A leży na prostej o równaniu $y = x + 1$. Każda prosta przechodząca przez punkt $A = (1, 2)$, poza prostą równoległą do osi Oy, ma równanie postaci $y = a(x - 1) + 2$. Tangens kąta, jaki tworzy każda ze stycznych AB oraz AC z prostą o równaniu $y = x + 1$, jest równy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{m} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3}$$

Stąd i ze wzoru na tangens kąta między prostymi otrzymujemy

$$\frac{1}{3} = \operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{a-1}{a+1}\right|$$

$$a+1 = 3(a-1) \quad \vee \quad a+1 = -3(a-1)$$

$$a = 2 \quad \vee \quad a = \frac{1}{2}$$

Zatem styczne AB oraz AC mają równania postaci $y = 2(x-1)+2$ oraz $y = \frac{1}{2}(x-1)+2$, czyli $2x-y=0$ oraz $x-2y+3=0$.

Odległość punktu S od każdej ze stycznych AB i AC jest równa $\sqrt{5}$. Zatem

$$\frac{|2x_S-(x_S+1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$|x_S-1| = 5$$

$$x_S = 6 \quad \vee \quad x_S = -4$$

Istnieją dwa punkty spełniające warunki zadania: $S=(6,7)$ oraz $S=(-4,-3)$.

Zadanie 12. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **4 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
4 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi

$$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7:\ m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right].$$

3 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$ w postaci $W(m) \leq 0$, gdzie $W(m)$ jest iloczynem co najmniej dwóch wielomianów stopni dodatnich, np.

$$(3m-1)(3m+1)^2 \leq 0,\ \ (9m^2-1)(3m+1) \leq 0,\ \ 27\left(m - \frac{1}{3}\right)\left(m + \frac{1}{3}\right)^2 \leq 0$$

ALBO

– zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$ w postaci $27m^3 + 9m^2 - 3m - 1 \leq 0$ **oraz** wyznaczenie jednego z pierwiastków wielomianu $27m^3 + 9m^2 - 3m - 1$.

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$, np.

$(3m+1)^3 - 9 \cdot (2m^2 + m + 1) \leq 3m - 7$.

1 pkt – przekształcenie nierówności $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np. $(x_1 + x_2)^3 - 9x_1x_2 \leq 3m - 7$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie dwa warunki: $\Delta > 0$ i $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$: $m \in (-\infty, -3)$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie warunki $\Delta > 0$ i $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$: $m \in (-\infty, -3)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający w etapie I lub II popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za III etap otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający w etapach I i II nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I i II, to za III etap może otrzymać **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd – przyjmie, że $x_1 + x_2 = \pm(2m^2 + m + 1)$ lub $x_1 \cdot x_2 = \pm(3m+1)$, lub $x_1 + x_2 = \pm\frac{b}{2a}$, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty (**1 punkt za przekształcenie nierówności $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za <u>konsekwentne</u> rozwiązanie nierówności do końca), a za III etap otrzymuje **0 punktów**.

4. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd, który nie jest rachunkowy, np.:

- pominie istotne nawiasy przy przekształcaniu nierówności $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a,
- przyjmie, że $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1 \cdot x_2]$,
- przyjmie, że $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3$,

i konsekwentnie do popełnionego błędu doprowadzi rozwiązanie II etapu zadania do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za II etap (1 punkt za zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za <u>konsekwentne</u> rozwiązanie nierówności do końca), a za III etap otrzymuje **0 punktów**.

5. Jeżeli w II etapie rozwiązania zdający popełni błędy i otrzyma nierówność $V(m) \leq 0$, to za podanie zbioru rozwiązań nierówności otrzymuje **1 punkt** tylko wtedy, gdy wielomian V jest stopnia trzeciego i ma co najmniej dwa różne pierwiastki rzeczywiste.

6. Jeżeli zdający wprowadza dodatkowe założenie, które nie wynika z warunków zadania (np. $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 \cdot x_2 > 0$), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów** (co najwyżej 1 punkt za I etap i co najwyżej 4 punkty za II etap).

Przykładowe pełne rozwiązanie

I etap

Trójmian kwadratowy $x^2 - (3m+1)x + 2m^2 + m + 1$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik tego trójmianu jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$[-(3m+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m^2 + m + 1) > 0$$

$$m^2 + 2m - 3 > 0$$

$$(m-1) \cdot (m+3) > 0$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

II etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$$

$$(x_1 + x_2)^3 - 9x_1x_2 \leq 3m - 7$$

$$(3m+1)^3 - 9 \cdot (2m^2 + m + 1) \leq 3m - 7$$

$$27m^3 + 9m^2 - 3m - 1 \leq 0$$

$$(3m)^3 - 1^3 + 9m^2 - 3m \leq 0$$

$$(3m-1)(9m^2 + 3m + 1) + 3m(3m-1) \leq 0$$

$$(3m-1)(9m^2 + 6m + 1) \leq 0$$

$$(3m-1)(3m+1)^2 \leq 0$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$$

III etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, które jednocześnie spełniają warunki $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ oraz $m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$: $m \in (-\infty, -3)$.

Zadanie 13.1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów […].

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – wyznaczenie wysokości H graniastosłupa w zależności od długości krawędzi podstawy, np. $H = \frac{13824}{a^2\sqrt{3}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozważa inną bryłę niż graniastosłup prawidłowy trójkątny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający przeprowadzi rozumowanie tylko dla $a = 8\sqrt{3}$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozpatrzmy dowolny z rozważanych graniastosłupów. Oznaczmy jego wysokość przez H. Korzystamy ze wzoru na objętość graniastosłupa oraz wzoru na pole trójkąta równobocznego i otrzymujemy:

$$3456 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

$$H = \frac{4608\sqrt{3}}{a^2}$$

Stąd oraz ze wzoru na pole powierzchni całkowitej graniastosłupa dostajemy

$$P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot \frac{4608\sqrt{3}}{a^2}$$

$$P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

Zadanie 13.2. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; XIII.R4) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R5) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą dla $a = 8\sqrt{3}$ i obliczenie wartości najmniejszej funkcji P: $96\sqrt{3} + 1728$.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą dla $a = 8\sqrt{3}$

ALBO

– zapisanie, że dla $a = 8\sqrt{3}$ funkcja P osiąga wartość najmniejszą i obliczenie $P(8\sqrt{3})$: $P(8\sqrt{3}) = 96\sqrt{3} + 1728$.

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania $a\sqrt{3} - \frac{13824\sqrt{3}}{a^2} = 0$: $a = 24$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji P: $P'(a) = a\sqrt{3} - \frac{13824\sqrt{3}}{a^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający wyznaczy pochodną funkcji P z błędem, ale wyznaczona pochodna ma postać $Aa + \frac{B}{a^2}$, gdzie A oraz B są liczbami niewymiernymi, lub postać ułamka, w którego liczniku jest wielomian stopnia trzeciego, a w mianowniku ma^2, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za miejsce zerowe pochodnej, za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji oraz za obliczenie najmniejszej wartości funkcji P).
Jeżeli natomiast otrzyma inną błędną postać pochodnej, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za miejsce zerowe pochodnej oraz za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji P).

2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.

3. Jeżeli zdający otrzyma miejsce zerowe pochodnej, które należy do przedziału $(0, 8\sqrt{3})$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** (za wyznaczenie pochodnej albo za obliczenie miejsca zerowego pochodnej).

4. Za poprawne uzasadnienie, że funkcja P osiąga wartość najmniejszą dla $a = 8\sqrt{3}$ można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz zapisuje słownie lub graficznie, że funkcja P jest malejąca w przedziale $(0, a_0)$, gdzie a_0 jest miejscem zerowym pochodnej funkcji f, będącej rozszerzeniem funkcji P na zbiór $(0, +\infty)$.

5. Jeżeli zdający błędnie uzasadnia, że dla $a = 8\sqrt{3}$ funkcja P osiąga wartość najmniejszą, to nie otrzymuje punktu za obliczenie $P\left(8\sqrt{3}\right)$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy najmniejszą wartość funkcji P określonej wzorem $P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$ dla $a \in \left(0, 8\sqrt{3}\,\right]$.

Wyznaczamy pochodną funkcji P: $P'(a) = a\sqrt{3} - \frac{13824\sqrt{3}}{a^2}$ dla $a \in \left(0, 8\sqrt{3}\,\right]$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji P:

$$P'(a) = 0$$

$$a\sqrt{3} - \frac{13824\sqrt{3}}{a^2} = 0$$

$$a^3\sqrt{3} - 13824\sqrt{3} = 0$$

$$a^3 = 13824 = 24^3$$

$$a = 24 \notin \left(0, 8\sqrt{3}\,\right]$$

Badamy znak pochodnej:

$$P'(a) < 0$$

$$a\sqrt{3} - \frac{13824\sqrt{3}}{a^2} < 0$$

$$a^3\sqrt{3} - 13824\sqrt{3} < 0$$

$$a^3 < 13824$$

$$a < 24$$

więc $P'(a) < 0$ dla $a \in \left(0, 8\sqrt{3}\,\right]$.

Zatem funkcja P jest malejąca w przedziale $\left(0, 8\sqrt{3}\,\right]$.

Stąd dla $a = 8\sqrt{3}$ funkcja P osiąga wartość najmniejszą równą

$$P\left(8\sqrt{3}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a} = \frac{\left(8\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = 96\sqrt{3} + 1728.$$