Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**

Uwagi:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

2. Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie otwarte, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Wymagania egzaminacyjne w 2023 i 2024 r.:

https://link.operon.pl/uk

Zadanie 1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi; I.R1) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne zastosowanie wzorów na logarytm potęgi, logarytm ilorazu oraz na zamianę podstawy logarytmu i zapisanie poprawnego wyniku: (-2)

1 pkt – poprawne obliczenie wartości wyrażenia $\log_5 7\cdot\log_{49}625$ i zapisanie wyniku: 2

ALBO

– poprawne obliczenie wartości wyrażenia $\log_3\sqrt[3]{2}-2\log_3\sqrt[6]{54}$ i otrzymanie wyniku: (-1)

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Stosujemy wzór na zamianę podstawy logarytmu, logarytm ilorazu oraz korzystamy z definicji logarytmu i otrzymujemy:

$$\frac{\log_5 7\cdot\log_{49}625}{\log_3\sqrt[3]{2}-2\log_3\sqrt[6]{54}}=\frac{\log_5 7\cdot 4\log_{49}5}{\log_3\sqrt[3]{2}-\log_3\sqrt[3]{54}}=\frac{\log_5 7\cdot 4\dfrac{1}{\log_5 49}}{\log_3\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}}=\frac{\log_5 7\cdot 4\dfrac{1}{2\log_5 7}}{\log_3\dfrac{1}{3}}=\frac{2}{-1}=-2$$

Zadanie 2. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje); V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne wyznaczenie wzoru funkcji *f* w postaci kanonicznej: $f(x)=2(x-4)^2-5$

1 pkt – poprawne wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli: $p=4$ oraz $q=-5$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku $W=(p,\ q)$.

Jeśli $x_1+x_2=8$, to $\frac{x_1+x_2}{2}=4$.

Wobec tego odcięta wierzchołka paraboli $p=4$.

Skoro $p\in[0,\ 6]$ oraz $f(0)>0$ i parabola jest symetryczna względem prostej $x=4$, to oznacza, że $f(0)=27$. Wartość najmniejszą funkcja przyjmuje dla $x=4$.

Wobec tego rzędna wierzchołka paraboli $q=f(4)=-5$

Wzór funkcji f można zapisać w postaci kanonicznej: $f(x)=a(x-4)^2-5$

Skoro $f(0)=27$, to $a=2$, zatem: $f(x)=2(x-4)^2-5$

Zadanie 3. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI. 4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; VI.R1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i zapisanie poprawnego wyniku: $\frac{5}{14}$

1 pkt – poprawne wyznaczenie sumy n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$6+11+16+\ldots+(5n+1)=\frac{6+(5n+1)}{2}\cdot n$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{6+11+16+\ldots+(5n+1)}{7n^2-4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{6+(5n+1)}{2}\cdot n}{7n^2-4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^2+7n}{14n^2-8}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(5+\frac{7}{n}\right)}{n^2\left(14-\frac{8}{n^2}\right)}=\frac{5}{14}$$

Zadanie 4. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: II.R3) korzysta ze wzorów na: $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3 i a^3-b^3.

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne wnioskowanie dotyczące znaku wyrażeń: $(x-1)$, (x^2+x+1), $(2y-3)^2$ oraz znaku całego wyrażenia $(x-1)(x^2+x+1)(2y-3)^2+1$

2 pkt – przekształcenie wyrażenia $4x^3y^2-4y^2-12x^3y+12y+9x^3-8$ do postaci $(x-1)(x^2+x+1)(2y-3)^2+1$

1 pkt – przekształcenie wyrażenia $4x^3y^2-4y^2-12x^3y+12y+9x^3-8$ do postaci $(x^3-1)(4y^2-12y+9)+1$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

$4x^3y^2-4y^2-12x^3y+12y+9x^3-8=x^3(4y^2-12y+9)-(4y^2-12y+8+1)+1=$

$=(x^3-1)(4y^2-12y+9)+1=(x^3-1)(2y-3)^2+1=(x-1)(x^2+x+1)(2y-3)^2+1$

Dla $x>1$ dwumian $x-1$ jest liczbą dodatnią.

Trójmian x^2+x+1 przyjmuje wartości dodatnie dla każdej wartości $x\in\mathbb{R}$, $(2y-3)^2\geq 0$, ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.

Iloczyn dwóch liczb dodatnich i jednej nieujemnej jest nieujemny.

Zatem wyrażenie $(x-1)(x^2+x+1)(2y-3)^2+1$ jest dodatnie.

To należało wykazać.

Zadanie 5. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.R4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2\|x+3\|+3\|x-1\|=13$, $\|x+2\|+2\|x-3\|<11$.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i zapisanie poprawnego wyniku: $x\in\left(-\frac{1}{2},\ 4\right)$

2 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności oddzielnie w każdym z przedziałów: $(-\infty,\ 1)$ oraz $[1,\ \infty)$

ALBO

– poprawne rozwiązanie każdej z dwóch nierówności oraz otrzymanie koniunkcji nierówności: $x<4$ i $\boldsymbol{x}>-\frac{1}{2}$

1 pkt – poprawne zastosowanie definicji wartości bezwzględnej lub własności wartości bezwzględnej i zapisanie danej nierówności odpowiednio w dwóch przedziałach: $(-\infty,\ 1)$ oraz $[1,\ \infty)$

ALBO

– zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności, np.: $3x-3<x+5$ i $3x-3>-x-5$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Sposób 1.

Rozważamy dwa przypadki.

1. $x \in (-\infty,\ 1)$

W tym przypadku nierówność $x+5>3|x-1|$ ma postać $x+5>-3x+3$, czyli $x \in \left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$.

2. $x \in [1,\ +\infty)$

W tym przypadku nierówność $x+5>3|x-1|$ ma postać $x+5>3x-3$, czyli $x \in [1,\ 4)$.

Ostatecznie rozwiązaniami danej nierówności są wszystkie liczby ze zbioru $\left(-\frac{1}{2},\ 4\right)$.

Sposób 2. (przez koniunkcję nierówności)

Dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równoważność: $|x|<a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x<a$ i $x>-a$.

Nierówność $x+5>3|x-1|$ równoważnie można zapisać w postaci:

$3|x-1|<x+5$

Zatem: $3x-3<x+5$ i $3x-3>-x-5$

$x<4$ i $x>-\frac{1}{2}$

Zatem: $x \in \left(-\frac{1}{2},\ 4\right)$

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.R3) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i zapisanie, że $d=r\sqrt{3}$, np.: z własności funkcji trygonometrycznych w trójkącie ABD

2 pkt – poprawne wyznaczenie miar kątów: $\alpha=60^\circ$, $\beta=30^\circ$

1 pkt – stwierdzenie, że trójkąt ABD jest prostokątny

ALBO

– zastosowanie twierdzenia o okręgu opisanym na czworokącie i zapisanie zależności $|\sphericalangle BCD|=180^\circ-\alpha$

ALBO

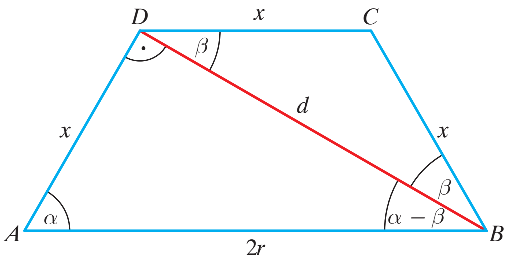
– zastosowanie twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta i zapisanie zależności, np.: $2\beta+180^\circ-\alpha=180^\circ$

ALBO

– zastosowanie twierdzenia o kątach naprzemianległych i zapisanie zależności $2\beta=\alpha$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:
$|AD|=|CD|=|BC|=x$ oraz $|BD|=|AC|=d$
$|\sphericalangle DAB|=|\sphericalangle ABC|=\alpha$ oraz $|\sphericalangle BDC|=|\sphericalangle DBC|=\beta$
Stąd: $|\sphericalangle ABD|=\alpha-\beta$
Okrąg o promieniu r opisany na trapezie $ABCD$, jest również opisany na trójkącie ABD. Dłuższa podstawa trapezu ma długość $2r$, zatem trójkąt ABD jest prostokątny i $|\sphericalangle ADB|=90°$.
Z własności okręgu opisanego na czworokącie $|\sphericalangle BCD|=180°-\alpha$.
Z własności kątów wewnętrznych w trójkącie BCD otrzymujemy zależność:
$2\beta+180°-\alpha=180°$
Ponadto $|\sphericalangle ABD|=|\sphericalangle BDC|$ jako kąty naprzemianległe, więc $2\beta=\alpha$, czyli $\alpha=60°$, $\beta=30°$.
Z trójkąta ABD $\sin\alpha=\frac{d}{2r}$, stąd $d=r\sqrt{3}$.

Zadanie 7. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4\cos 2x\cos 5x=2\cos 7x+1$.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i zapisanie poprawnego wyniku: $\frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}, -\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$
3 pkt – poprawne rozwiązanie jednego z równań: $\sin 3x=0$ lub $1-2\cos 3x=0$
2 pkt – przekształcenie równania do postaci $\sin 3x=2\sin 3x\cos 3x$
1 pkt – poprawne zastosowanie wzorów na sinus sumy kątów i sinus różnicy kątów
ALBO
– poprawne zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

$\sin\left(\frac{\pi}{3}+3x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)=\sin 6x$

Stosujemy wzory na sinus sumy i sinus różnicy kątów oraz sinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie równoważnie, otrzymując:

$2\cos\frac{\pi}{3}\sin 3x=2\sin 3x\cos 3x$
$\sin 3x=2\sin 3x\cos 3x$
$\sin 3x(1-2\cos 3x)=0$
$\sin 3x=0$ lub $1-2\cos 3x=0$
$x=\frac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$ $\quad x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$ lub $x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

Zadanie 8. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; XIII.R4) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji.

Zasady oceniania

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $x=6$ i obliczenie wartości najmniejszej funkcji f, $f(6)=16$

3 pkt – określenie znaku pochodnej oraz uzasadnienie (np. przez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $x=6$

2 pkt – poprawne obliczenie miejsc zerowych pochodnej

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=\dfrac{2x^2-16x+24}{(x-4)^2}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Uwagi:

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja ma wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości x, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej, oraz:
– opisuje (słownie lub graficznie, np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji f
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja f ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja f ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „–”, znak pochodnej.

3. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, że dla $x=6$ funkcja f osiąga najmniejszą wartość, i obliczy $f(6)=16$, to otrzymuje 3 punkty za całe rozwiązanie. Jeśli zdający nie przedstawi żadnego uzasadnienia i obliczy $f(6)=16$, to otrzymuje co najwyżej 2 punkty za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

$f(x)=\dfrac{2x^2-8x+8}{x-4}$, gdzie $x\neq 4$

$$f'(x)=\frac{(4x-8)(x-4)-\left(2x^2-8x+8\right)}{(x-4)^2}=\frac{2x^2-16x+24}{(x-4)^2}$$

$f'(x)=0$ dla $x=2$ lub $x=6$

Badamy znak pochodnej funkcji dla $x\in[5,10]$:

$f'(x)>0$ dla $x\in(6,\ 10]$

$f'(x)<0$ dla $x\in[5,\ 6)$

Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale [5, 6] oraz jest rosnąca w przedziale [6, 10].
Stąd dla $x=6$ funkcja f osiąga wartość najmniejszą równą $f(6)=16$.

Zadanie 9. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: XIII.R2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu).

Zasady oceniania

5 pkt – wyznaczenie równania stycznej, zapisanie poprawnego wyniku: $y=-3(x+2)-2\frac{1}{3}$

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktu styczności takiego, że $x_0<-1$, poprawny wynik: $\left(-2,\ -2\frac{1}{3}\right)$

3 pkt – rozwiązanie równania: $6x_0^3+17x_0^2+11x_0-1=-3$

2 pkt – zapisanie warunku: $f'(x_0)=-3$ w postaci równania z niewiadomą x_0, np.:

$6x_0^3+17x_0^2+11x_0-1=-3$

1 pkt – obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(x)=6x^3+17x^2+11x-1$

ALBO

– zapisanie warunku: $f'(x_0)=-3$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Styczna jest prostopadła do prostej o równaniu $y=\frac{1}{3}x+15$, gdy jej współczynnik kierunkowy jest równy (–3).
Obliczamy pochodną funkcji f:
$f'(x)=6x^3+17x^2+11x-1$

Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy wartości pierwszej pochodnej funkcji w punkcie styczności. Stąd $f'(x_0)=-3$. Wówczas:

$6x_0^3+17x_0^2+11x_0-1=-3$
$6x_0^3+17x_0^2+11x_0+2=0$
$(2x_0+1)(3x_0+1)(x_0+2)=0$

$x_0=-\frac{1}{2}$ lub $x_0=-\frac{1}{3}$, lub $x_0=-2$

Z warunków zadania $x_0<-1$, zatem $x_0=-2$.

$f(-2)=-2\frac{1}{3}$

Równanie stycznej do funkcji f w punkcie $\left(-2,\ -2\frac{1}{3}\right)$ prostopadłej do prostej o równaniu $y=\frac{1}{3}x+15$ ma postać: $y=-3(x+2)-2\frac{1}{3}$, czyli $y=-3x-8\frac{1}{3}$.

Zadanie 10. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.3) stosuje twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = 12 \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$; VII.4) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty m.in. z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów); VII.R7) stosuje twierdzenie sinusów; VII.R8) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (m.in. z wykorzystaniem twierdzenia sinusów); VIII.7) stosuje twierdzenia: Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą; VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania

5 pkt – zapisanie długości promieni okręgu opisanego na trójkącie ABC oraz okręgu opisanego na trójkącie ACD

4 pkt – wyznaczenie promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC, poprawny wynik: $\frac{112}{\sqrt{55}}$

ALBO

– wyznaczenie promienia okręgu opisanego na trójkącie ACD, poprawny wynik: $\frac{168}{\sqrt{255}}$

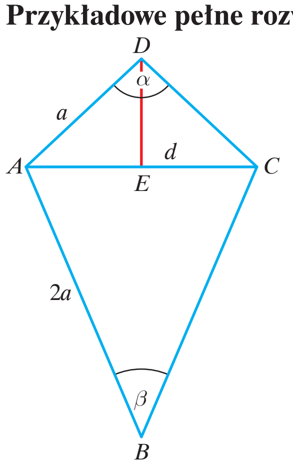
3 pkt – wyznaczenie długości przekątnej $|AC|$: $|AC| = 21$

2 pkt – wyznaczenie długości wszystkich boków czworokąta $ABCD$:
$|AD| = 12,\ |AB| = 24,\ |BC| = 30,\ |CD| = 18$

1 pkt – wyznaczenie długości boku CD w zależności od a: $|CD| = \frac{3}{2}a$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie



Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku:
$|AD| = a,\ |AB| = 2a,\ |AC| = d$

$|\sphericalangle ADC| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ABC| = \beta$

Z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta: $\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|AD|}{|CD|}$, stąd $\frac{2}{3} = \frac{a}{|CD|}$, więc $|CD| = \frac{3}{2}a$.

Z twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt otrzymujemy warunek: $a + |BC| = 2a + \frac{3}{2}a$.
Stąd $|BC| = \frac{5}{2}a$.
Obwód czworokąta wynosi 84, więc $a = 12$. Boki czworokąta mają długości:
$|AD| = 12,\ |AB| = 24,\ |BC| = 30,\ |CD| = 18$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ACD wyznaczamy długość przekątnej $|AC|$:

$$d^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cdot \frac{1}{16}$$
$$d = 21$$
R_1 – promień okręgu opisanego na trójkącie ACD
Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ACD wyznaczamy R_1:
$$\frac{d}{\sin\alpha} = 2R_1$$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, stąd $\sin\alpha = \frac{\sqrt{255}}{16}$
Zatem $R_1 = \frac{168}{\sqrt{255}}$.
Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC:
$$21^2 = 24^2 + 30^2 - 2 \cdot 24 \cdot 30 \cdot \cos\beta$$
$$\cos\beta = \frac{23}{32}$$
Z jedynki trygonometrycznej: $\sin\beta = \frac{3\sqrt{55}}{32}$
R_2 – promień okręgu opisanego na trójkącie ABC
Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABC wyznaczamy R_2:
$$\frac{d}{\sin\beta} = 2R_2$$
Zatem $R_2 = \frac{112}{\sqrt{55}}$.

Zadanie 11. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VI.6) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zasady oceniania

5 pkt – poprawne wyznaczenie wyrazów ciągu arytmetycznego: $(2,\ 8,\ 14,\ 20)$
4 pkt – poprawne wyznaczenie pierwszego wyrazu a oraz różnicy ciągu arytmetycznego r z uwzględnieniem warunków zadania: $a > 0$ oraz $r > 0$
3 pkt – wyrażenie jednego z wyrazów ciągu (np. pierwszego wyrazu) za pomocą różnicy ciągu, np.: $a = -r$ lub $a = \frac{1}{3}r$
2 pkt – zastosowanie wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisanie równania, np.: $(a + a + 2r)^2 + (a + r - a - 3r)^2 = (a + 3r)^2$

1 pkt – zapisanie równania: $(a+c)^2+(b-d)^2=d^2$
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie
Ciąg $(a,\ b,\ c,\ d)$ – rosnący ciąg arytmetyczny o wyrazach dodatnich

Oznaczmy różnicę ciągu arytmetycznego przez r. Ciąg jest rosnący, więc $r > 0$, wyrazy dodatnie, więc $a > 0$.
Z treści zadania otrzymujemy:
$(a+c)^2+(b-d)^2=d^2$
Wyrazimy a za pomocą r:
$(a+a+2r)^2+(a+r-a-3r)^2=(a+3r)^2$
$3a^2+2ar-r^2=0$
$a_1=-r<0$ nie spełnia warunku zadania lub $a_2=\frac{1}{3}r$
Ciąg $(a,\ b,\ c,\ d)$ można zapisać w postaci: $\left(\frac{1}{3}r,\ \frac{4}{3}r,\ \frac{7}{3}r,\ \frac{10}{3}r\right)$
Z warunków zadania wynika, że ciąg $(3a+30, 3b,\ c+2)$ jest geometryczny, zatem wyrazy ciągu geometrycznego za pomocą r można zapisać w następujący sposób: $\left(r+30,\ 4r,\ \frac{7}{3}r+2\right)$. Spełniają one warunek:
$16r^2=(r+30)\left(\frac{7}{3}r+2\right)$
$41r^2-216r-180=0$
$r_1=\frac{-30}{41}<0$ nie spełnia warunku zadania lub $r_2=6$
Zatem: $r=6$
Otrzymaliśmy ciąg arytmetyczny: (2, 8, 14, 20)

Zadanie 12. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète’a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.
Etap I polega na rozwiązaniu dwóch warunków: $\Delta>0$ oraz $x_1x_2>0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.
2 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta>0$: $m\in(-\infty,-6)\cup(2,+\infty)$ oraz poprawne rozwiązanie nierówności $x_1x_2>0$: $m\in(-\infty,\ 3)$

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty,\ -6) \cup (2,\ +\infty)$

ALBO

– poprawne rozwiązanie nierówności $x_1x_2 > 0$: $m \in (-\infty,\ 3)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **1 punkt**, o ile poprawnie rozwiązał warunek $x_1x_2 > 0$.

Etap II polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > \frac{-2}{m+3}$, gdzie $m \neq -3$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności z niewiadomą m:

$$m \in \left(-\infty,\ \frac{-7-\sqrt{97}}{2}\right) \cup (-3,\ 0) \cup \left(\frac{-7+\sqrt{97}}{2},\ +\infty\right)$$

2 pkt – przekształcenie nierówności z niewiadomą m do nierówności równoważnej w postaci wielomianu, np.: $(m^3 + 7m^2 - 12m)(m+3) > 0$

1 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m, wynikającej z warunku $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > \frac{-2}{m+3}$, gdzie $m \neq -3$, np.: $\frac{m^2 + 2m - 6}{(3-m)^2} > \frac{-2}{m+3}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Etap III polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie wszystkie warunki zadania. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru spełniających warunki zadania:

$$m \in \left(-\infty,\ \frac{-7-\sqrt{97}}{2}\right) \cup (2,\ 3)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Uwagi:

1. Jeżeli zdający popełni w etapie I i/lub II jedynie błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań z etapów I i II, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I i II, to za etap III otrzymuje **1 punkt**.

2. Jeżeli zdający w etapie II rozwiązania popełni błąd i przyjmie, że $(x_1x_2) = -(3-m)$, to za etap II może otrzymać co najwyżej **2 punkty**, a za etap III otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Etap I

Trójmian kwadratowy $x^2 + mx + 3 - m$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 o tych samych znakach wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki: $\Delta > 0$ oraz $x_1x_2 > 0$.

Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$m^2 - 4(3-m) > 0$

$(m+6)(m-2) > 0$

$m \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$

Rozwiązujemy warunek $x_1x_2 > 0$:

$3 - m > 0$

$m \in (-\infty, 3)$

Etap II

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>\frac{-2}{m+3}$, gdzie $m\neq -3$, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{m^2+2m-6}{(3-m)^2}$$

$$\frac{m^2+2m-6}{(3-m)^2}>\frac{-2}{m+3},\ \text{gdzie } m\neq -3 \text{ i } m\neq 3$$

$$\frac{m^3+7m^2-12m}{(3-m)^2(m+3)}>0$$

$$(m^3+7m^2-12m)(m+3)>0$$

$$m\in\left(-\infty,\ \frac{-7-\sqrt{97}}{2}\right)\cup(-3,\ 0)\cup\left(\frac{-7+\sqrt{97}}{2},\ 3\right)\cup(3,\ +\infty)$$

Etap III

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru, które jednocześnie spełniają warunki:

$m\in(-\infty,\ -6)\cup(2,\ +\infty)$, $m\in(-\infty,\ 3)$, $m\neq -3$ i $m\neq 3$ oraz

$$m\in\left(-\infty,\ \frac{-7-\sqrt{97}}{2}\right)\cup(-3,\ 0)\cup\left(\frac{-7+\sqrt{97}}{2},\ +\infty\right)$$

Zatem $m\in\left(-\infty,\ \frac{-7-\sqrt{97}}{2}\right)\cup(2,\ 3)$.

Zadanie 13.1. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: IX. 5) oblicza odległość punktu od prostej.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i zapisanie poprawnego wyniku: $D\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ lub $D\left(-\frac{27}{2},\ \frac{7}{2}\right)$

1 pkt – wykorzystanie wzoru na odległość punktu D od prostej l i zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.: $\frac{\left|3x-\frac{1}{3}x-1+17\right|}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Punkt D leży na prostej k, więc współrzędne punktu D można zapisać w postaci: $D=\left(x,\ -\frac{1}{3}x-1\right)$.

Odległość punktu D od prostej l o równaniu ogólnym: $3x+y+17=0$ jest równa $2\sqrt{10}$. Korzystając ze wzoru na odległość punktu od prostej, otrzymujemy równanie:

$$\frac{\left|3x-\frac{1}{3}x-1+17\right|}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$$

$$\left|\frac{8}{3}x+16\right|=20$$

$x=\frac{3}{2}$ lub $x=-\frac{27}{2}$

Zatem punkt D ma współrzędne: $D\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ lub $D\left(-\frac{27}{2},\ \frac{7}{2}\right)$

Zadanie 13.2. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu); IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie promienia oraz zapisanie równania okręgu: $(x+1)^2+(y+4)^2=10$

3 pkt – wyznaczenie środka okręgu stycznego do prostej k w punkcie A oraz do prostej l w punkcie B, poprawny wynik: $S=(-1,\ -4)$

2 pkt – zapisanie równania prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A: $y=3x-1$ oraz zapisanie równania prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt B: $y=\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}$

1 pkt – zapisanie równania prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A: $y=3x-1$

ALBO

– zapisanie równania prostej prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt B: $y=\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykładowe pełne rozwiązanie

Równanie prostej k_1 prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A ma postać:

$y=3x-1$

Równanie prostej l_1 prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt B ma postać:

$y=\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}$

Środek szukanego okręgu należy jednocześnie do prostych k_1 oraz l_1.

Współrzędne środka okręgu otrzymujemy, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y=3x-1 \\ y=\frac{1}{3}x-\frac{11}{3} \end{cases}$$

Stąd $S(-1,\ -4)$.

Promień okręgu: $r=|SA|=\sqrt{(0+1)^2+(-1+4)^2}=\sqrt{10}$

Zatem równanie okręgu ma postać: $(x+1)^2+(y+4)^2=10$