

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
POZIOM ROZSZERZONY

Próbna Matura z Operonem 2023/2024

TERMIN: 22 listopada 2023 r.

Czas pracy: 180 minut

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: 50

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

dostosowania zasad oceniania

dostosowania w zw. z dyskalkulią.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 19 stron (zadania 1.–13.). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

1.

0-1-2

Zadanie 1. (0-2)

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\log_5 7 \cdot \log_{49} 625}{\log_3 \sqrt[3]{2} - 2\log_3 \sqrt[6]{54}}$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 2. (0–2)

Dana jest funkcja kwadratowa f . Miejsca zerowe tej funkcji spełniają warunek $x_1 + x_2 = 8$. Wiadomo, że $f(0) > 0$ oraz funkcja f w przedziale $[0, 6]$ przyjmuje wartość najmniejszą równą (-5) i wartość największą równą 27 .

Podaj wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Zapisz obliczenia.



2.
0–1–2

3.

0-1-2

Zadanie 3. (0-2)

Oblicz granicę ciągu $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 + 11 + 16 + \dots + (5n + 1)}{7n^2 - 4}$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 4. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 1$ oraz dla każdej liczby rzeczywistej $y \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność $4x^3y^2 - 4y^2 - 12x^3y + 12y + 9x^3 - 8 > 0$.

4.

0–1–
2–3



5.

0-1-
2-3

Zadanie 5. (0–3)

Rozwiąż algebraicznie nierówność $x + 5 > 3|x - 1|$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 6. (0–3)

Na trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym trzy boki mają taką samą długość, opisano okrąg o promieniu r . Dłuższa podstawa trapezu ma długość $2r$.

Udowodnij, że przekątna trapezu ma długość $r\sqrt{3}$.

6.

0–1–

2–3



7.

0-1-
2-3-4

Zadanie 7. (0-4)

Rozwiąż równanie $\sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = \sin 6x$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 8. (0–4)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x - 4}$, gdzie $x \neq 4$.

Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $[5, 10]$. Zapisz obliczenia.



8.
0-1-
2-3-4

Zadanie 9. (0–5)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{3}{2}x^4 + \frac{17}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - x - 5$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Wyznacz równanie tej stycznej do wykresu funkcji f , która jest prostopadła do prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x + 15$, a współrzędna odcięta x_0 punktu styczności jest mniejsza od (-1) . Zapisz obliczenia.

9.

0–1–

2–3–

4–5



Zadanie 10. (0–5)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $|AD| = a$, $|AB| = 2a$. Dwusieczna kąta ADC przecięła prostą AC w punkcie E takim, że $\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{2}{3}$. Obwód czworokąta $ABCD$ wynosi 84.

W czworokąt można wpisać okrąg. Ponadto $\cos \sphericalangle ADC = \frac{1}{16}$.

Oblicz promienie okręgów opisanych na trójkącie ACD oraz na trójkącie ABC .



10.

0–1–

2–3–

4–5



12.

0-1-
2-3-
4-5-6

Zadanie 12. (0-6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + mx + 3 - m = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 o tych samych znakach, spełniające warunek

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > \frac{-2}{m+3}, \text{ gdzie } m \neq -3. \text{ Zapisz obliczenia.}$$





Zadanie 13.

Dana jest prosta k o równaniu $y = -\frac{1}{3}x - 1$ i punkt $A(0, -1)$ leżący na prostej k oraz prosta l o równaniu $y = -3x - 17$ i punkt $B(-4, -5)$ należący do prostej l .

Zadanie 13.1. (0–2)

13.1.

0–1–2

Wyznacz współrzędne punktu D należącego do prostej k , którego odległość od prostej l jest równa $2\sqrt{10}$.



Zadanie 13.2. (0–4)

Napisz równanie okręgu, który jest styczny do prostej k w punkcie A oraz do prostej l w punkcie B . Zapisz obliczenia.

13.2.

0–1–
2–3–4



BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)



BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



ISBN 978-83-8197-426-4



9 788381 974264