

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	<b>Zasady oceniania rozwiązań zadań</b>
<i>Egzamin:</i>	<b>Egzamin maturalny</b> Arkusz pokazowy
<i>Przedmiot:</i>	<b>Matematyka</b>
<i>Poziom:</i>	<b>Poziom rozszerzony</b>
<i>Formy arkusza:</i>	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-660, MMAP-R0-700, MMAP-R0-Q00
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	4 marca 2022 r.

**Uwaga:** Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

### Zadanie 1. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024 <sup>1</sup>	
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.</p> <p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;</p> <p>I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.</p> <p>I.1) (R) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.</p>

#### Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie ciągu poprawnych przekształceń i wyrażenie  $\log_4 49$  za pomocą danych liczb  $a$  oraz  $b$ :  $\log_4 49 = a \cdot b$ .

2 pkt – zastosowanie do  $\log_3 4$  wzoru na zamianę podstawy logarytmu i przekształcenie  $\log_3 4$  do postaci  $\log_3 4 = \frac{2}{\log_2 3}$ .

1 pkt – zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu i zapisanie  $\log_4 49$  za pomocą logarytmów o podstawie 3 z liczb naturalnych, np.  $\log_4 49 = \frac{\log_3 49}{\log_3 4}$ ,

$$\log_4 49 = 2 \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 4}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy  $\log_4 49$ , stosując wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu, i otrzymujemy

<sup>1</sup> Komunikat o wymaganiach egzaminacyjnych obowiązujących w roku 2023 i 2024, <https://www.gov.pl/web/edukacja-i-nauka/wymagania-egzaminacyjne-obowiazujace-na-egzaminie-maturalnym-w-roku-2023-i-2024>

$$\log_4 49 = 2 \cdot \log_4 7 = 2 \cdot \frac{\log_3 7}{\log_3 4} = 2 \cdot \frac{\log_3 7}{\frac{\log_2 4}{\log_2 3}} = 2 \cdot \log_3 7 \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = 2 \cdot \log_3 7 \cdot \frac{\log_2 3}{2}$$

Zatem

$$\log_4 49 = 2 \cdot b \cdot \frac{a}{2} = a \cdot b$$

Odp.  $\log_4 49 = a \cdot b$ .

### Zadanie 2. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.2) (R) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.3) (R) oblicza pochodną funkcji o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.

#### Zasady oceniania

3 pkt – poprawna metoda wyznaczenia równania stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie

$$P = (-3, -3) \text{ i podanie prawidłowego wyniku: } y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}.$$

2 pkt – podanie poprawnej interpretacji liczby  $f'(-3)$  jako współczynnika kierunkowego

$$\text{stycznej i obliczenie } f'(-3): f'(-3) = \frac{3}{4}.$$

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji  $f: f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$  dla każdego  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji  $f$ :

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

dla każdego  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Obliczamy współczynnik kierunkowy szukanej stycznej:

$$f'(-3) = \frac{(-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 3}{(-3-1)^2} = \frac{9 + 6 - 3}{16} = \frac{3}{4}$$

Zatem równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $P = (-3, -3)$  ma postać:

$$y = \frac{3}{4}x + b$$

Obliczamy współczynnik  $b$ . Ponieważ punkt  $P$  leży na prostej stycznej, więc

$$-3 = \frac{3}{4} \cdot (-3) + b. \text{ Stąd } b = -\frac{3}{4}.$$

Równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $P = (-3, -3)$  ma postać  $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$ .

**Zadanie 3. (0–4)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. VI.2) (R) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

**Zasady oceniania**

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia ilorazu ciągu i poprawna metoda rozwiązania

nierówności  $\left| \frac{S-S_n}{S_n} \right| < 0,001$  w zbiorze liczb naturalnych dodatnich oraz poprawny wynik:  $n > 9$ .

3 pkt – zapisanie, że  $1 - q^n > 0$  (albo  $0 < 1 - q^n < 1$ ) i przekształcenie nierówności

$\left| \frac{S-S_n}{S_n} \right| < 0,001$  do postaci nierówności wymiernej z niewiadomą  $t$  ( $t = q^n$ ), np.

$$\frac{t}{1-t} < 0,001, \frac{q^n}{1-q^n} < 0,001$$

LUB

przekształcenie nierówności  $\left| \frac{S-S_n}{S_n} \right| < 0,001$  do koniunkcji dwóch nierówności

wymiernych z niewiadomą  $t$  ( $t = q^n$ ), np.  $\frac{t}{1-t} > -0,001$  i

$\frac{t}{1-t} < 0,001$  (albo:  $\frac{q^n}{1-q^n} < 0,001$  i  $\frac{q^n}{1-q^n} > -0,001$ ), i zapisanie, że nierówność

$\frac{t}{1-t} > -0,001$  jest spełniona dla każdej liczby  $t \in (0, 1)$  (analogicznie: zapisanie,

że nierówność  $\frac{q^n}{1-q^n} > -0,001$  jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej dodatniej  $n$ ).

2 pkt – obliczenie ilorazu  $q$  ciągu  $(a_n)$ :  $q = \frac{1}{2}$ .

1 pkt – skorzystanie ze wzorów na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego oraz sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i zapisanie równania

$$a_1 + a_2 + a_3 = S \cdot (1 - q^3)$$

LUB

zapisanie dwóch równań z niewiadomymi  $a_1$  oraz  $q$ , wynikających z treści zadania,

$$\text{np. } a_1 \cdot (1 + q + q^2) = 7 \text{ i } 8 = \frac{a_1}{1-q}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)$  istnieje i jest różna od zera, więc  $a_1 \neq 0$  i iloraz  $q$  tego ciągu spełnia warunek  $|q| < 1$ .

Korzystamy ze wzorów na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego oraz na sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i obliczamy iloraz  $q$  ciągu  $(a_n)$ :

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 \cdot \frac{1 - q^3}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \cdot (1 - q^3) = S \cdot (1 - q^3)$$

$$7 = 8(1 - q^3)$$

$$q = \frac{1}{2}$$

Zatem  $S = a_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2a_1$  i  $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2a_1 \cdot [1 - (\frac{1}{2})^n]$ . Stąd, wobec  $a_1 \neq 0$ ,

otrzymujemy  $\frac{S - S_n}{S_n} = \frac{2a_1 - 2a_1 \cdot [1 - (\frac{1}{2})^n]}{2a_1 \cdot [1 - (\frac{1}{2})^n]} = \frac{2a_1 \cdot (\frac{1}{2})^n}{2a_1 \cdot [1 - (\frac{1}{2})^n]} = \frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^n}$ .

Rozwiązujemy nierówność  $|\frac{S - S_n}{S_n}| < 0,001$  w zbiorze liczb całkowitych dodatnich:

$$\left| \frac{S - S_n}{S_n} \right| < 0,001$$

$$\left| \frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^n} \right| < 0,001$$

Ponieważ  $q = \frac{1}{2} \in (0, 1)$ , więc  $1 - (\frac{1}{2})^n > 0$ . Zatem nierówność  $\left| \frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^n} \right| < 0,001$

możemy przekształcić do postaci  $\frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^n} < 0,001$ . Stąd otrzymujemy dalej

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,001 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \quad / \cdot 2^n$$

$$1 < 0,001(2^n - 1)$$

$$2^n > 1001$$

Ponieważ  $2^9 = 512$  i  $2^{10} = 1024$ , więc  $n > 9$ .

Rozwiązaniem nierówności  $|\frac{S - S_n}{S_n}| < 0,001$  w zbiorze liczb całkowitych dodatnich są wszystkie liczby naturalne większe od 9.

**Zadanie 4. (0–5)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania [...].	Zdający: III.3) (R) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.5) (R) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żadaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

**Zasady oceniania**

5 pkt – wyznaczenie części wspólnej rozwiązań warunków (W1)–(W5) i podanie poprawnego

$$\text{wyniku: } m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty).$$

4 pkt – zapisanie, że dla  $m = 2$  warunki zadania nie są spełnione oraz rozwiązanie warunków (W1)–(W5):

$$(W1) \quad m \neq 2$$

$$(W2) \quad m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (-2, +\infty)$$

$$(W3) \quad m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

$$(W4) \quad m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

$$(W5) \quad m \neq 11.$$

3 pkt – rozwiązanie warunków (W2)–(W4):

$$(W2) \quad m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (-2, +\infty)$$

$$(W3) \quad m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

$$(W4) \quad m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty).$$

2 pkt – zapisanie, że dla  $m = 2$  warunki zadania nie są spełnione oraz zapisanie warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby równanie (2) było równaniem kwadratowym, które ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste dodatnie różne od liczby 6:  $m - 2 \neq 0$  i  $\Delta > 0$  i  $x_1 \cdot x_2 > 0$  i  $x_1 + x_2 > 0$  i  $(m - 2) \cdot 6^2 - 4 \cdot (m + 3) \cdot 6 + m + 1 \neq 0$   
**LUB**

zapisanie, że dla  $m = 2$  warunki zadania nie są spełnione oraz zapisanie warunków

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \text{ i } x_1 + x_2 > 0 \text{ w zależności od parametru } m: \frac{m+1}{m-2} > 0$$

$$\text{i } -\frac{4(m+3)}{m-2} > 0$$

**LUB**

zapisanie, że dla  $m = 2$  warunki zadania nie są spełnione oraz wyznaczenie tych wszystkich wartości parametru  $m$ , dla których wyróżnik  $\Delta$  trójmianu

$$(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1 = 0 \text{ jest dodatni.}$$

1 pkt – zapisanie, że równanie (1) ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku tylko wtedy, gdy równanie (2) ma dwa różne rozwiązania dodatnie różne od liczby 6.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że jednym z rozwiązań równania

$$(x - 6) \cdot [(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1] = 0 \quad (1)$$

jest liczba 6. Zatem równanie (1) ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku wtedy i tylko wtedy, gdy równanie

$$(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1 = 0 \quad (2)$$

ma dokładnie dwa różne rozwiązania dodatnie  $x_1, x_2$  takie, że  $x_1 \neq 6$  i  $x_2 \neq 6$ .

Dla  $m = 2$  równanie (2) przyjmuje postać  $-20x + 3 = 0$  i ma tylko jedno rozwiązanie.

Pozostaje wyznaczyć te wartości parametru  $m$ , dla których warunki zadania są spełnione, a równanie (2) jest kwadratowe, tj. wyznaczyć te wartości parametru, dla których spełnione są jednocześnie następujące warunki:

$$(W1) \quad m - 2 \neq 0$$

$$(W2) \quad \Delta > 0$$

$$(W3) \quad x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$(W4) \quad x_1 + x_2 > 0$$

$$(W5) \quad (m - 2) \cdot 6^2 - 4 \cdot (m + 3) \cdot 6 + m + 1 \neq 0$$

Rozwiązaniem warunku (W1) jest  $m \neq 2$ .

Rozwiązujemy nierówność  $\Delta > 0$ :

$$[-4(m + 3)]^2 - 4 \cdot (m - 2) \cdot (m + 1) > 0$$

$$16m^2 + 96m + 144 - 4m^2 + 4m + 8 = 0$$

$$12m^2 + 100m + 152 > 0$$

$$m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (-2, +\infty)$$

Korzystając ze wzorów Viète'a, rozwiązujemy warunek (W3):

$$x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$\frac{m + 1}{m - 2} > 0$$

$$(m + 1)(m - 2) > 0 \wedge m \neq 2$$

$$m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

Korzystając ze wzorów Viète'a, rozwiązujemy warunek (W4):

$$x_1 + x_2 > 0$$

$$-\frac{-4(m+3)}{m-2} > 0$$

$$(m+3)(m-2) > 0 \wedge m \neq 2$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

Rozwiązujemy warunek (W5):

$$(m-2) \cdot 6^2 - 4 \cdot (m+3) \cdot 6 + m + 1 \neq 0$$

$$13m - 143 \neq 0$$

$$m \neq 11$$

Wyznaczamy część wspólną rozwiązań warunków (W1)–(W5) i otrzymujemy

$$m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty).$$

Równanie (1) ma trzy różne rozwiązania tego samego znaku dla

$$m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty).$$

### Zadanie 5. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: I.2) (R) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

### Zasady oceniania

#### dla sposobu 1.

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia  $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$  do postaci  $3a(a^2 + 2)$ , gdzie  $a$  jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4, i wykazanie, że liczba  $3a(a^2 + 2)$  jest podzielna przez 4

LUB

przekształcenie wyrażenia  $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$  do postaci  $3a(a^2 + 2)$ , gdzie  $a$  jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4, i wykazanie, że liczba  $3a(a^2 + 2)$  jest podzielna przez 9.

1 pkt – zapisanie sumy sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 w postaci  $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$ , gdzie  $a$  jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### dla sposobu 2.

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

2 pkt – przekształcenie wyrażenia  $(4k + 1)^3 + (4k + 2)^3 + (4k + 3)^3$  do postaci  $36 \cdot P(k) + 12 \cdot Q(k)$ , gdzie  $P$  i  $Q$  są wielomianami o współczynnikach całkowitych, np.  $12(16k^3 + 24k^2 + 14k + 3)$ ,  $36(5k^3 + 8k^2 + 4k + 1) + 12k(k^2 + 2)$ .

1 pkt – zapisanie sumy sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 w postaci  $(4k + 1)^3 + (4k + 2)^3 + (4k + 3)^3$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób 1.

Sumę sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 można zapisać w postaci  $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$ , gdzie  $a$  jest liczbą parzystą niepodzielną przez 4.

Ponieważ

$$(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 3a(a^2 + 2),$$

więc liczba  $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3$  jest podzielna przez 4 jako iloczyn liczby parzystej  $3a$  i liczby parzystej  $a^2 + 2$ .

Jeżeli  $a = 3k$ , przy pewnym  $k \in \mathbb{Z}$ , to  $3a(a^2 + 2) = 9k(9k^2 + 2)$  jest liczbą podzielną przez 9.

Jeżeli  $a = 3k + 1$ , przy pewnym  $k \in \mathbb{Z}$ , to  $3a(a^2 + 2) = 3(3k + 1)[(3k + 1)^2 + 2] =$   
 $= 3(3k + 1)(9k^2 + 6k + 3) = 9(3k + 1)(3k^2 + 2k + 1)$  jest liczbą podzielną przez 9.

Jeżeli  $a = 3k + 2$ , przy pewnym  $k \in \mathbb{Z}$ , to liczba  $3a(a^2 + 2) =$   
 $= 3(3k + 2)[(3k + 2)^2 + 2] = 3(3k + 2)(9k^2 + 12k + 6) = 9(3k + 2)(3k^2 + 4k + 2)$   
 jest liczbą podzielną przez 9.

Zatem suma sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest podzielna przez 9.

Ponieważ suma trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 4 i przez 9 oraz liczby 4 i 9 są względnie pierwsze, więc ta suma jest liczbą podzielną przez 36.

### Sposób 2.

Sumę sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 można zapisać w postaci  $(4k + 1)^3 + (4k + 2)^3 + (4k + 3)^3$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

Ponieważ  $(4k + 1)^3 + (4k + 2)^3 + (4k + 3)^3 =$   
 $= 64k^3 + 48k^2 + 12k + 1 + 64k^3 + 96k^2 + 48k + 8 + 64k^3 + 144k^2 + 108k + 27 =$   
 $= 192k^3 + 288k^2 + 168k + 36 = 12(16k^3 + 24k^2 + 14k + 3) =$   
 $= 36(5k^3 + 8k^2 + 4k + 1) + 12k(k^2 + 2)$ , więc wystarczy pokazać, że liczba  $k(k^2 + 2)$   
 jest podzielna przez 3 dla każdego  $k \in \mathbb{Z}$ .

Jeżeli  $k = 3m$ , gdzie  $m \in \mathbb{Z}$ , to liczba  $k(k^2 + 2) = 3m(9m^2 + 2)$  jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej  $m(9m^2 + 2)$ .

Jeżeli  $k = 3m + 1$ , gdzie  $m \in \mathbb{Z}$ , to liczba  $k(k^2 + 2) = (3m + 1)[(3m + 1)^2 + 2] =$   
 $= (3m + 1)(9m^2 + 6m + 3) = 3(3m + 1)(3m^2 + 2m + 1)$  jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej  $(3m + 1)(3m^2 + 2m + 1)$ .

Jeżeli  $k = 3m + 2$ , gdzie  $m \in \mathbb{Z}$ , to liczba  $k(k^2 + 2) = (3m + 2)[(3m + 2)^2 + 2] =$   
 $(3m + 2)(9m^2 + 12m + 6) = 3(3m + 2)(3m^2 + 4m + 2)$  jest podzielna przez 3 jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej  $(3m + 2)(3m^2 + 4m + 2)$ .

**Zadanie 6.1. (0–2)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych; 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$ , $(a - b)^2$ , $a^2 - b^2$ . IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.

**Zasady oceniania**

2 pkt – doprowadzenie wyrażenia określającego długość odcinka  $PR$  do postaci

$$\sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}.$$

1 pkt – przyjęcie  $R = (x, -0,5(x - 0,5)^2 + 4)$  (lub  $R = (x, g(x))$ ) i zastosowanie wzoru na odległość dwóch punktów do wyznaczenia długości odcinka  $PR$ :

$$|PR| = \sqrt{(x + 1)^2 + (-0,5(x - 0,5)^2 + 4 - 1)^2}$$

$$(\text{lub } |PR| = \sqrt{(x + 1)^2 + (g(x) - 1)^2}).$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Ponieważ  $R \in g$ , więc  $R = (x, -0,5(x - 0,5)^2 + 4)$ . Zatem

$$|PR| = \sqrt{(x - (-1))^2 + (-0,5(x - 0,5)^2 + 4 - 1)^2}$$

Stosując wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażen, otrzymujemy

$$|PR| = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + (-0,5(x - 0,5)^2)^2 + 2 \cdot (-0,5)(x - 0,5)^2 \cdot 3 + 9}$$

$$|PR| = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - 3\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 9}$$

$$|PR| = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{4}\left(x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) - 3x^2 + 3x - \frac{3}{4} + 9}$$

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

To należało pokazać.

### Zadanie 6.2. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.3) (R) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym [...]; XIII.4) (R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.5) (R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

### Zasady oceniania

6 pkt – uzasadnienie, że punkt  $K$  musi należeć do wykresu funkcji  $g$  i poprawne uzasadnienie, że funkcja  $d$  przyjmuje wartość największą dla argumentu  $x = \frac{3}{2}$ , obliczenie współrzędnych punktu  $K$  oraz długości  $|PK|$  toru:  $K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ,

$$|PK| = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

5 pkt – uzasadnienie, że punkt  $K$  musi należeć do wykresu funkcji  $g$  i uzasadnienie, że funkcja  $k$  przyjmuje wartość największą dla argumentu  $x = \frac{3}{2}$

LUB

poprawne uzasadnienie, że funkcja  $d$  przyjmuje wartość największą dla argumentu  $x = \frac{3}{2}$  oraz obliczenie  $g\left(\frac{3}{2}\right)$ , oraz obliczenie  $d\left(\frac{3}{2}\right)$ :  $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}$ ,  $d\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

4 pkt – uzasadnienie, że punkt  $K$  musi należeć do wykresu funkcji  $g$  i obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji  $k$ :  $x = \frac{3}{2}$

LUB

uzasadnienie, że funkcja  $k$  przyjmuje wartość największą dla argumentu  $x = \frac{3}{2}$ .

3 pkt – uzasadnienie, że punkt  $K$  musi należeć do wykresu funkcji  $g$  i wyznaczenie pochodnej funkcji  $k$ :  $k'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8}$  dla  $x \in \left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$

LUB

obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji  $k$ :  $x = \frac{3}{2}$ .

2 pkt – uzasadnienie, że punkt  $K$  musi należeć do wykresu funkcji  $g$  i określenie dziedziny

$$\text{funkcji } d: x \in \left[ \frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right]$$

LUB

wyznaczenie pochodnej funkcji  $k: k'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8}$  dla

$$x \in \left[ \frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right].$$

1 pkt – uzasadnienie, że punkt  $K$  musi należeć do wykresu funkcji  $g$

LUB

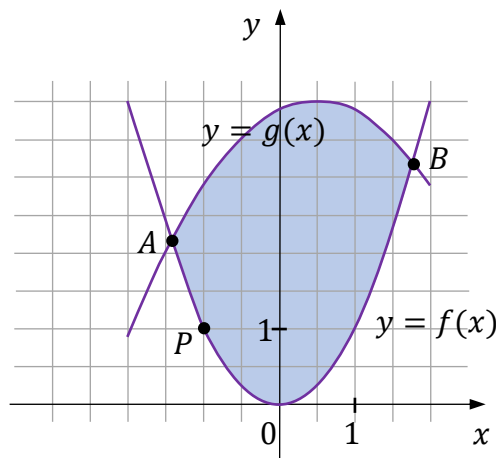
$$\text{określenie dziedziny funkcji } d: x \in \left[ \frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right].$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Pokażemy najpierw, że optymalna lokalizacja końca toru regatowego musi znajdować się na linii brzegowej określonej przez funkcję  $g$ .

Niech  $A = (x_A, y_A)$  i  $B = (x_B, y_B)$  będą punktami przecięcia wykresów funkcji  $f$  i  $g$  (zobacz rysunek).



Współrzędne każdego punktu  $C = (x_C, y_C)$  leżącego na fragmencie paraboli (będącej wykresem funkcji  $f$ ) pomiędzy punktami  $A$  i  $B$  spełniają nierówności

$$|x_C - x_P| \leq |x_B - x_P| \quad \wedge \quad |y_C - y_P| \leq |y_B - y_P|$$

więc

$$|x_C - x_P|^2 + |y_C - y_P|^2 \leq |x_B - x_P|^2 + |y_B - y_P|^2$$

$$|PC|^2 \leq |PB|^2$$

$$|PC| \leq |PB|$$

Ponieważ  $B \in g$ , więc optymalna lokalizacja końca toru musi znajdować się na linii brzegowej określonej przez funkcję  $g$ .

Obliczamy pierwsze współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji  $f$  i  $g$ :

$$x^2 = -0,5(x - 0,5)^2 + 4$$

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{31}{8} = 0$$

$$12x^2 - 4x - 31 = 0$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{94}}{6} \approx -1,45 \quad \vee \quad x = \frac{1 + \sqrt{94}}{6} \approx 1,78$$

Zatem  $x_A = \frac{1 - \sqrt{94}}{6}$  oraz  $x_B = \frac{1 + \sqrt{94}}{6}$ .

W celu wyznaczenia punktu, w którym należy umiejscowić koniec toru, rozpatrujemy funkcję  $d$  określoną wzorem

$$d(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

dla każdego  $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{94}}{6}, \frac{1 + \sqrt{94}}{6}\right]$  i szukamy argumentu, dla którego funkcja ta osiąga wartość największą.

Funkcja  $d$  określa odległość punktu  $P$  od punktu  $R$  (leżącego na linii brzegowej określonej przez funkcję  $g$ ) w zależności od pierwszej współrzędnej  $x$  punktu  $R$ .

Tworzymy funkcję pomocniczą  $k$  określoną wzorem

$$k(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64} \quad \text{dla } x \in \left[\frac{1 - \sqrt{94}}{6}, \frac{1 + \sqrt{94}}{6}\right].$$

Obliczamy pochodną funkcji  $k$ :

$$k'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8}$$

i miejsca zerowe pochodnej:

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x^2 + \frac{39}{8} = 0$$

$$8x^3 - 12x^2 - 26x + 39 = 0$$

$$4x^2(2x - 3) - 13(2x - 3) = 0$$

$$(4x^2 - 13)(2x - 3) = 0$$

$$x = -\frac{\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{3}{2}$$

Spośród liczb  $\left(-\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{3}{2}\right)$  tylko liczba  $\frac{3}{2}$  należy do przedziału  $\left[\frac{1 - \sqrt{94}}{6}, \frac{1 + \sqrt{94}}{6}\right]$ .

Zatem  $k'(x) = 0$  tylko dla  $x = \frac{3}{2}$ .

Ponieważ:

$$k'(x) > 0 \text{ dla } x \in \left[ \frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{3}{2} \right) \text{ oraz}$$

$$k'(x) < 0 \text{ dla } x \in \left( \frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right],$$

więc

funkcja  $k$  jest rosnąca w zbiorze  $\left[ \frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{3}{2} \right]$  oraz malejąca w zbiorze  $\left[ \frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{94}}{6} \right]$ .

Zatem funkcja  $k$  osiąga wartość największą dla argumentu  $x = \frac{3}{2}$ .

Ponieważ funkcja  $h(t) = \sqrt{t}$  jest rosnąca w zbiorze  $[0, +\infty)$ , więc funkcja  $d$  osiąga wartość największą dla tego samego argumentu, dla którego funkcja  $k$  osiąga wartość największą.

Stąd wynika, że funkcja  $d$  osiąga wartość największą dla argumentu  $x = \frac{3}{2}$ .

Obliczamy współrzędne punktu  $K$  oraz  $|PK|$ :

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -0,5\left(\frac{3}{2} - 0,5\right)^2 + 4 = 3,5$$

$$K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$|PK| = d\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 1\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Koniec toru regatowego należy zlokalizować w punkcie, który odpowiada punktowi

$K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ . Największa możliwa długość toru regatowego jest równa  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$  (j).

**Zadanie 7. (0–4)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.5 (R) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych; VII.6 (R) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$ .

**Zasady oceniania**

4 pkt – poprawne rozwiązanie równania  $\sin(3x) = 2 \sin x$  w zbiorze  $[0, \pi]$ :

$$x = 0 \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = \pi.$$

3 pkt – przekształcenie równoważne równania  $\sin(3x) = 2 \sin x$  do postaci alternatywy

równań  $\sin x = \frac{1}{2}$ ,  $\sin x = -\frac{1}{2}$  oraz  $\sin x = 0$  i zapisanie, że równanie

$\sin x = -\frac{1}{2}$  nie ma rozwiązań w zbiorze  $[0, \pi]$ , i rozwiązanie równania  $\sin x = \frac{1}{2}$

(lub  $\sin x = 0$ ) w zbiorze  $[0, \pi]$ :  $x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi$  (lub  $x = 0 \vee x = \pi$ ).

2 pkt – przekształcenie równoważne równania  $\sin(3x) = 2 \sin x$  do postaci alternatywy dwóch równań:  $1 - 4\sin^2 x = 0$  lub  $\sin x = 0$ .

1 pkt – przekształcenie równania  $\sin(3x) = 2 \sin x$  do postaci, w której występuje jedna funkcja trygonometryczna zmiennej  $x$ , np.

$$2 \sin x (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Przekształcamy równanie  $\sin(3x) = 2 \sin x$  równoważnie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna zmiennej  $x$ . Skorzystamy ze wzoru na sinus sumy kątów, wzorów na cosinus i sinus podwojonego kąta oraz z jedyńki trygonometrycznej:

$$\sin(3x) = 2 \sin x$$

$$\sin(2x + x) = 2 \sin x$$

$$\sin(2x) \cdot \cos x + \cos(2x) \cdot \sin x = 2 \sin x$$

$$2 \sin x \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x$$

$$2 \sin x (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x$$

$$-4 \sin^3 x + \sin x = 0$$

Stąd otrzymujemy dalej

$$(-4 \sin^2 x + 1) \sin x = 0$$

$$-4 \sin^2 x + 1 = 0 \quad \vee \quad \sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = 0$$

Równanie  $\sin x = \frac{1}{2}$  ma w zbiorze  $[0, \pi]$  dwa rozwiązania:  $x = \frac{1}{6}\pi$  oraz  $x = \frac{5}{6}\pi$ .

Równanie  $\sin x = -\frac{1}{2}$  nie ma w zbiorze  $[0, \pi]$  rozwiązań.

Równanie  $\sin x = 0$  ma w zbiorze  $[0, \pi]$  dwa rozwiązania:  $x = 0$  oraz  $x = \pi$ .

Równanie  $\sin(3x) = 2 \sin x$  ma w zbiorze  $[0, \pi]$  cztery rozwiązania:  $0, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \pi$ .

**Zadanie 8. (0–4)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.1) (R) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu; VIII.2) (R) przeprowadza dowody geometryczne.

**Zasady oceniania**

4 pkt – poprawne zastosowanie twierdzeń i zależności prowadzących do obliczenia promienia  $R$  okręgu opisanego na trapezie  $ABCD$  i pokazanie, że

$$R = \frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}.$$

3 pkt – zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta  $ABC$  i zapisanie równości  $2R = \frac{d}{\sin \alpha}$ .

2 pkt – obliczenie wysokości  $h$  trapezu  $ABCD$ :  $h = \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{4}$ .

1 pkt – zastosowanie własności czworokąta opisanego na okręgu i obliczenie  $c$ :  $c = \frac{1}{4}l$

LUB

zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do trójkąta  $AEC$  i zapisanie równości

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2 = d^2.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$a$  – długość podstawy  $AB$  trapezu,

$b$  – długość podstawy  $CD$  trapezu,

$h$  – wysokość trapezu  $ABCD$ ,

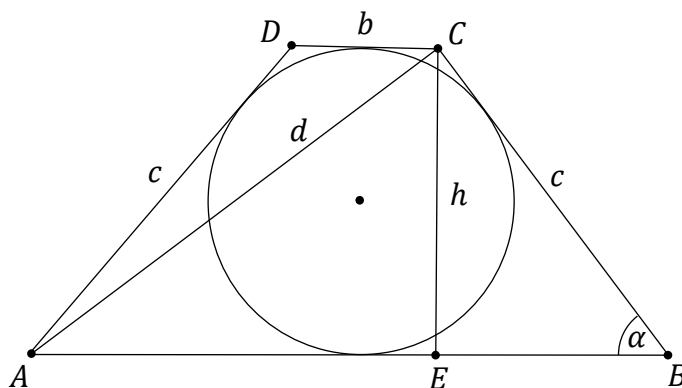
$c$  – długość ramienia trapezu  $ABCD$ ,

$\alpha$  – miara kąta  $ABC$  trapezu.

$E$  – punkt wspólny prostej

przechodzącej przez  $C$  i zawierającej wysokość trapezu oraz odcinka  $AB$

(zobacz rysunek).



Trapez  $ABCD$  jest równoramienny, więc  $|EB| = \frac{a-b}{2}$  oraz  $|AE| = \frac{a+b}{2}$ .

Ponieważ  $a + b + 2c = l$  (z warunków zadania) oraz  $a + b = 2c$  (z własności czworokąta opisanego na okręgu otrzymujemy), więc  $4c = l$ , czyli  $c = \frac{1}{4}l$ . Stąd też  $|AE| = \frac{a+b}{2} = c$ .

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta  $AEC$  i wyznaczamy wysokość  $h$  trapezu:

$$|AE|^2 + |EC|^2 = |AC|^2$$

$$c^2 + h^2 = d^2.$$

$$h^2 = d^2 - c^2 = d^2 - \left(\frac{l}{4}\right)^2$$

$$h = \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{4}$$

Okrąg opisany na trapezie  $ABCD$  jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie  $ABC$ . Stosujemy twierdzenie sinusów do wyznaczenia promienia  $R$  okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ :

$$2R = \frac{|AC|}{\sin \alpha}$$

Sinus kąta  $\alpha$  obliczamy z trójkąta prostokątnego  $BEC$ :

$$\sin \alpha = \frac{h}{c} = \frac{\frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{4}}{\frac{l}{4}} = \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{l}$$

Zatem promień  $R$  jest równy

$$R = \frac{|AC|}{2 \sin \alpha} = \frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}$$

To kończy dowód.

**Zadanie 9. (0–6)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: IX.1) (R) posługuje się równaniem prostej w postaci ogólnej na płaszczyźnie, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach [...]; IX.3) (R) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu [...].

**Zasady oceniania**

6 pkt – wyznaczenie równania prostej  $BC$  i obliczenie współrzędnych punktu styczności prostej  $BC$  z okręgiem  $\mathcal{O}$ :  $y = 0$  i  $(8, 0)$ .

5 pkt – uzasadnienie, że prosta o równaniu  $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$  nie przechodzi przez punkt  $B$  i obliczenie współrzędnych punktu  $B$ :  $B = (0, 0)$ .

4 pkt – obliczenie współrzędnych punktu  $B$ :  $B = (0, 0)$   
 LUB

– uzasadnienie, że prosta o równaniu  $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$  nie przechodzi przez punkt  $B$ .

3 pkt – wyznaczenie równań prostych, które są styczne do okręgu  $\mathcal{O}$  i przechodzą przez punkt  $A$ , np.  $y = \frac{4}{3}x$  i  $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$ .

2 pkt – zastosowanie wzoru na odległość punktu od prostej i zapisanie równania z jedną niewiadomą, prowadzącego do wyznaczenia współczynników występujących w równaniu prostej, która jest styczna do okręgu  $\mathcal{O}$  i przechodzi przez punkt  $A$ , np.  

$$\frac{|a \cdot 8 - 4 + 12 - 9a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4.$$

1 pkt – zapisanie równania prostej, która jest styczna do okręgu i przechodzi przez punkt  $A$  w postaci kierunkowej (lub ogólnej), ze współczynnikami zależnymi od jednego parametru, np.  $y = ax + 12 - 9a$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Oznaczmy przez  $l$  prostą, która przechodzi przez wierzchołki  $A$  i  $B$  trójkąta  $ABC$ . Prosta ta jest styczna do okręgu  $\mathcal{O}$ . Równanie prostej  $l$  można zapisać w postaci kierunkowej  $y = ax + b$  (prosta o równaniu  $x = 9$  nie jest styczna do okręgu, gdyż równanie  $(9 - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$  ma dwa rozwiązania). Ponieważ  $A \in l$ , więc  $12 = 9a + b$ , czyli  $b = 12 - 9a$ .

Prosta  $l$  ma równanie  $ax - y + 12 - 9a = 0$  i jest styczna do okręgu o środku  $S = (8, 4)$  i promieniu 4. Zatem odległość punktu  $S$  od prostej  $l$  jest równa 4:

$$\frac{|a \cdot 8 - 4 + 12 - 9a|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

Stąd, poprzez przekształcenia równoważne, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} |8 - a| &= 16\sqrt{a^2 + 1} \\ 64 - 16a + a^2 &= 16a^2 + 16 \\ 15a^2 + 16a - 48 &= 0 \\ a &= \frac{4}{3} \quad \vee \quad a = -\frac{12}{5} \end{aligned}$$

Rozważamy przypadek  $a = \frac{4}{3}$ .

Gdy  $a = \frac{4}{3}$ , to  $b = 0$  i równanie prostej  $l$  ma postać  $y = \frac{4}{3}x$ .

Wierzchołek  $B$  trójkąta  $ABC$  jest punktem przecięcia prostych  $k$  i  $l$ .

Rozwiązaniem układu równań  $\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$  jest  $(x, y) = (0, 0)$ . Zatem  $B = (0, 0)$ . Ponieważ

okrąg  $\mathcal{O}$  jest styczny do osi  $Ox$  i  $B = (0, 0)$ , więc prosta o równaniu  $y = 0$  zawiera bok  $BC$  trójkąta  $ABC$  styczny do danego okręgu w punkcie  $(8, 0)$ .

Rozważamy przypadek  $a = -\frac{12}{5}$ .

Gdy  $a = -\frac{12}{5}$ , to  $b = \frac{168}{5}$  i otrzymujemy prostą  $l$  o równaniu  $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$ .

Zauważmy jednak, że prosta o równaniu  $y = \frac{5}{12}x$  jest prostopadła do prostej  $y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$  i tworzy z osią  $Ox$  kąt ostry o mierze  $\alpha$  takiej, że  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ . Prosta  $k$  tworzy z osią  $Ox$  kąt ostry o mierze  $\beta$  takiej, że  $\tan \beta = \frac{1}{2}$ . Zatem, korzystając z własności funkcji tangens, otrzymujemy  $\alpha < \beta$ . Wynika stąd, że  $|\sphericalangle ABS| > 90^\circ$ , gdzie  $B$  jest punktem przecięcia prostych  $k$  i  $l$ . To jest jednak niemożliwe, gdyż (z założenia)  $|\sphericalangle ABS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC|$ , a  $\frac{1}{2}|\sphericalangle ABC| < \frac{1}{2} \cdot 180^\circ$ .

**Zadanie 10. (0–6)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni [...] ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń. X.5) (R) wyznacza przekroje [...] ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

**Zasady oceniania**

dla sposobu 1.

6 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na objętość  $V$  ostrosłupa i poprawne obliczenie

$$\text{współczynnika } k: k = \frac{\sqrt{2}}{36}.$$

5 pkt – obliczenie, przy obranych wartościach  $P$  i  $\alpha$ , wysokości  $H$  ostrosłupa:

$$H = \sqrt{\frac{P \cdot \cos(2\alpha)}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}}.$$

4 pkt – obliczenie, przy obranych wartościach  $P$  i  $\alpha$ , kwadratu długości krawędzi podstawy oraz kwadratu wysokości ściany bocznej ostrosłupa:  $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin \alpha$ ,

$$h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}.$$

3 pkt – obliczenie, przy obranych wartościach  $P$  i  $\alpha$ , kwadratu długości krawędzi podstawy ostrosłupa:  $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin \alpha$ 

LUB

obliczenie, przy obranych wartościach  $P$  i  $\alpha$ , kwadratu wysokości ściany bocznej

$$\text{ostrosłupa: } h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}.$$

2 pkt – zastosowanie, przy obranych wartościach  $P$  i  $\alpha$ , definicji sinusa w trójkącie  $EGS$  (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta  $EFS$ ) i zapisanie równania z jedną niewiadomą  $a$ , np.

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{P}{2a}} = \sin \alpha, \left(\frac{P}{2a}\right)^2 + \left(\frac{P}{2a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{P}{2a} \cdot \frac{P}{2a} \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

LUB

zapisanie, przy obranych wartościach  $P$  i  $\alpha$ , zależności między  $h$  oraz  $a$ ,

$$\text{wynikających ze związków miarowych w trójkącie } ESF \text{ (lub } EGS), \text{ np. } h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

LUB

zastosowanie, przy obranych wartościach  $P$  i  $\alpha$ , definicji sinusa w trójkącie  $EGS$  (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta  $EFS$ ) i zapisanie równania z jedną niewiadomą  $h$ , np.

$$\frac{\frac{P\sqrt{2}}{8h}}{\frac{P}{h}} = \sin \alpha, h^2 + h^2 - 2 \cdot h \cdot h \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{P\sqrt{2}}{4h}\right)^2.$$

1 pkt – przypisanie wielkościom  $P$  i  $\alpha$  konkretnych wartości liczbowych (pod warunkami:  $P > 0$  i  $\alpha \in (0, 45^\circ)$ ) i wyznaczenie wysokości  $h$  ściany bocznej w zależności od długości  $a$  krawędzi podstawy ostrosłupa:  $h = \frac{P}{2a}$

LUB

przypisanie wielkościom  $P$  i  $\alpha$  konkretnych wartości liczbowych (pod warunkami:  $P > 0$  i  $\alpha \in (0, 45^\circ)$ ) i wyznaczenie długości  $a$  krawędzi bocznej w zależności od wysokości  $h$  ściany bocznej ostrosłupa:  $a = \frac{P}{2h}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

dla sposobu 2.

6 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na objętość  $V$  ostrosłupa i poprawne obliczenie współczynnika  $k$ :  $k = \frac{\sqrt{2}}{36}$ .

5 pkt – obliczenie wysokości  $H$  ostrosłupa:  $H = \sqrt{\frac{P}{4\sqrt{2}\cdot\sin\alpha} - \frac{\sqrt{2}P\cdot\sin\alpha}{4}}$ .

4 pkt – obliczenie kwadratu długości krawędzi podstawy oraz kwadratu wysokości ściany bocznej ostrosłupa:  $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin\alpha$ ,  $h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}$ .

3 pkt – obliczenie kwadratu długości krawędzi podstawy ostrosłupa:  $a^2 = \sqrt{2}P \cdot \sin\alpha$   
LUB

obliczenie kwadratu wysokości ściany bocznej ostrosłupa:  $h^2 = \frac{P}{4\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}$ .

2 pkt – zastosowanie definicji sinusa w trójkącie  $EGS$  (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta  $EFS$ ) i zapisanie równania z jedną niewiadomą  $a$ , np.

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{P}{2a}} = \sin\alpha, \left(\frac{P}{2a}\right)^2 + \left(\frac{P}{2a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{P}{2a} \cdot \frac{P}{2a} \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

LUB

zastosowanie definicji sinusa w trójkącie  $EGS$  (albo twierdzenia cosinusów do trójkąta  $EFS$ ) i zapisanie równania z jedną niewiadomą  $h$ , np.

$$\frac{\frac{P\sqrt{2}}{8h}}{\frac{P}{4h}} = \sin\alpha, h^2 + h^2 - 2 \cdot h \cdot h \cdot \cos(2\alpha) = \left(\frac{P\sqrt{2}}{4h}\right)^2$$

1 pkt – wyznaczenie wysokości  $h$  ściany bocznej w zależności od długości  $a$  krawędzi podstawy ostrosłupa:  $h = \frac{P}{2a}$

LUB

wyznaczenie długości  $a$  krawędzi bocznej w zależności od wysokości  $h$  ściany bocznej ostrosłupa:  $a = \frac{P}{2h}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

## Przykładowe pełne rozwiązania

### Sposób 1.

Ponieważ  $k$  jest współczynnikiem liczbowym, który nie zależy od  $P$  ani od  $\alpha$ , więc obliczymy objętość ostrosłupa prawidłowego o polu powierzchni bocznej  $P = \sqrt{2}$ , w którym  $\alpha = 30^\circ$ .

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

$a$  – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

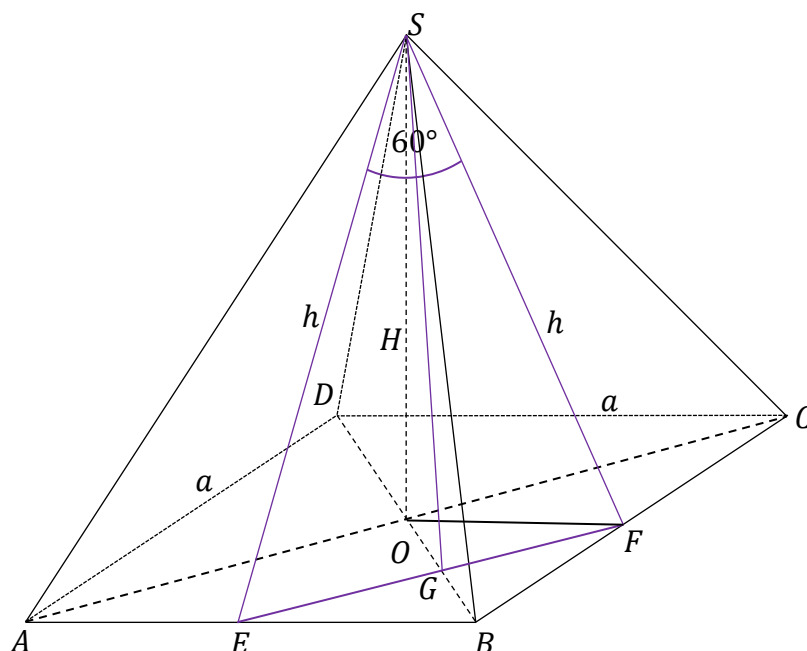
$h$  – wysokość ściany bocznej ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka  $S$ ,

$H$  – wysokość ostrosłupa,

$O$  – punkt przecięcia przekątnych podstawy  $ABCD$ ,

$SE, SF$  – wysokości sąsiednich ścian bocznych,

$SG$  – wysokość trójkąta  $SEG$  poprowadzona z wierzchołka  $S$ .



Wyznaczamy wysokość  $h$  ściany bocznej ostrosłupa  $ABCDS$  poprowadzonej z wierzchołka  $S$  w zależności od długości  $a$  krawędzi podstawy ostrosłupa:

$$\sqrt{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} ah$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2a}$$

Ponieważ  $\alpha = 30^\circ$ , więc trójkąt równoramienny  $ESF$  jest równoboczny. Zatem

$$h = |EF| = \sqrt{2} \cdot |EB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Stąd}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2a} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$a = 1$$

więc

$$h^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2a}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta  $FOS$  i obliczamy wysokość  $H$  ostrosłupa  $ABCD$ :

$$|OS|^2 = |FS|^2 - |OF|^2$$

$$H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$H^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$H = \frac{1}{2}$$

Obliczamy objętość  $V$  ostrosłupa  $ABCD$ :

$$V = \frac{1}{3}a^2H = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Z treści zadania wiadomo, że  $V = \sqrt{k \cdot P^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(2\alpha)}$ , więc  $V = \sqrt{k \cdot (\sqrt{2})^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$ .

Porównując otrzymane wartości objętości, obliczamy  $k$ :

$$\frac{1}{6} = \sqrt{k \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{36}$$

Współczynnik  $k$  ma wartość  $\frac{\sqrt{2}}{36}$ .

### Sposób 2.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

$a$  – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

$h$  – wysokość ściany bocznej ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka  $S$ ,

$H$  – wysokość ostrosłupa,

$O$  – punkt przecięcia przekątnych podstawy  $ABCD$ ,

$SE, SF$  – wysokości sąsiednich ścian bocznych,

$SG$  – wysokość trójkąta  $SEG$  poprowadzona z wierzchołka  $S$ .



$$H^2 = \frac{P}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha} - \frac{\sqrt{2}P \cdot \sin \alpha}{4}$$

$$H^2 = \frac{P(1 - 2 \sin^2 \alpha)}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}$$

$$H = \sqrt{\frac{P \cdot \cos(2\alpha)}{4\sqrt{2} \cdot \sin \alpha}}$$

Obliczamy objętość  $V$  ostrosłupa  $ABCD$ :

$$V = \frac{1}{3} a^2 H = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} P \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{\frac{P \cos(2\alpha)}{4\sqrt{2} \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{36}} \cdot P^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(2\alpha)$$

Zatem  $k = \frac{\sqrt{2}}{36}$ .

**Zadanie 11. (0–4)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.2) (R) stosuje schemat Bernoullego.

**Zasady oceniania**

4 pkt – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństwa zaliczenia egzaminu przez studenta i poprawny wynik:  $\frac{123841}{4^{15}}$ .

3 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  sukcesów w  $n$  próbach i skorzystanie z addytywności prawdopodobieństwa dla zdarzeń parami rozłącznych.

2 pkt – wyznaczenie zdarzenia odpowiadającego zaliczeniu egzaminu za pomocą zdarzeń  $S_{15}^k$ , gdzie  $k \in \{11, 12, 13, 14, 15\}$ :  $S_{15}^{11} \cup S_{15}^{12} \cup S_{15}^{13} \cup S_{15}^{14} \cup S_{15}^{15}$ .

1 pkt – obliczenie prawdopodobieństwa sukcesu i porażki.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Próba Bernoullego jest losowe wybranie przez studenta odpowiedzi w zadaniu. Sukcesem w tej próbie jest wybranie odpowiedzi, która jest poprawna.

Prawdopodobieństwo sukcesu jest równe  $p = 0,25$ , natomiast prawdopodobieństwo porażki jest równe  $q = 0,75$ .

Niech  $S_{15}^k$  oznacza zdarzenie polegające na wybraniu przez studenta poprawnych odpowiedzi w dokładnie  $k$  zadaniach spośród 15.

Korzystamy ze schematu Bernoullego. Prawdopodobieństwo zaliczenia przez studenta egzaminu jest równe  $P(S_{15}^{11} \cup S_{15}^{12} \cup S_{15}^{13} \cup S_{15}^{14} \cup S_{15}^{15})$ . Zdarzenia  $S_{15}^{11}, S_{15}^{12}, S_{15}^{13}, S_{15}^{14}, S_{15}^{15}$  są parami rozłączne, więc

$$\begin{aligned}
 P(S_{15}^{11} \cup S_{15}^{12} \cup S_{15}^{13} \cup S_{15}^{14} \cup S_{15}^{15}) &= P(S_{15}^{11}) + P(S_{15}^{12}) + P(S_{15}^{13}) + P(S_{15}^{14}) + P(S_{15}^{15}) = \\
 &= \binom{15}{11} \cdot (0,25)^{11} \cdot (0,75)^4 + \binom{15}{12} \cdot (0,25)^{12} \cdot (0,75)^3 + \binom{15}{13} \cdot (0,25)^{13} \cdot (0,75)^2 + \\
 &+ \binom{15}{14} \cdot (0,25)^{14} \cdot (0,75)^1 + \binom{15}{15} \cdot (0,25)^{15} = \\
 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \cdot (1365 \cdot 81 + 455 \cdot 27 + 105 \cdot 9 + 15 \cdot 3 + 1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \cdot 123841 \approx 0,00012
 \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo zaliczenia przez studenta egzaminu jest równe  $\frac{123841}{1024^3}$ .