CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-600, MMAP-R0-700, MMAP-R0-Q00, MMAP-R0-Z00, MMAU-R0-100
Termin egzaminu:	12 maja 2023 r.
Data publikacji dokumentu:	28 czerwca 2023 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.13) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania

2 pkt – zapisanie wzoru funkcji m: $m(t) = 4 \cdot 0{,}81^t$ oraz obliczenie liczby pełnych dni/dób, po których masa substancji będzie mniejsza od $1{,}5$ grama: 5 dób.

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji m: $m(t) = 4 \cdot 0{,}81^t$

ALBO

– obliczenie liczby dób, po których masa substancji będzie mniejsza od $1{,}5$ grama: 5 dób.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli jedynym błędem zdającego jest ustalenie niepoprawnego wzoru funkcji w postaci $m(t) = 4 \cdot 0{,}81^{t-1}$ i zdający konsekwentnie do popełnionego błędu oblicza liczbę dób, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy:

t – czas (w dobach), licząc od chwili początkowej,

$m(t)$ – masa substancji po t dobach, licząc od chwili początkowej.

Liczby $m(0), m(1), m(2)$ itd. są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $0{,}81$. Zatem

---

[1]Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1246).

$$m(t) = 4 \cdot 0{,}81^t$$

gdzie t jest liczbą całkowitą nieujemną. Ten ciąg geometryczny jest malejący. Ponadto

$m(4) = 4 \cdot 0{,}81^4 \approx 1{,}72 > 1{,}5$

$m(5) = 4 \cdot 0{,}81^5 \approx 1{,}39 < 1{,}5$

więc masa substancji będzie mniejsza od $1{,}5$ g po pięciu dobach.

Zadanie 2. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R2) stosuje schemat Bernoullego.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{1}{64}$.

2 pkt – zapisanie poprawnego prawdopodobieństwa uzyskania co najmniej czterech sukcesów w pięciu próbach Bernoullego, np. $P = \binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5$,

$P = 5\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^5$,

$P = 1-\left[\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5+\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4+\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3+\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1\right]$

1 pkt – zapisanie prawdopodobieństwa odniesienia sukcesu (p) i porażki (q) w pojedynczej partii: $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{3}{4}$

ALBO

– zapisanie prawdopodobieństwa w postaci $p^5+5p^4\cdot q$, gdzie p jest prawdopodobieństwem odniesienia sukcesu, q – porażki,

ALBO

– przedstawienie fragmentu drzewa zawierającego wszystkie istotne gałęzie odpowiadające pięciu wygranym i czterem wygranym,

ALBO

– przedstawienie fragmentu drzewa zawierającego gałąź odpowiadającą czterem wygranym i jednej przegranej oraz określenie na każdym odcinku gałęzi prawdopodobieństwa sukcesu i porażki.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze poprawne prawdopodobieństwa $P(S_5^4)=\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1$ oraz $P\left(S_5^5\right)=\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5$, ale z dalszego rozwiązania <u>nie wynika</u>, że $P=P(S_5^4)+P\left(S_5^5\right)$, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający określa błędnie prawdopodobieństwo porażki i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Określamy prawdopodobieństwo sukcesu (p) i porażki (q) w pojedynczej partii: $p = \frac{1}{4}$, $q = 1 - p = \frac{3}{4}$.

Niech S_5^k oznacza zdarzenie polegające na wygraniu przez Tomka dokładnie k partii spośród pięciu rozgrywanych ($k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$).

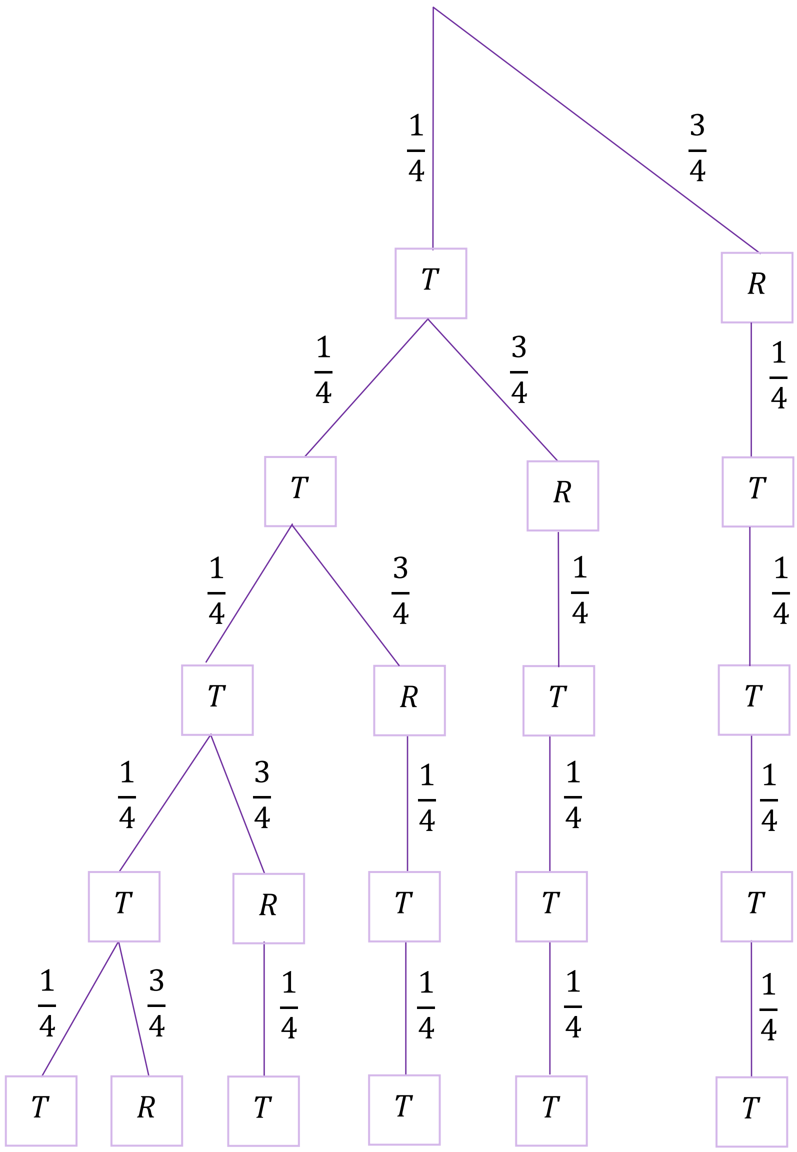
Obliczamy prawdopodobieństwo P wygrania przez Tomka co najmniej czterech z pięciu partii:

$$P = P(S_5^4) + P\left(S_5^5\right) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{5 \cdot 3 + 1}{4^5} = \frac{16}{4^5} = \frac{1}{64}$$

Sposób II (poprzez drzewo)

Określamy prawdopodobieństwo sukcesu (p) i porażki (q) w pojedynczej partii: $p = \frac{1}{4}$, $q = 1 - p = \frac{3}{4}$.

Rysujemy fragment drzewa doświadczenia, zawierający wszystkie gałęzie odpowiadające czterem oraz pięciu wygranym przez Tomka partiom.



Symbol T odpowiada partii wygranej przez Tomka, natomiast R – partii, której Tomek nie wygrał. Oznaczamy przez A zdarzenie polegające na tym, że Tomek wygrał co najmniej cztery spośród pięciu partii.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{16}{1024}=\frac{1}{64}$$

Sposób III (przez zdarzenie przeciwne)

Określamy prawdopodobieństwo sukcesu (p) i porażki (q) w pojedynczej partii: $p=\frac{1}{4}$, $q=1-p=\frac{3}{4}$.

Niech S_5^k oznacza zdarzenie polegające na wygraniu przez Tomka dokładnie k partii spośród pięciu rozgrywanych ($k\in\{0,1,2,3,4,5\}$).

Obliczymy prawdopodobieństwo zdarzenia A' – przeciwnego do zdarzenia A. Zdarzenie A' odpowiada co najwyżej trzem wygranym przez Tomka partiom.
Prawdopodobieństwo zdarzenia A' jest równe

$$P(A') = P(S_5^0) + P(S_5^1) + P(S_5^2) + P(S_5^3) =$$

$$= \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{9 \cdot 112}{4^5} = \frac{63}{64}$$

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A – tj. wygrania przez Tomka co najmniej czterech z pięciu partii, jest równe

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{63}{64} = \frac{1}{64}$$

Zadanie 3. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: XIII.R2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x_0 = -3$ oraz $y = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}$

(lub $y = -\frac{8}{11}(x+3) + 3$).

2 pkt – obliczenie odciętej punktu P i wyznaczenie pochodnej funkcji f: $x_0 = -3$ oraz

$f'(x) = \frac{(6x-2)\cdot\left(x^2+2x+8\right)-\left(3x^2-2x\right)\cdot(2x+2)}{\left(x^2+2x+8\right)^2}$.

1 pkt – obliczenie odciętej punktu P: $x_0 = -3$

ALBO

– wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = \frac{(6x-2)\cdot\left(x^2+2x+8\right)-\left(3x^2-2x\right)\cdot(2x+2)}{\left(x^2+2x+8\right)^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający błędnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy odciętą x_0 punktu P:

$$3 = \frac{3x_0^2 - 2x_0}{x_0^2 + 2x_0 + 8}$$

$$3{x_0}^2 + 6x_0 + 24 = 3{x_0}^2 - 2x_0$$

$$x_0 = -3$$

Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = \frac{(6x-2)(x^2+2x+8) - (3x^2-2x)(2x+2)}{(x^2+2x+8)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x^2 + 48x - 16}{(x^2 + 2x + 8)^2}$$

Wyznaczamy równanie kierunkowe $y = ax + b$ stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P. Obliczamy współczynnik kierunkowy a w równaniu stycznej:

$$a = f'(-3) = -\frac{8}{11}$$

Obliczamy współczynnik b w równaniu stycznej:

$$3 = -\frac{8}{11} \cdot (-3) + b$$

$$b = \frac{9}{11}$$

Styczna ma równanie $y = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}$.

Zadanie 4. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: II.R3) korzysta ze wzorów na: $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3 i a^3-b^3.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania, tj. przekształcenie nierówności $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ do postaci, z której można bezpośrednio wnioskować o równości liczb x i y (lub do postaci, z której można bezpośrednio wnioskować, że jedna z liczb: x, y, jest równa 2) oraz obliczenie tych liczb: $x = 2$ oraz $y = 2$.

2 pkt – zastosowanie wzoru na sześcian różnicy oraz kwadrat różnicy, wykorzystanie założenia i zapisanie nierówności kwadratowej z jedną niewiadomą x (lub y) w postaci $ax^2 + bx + c \geq 0$ lub $ax^2 + bx + c \leq 0$, np. $16x^2 - 64x + 64 \leq 0$

ALBO

– wykorzystanie założenia $x + y = 4$ i zapisanie nierówności w postaci $4(x-y)^2 \leq 0$ (lub $4(4-2y)^2 \leq 0$, lub $4(2x-4)^2 \leq 0$),

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $(x-y)^2 \cdot (x+y) \leq 0$ oraz poprawne określenie znaku jednego z czynników iloczynu $(x-y)^2 \cdot (x+y)$,

ALBO

– zastosowanie nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną, zapisanie obu przypadków i przeprowadzenie poprawnego rozumowania dla jednego z tych przypadków.

1 pkt – wykorzystanie zależności $x + y = 4$ i zapisanie nierówności z jedną niewiadomą, np. $x^3 - x^2(4-x) \leq x(4-x)^2 - (4-x)^3$

ALBO

– przekształcenie nierówności $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ do postaci $(x-y)(x^2-y^2) \leq 0$,

ALBO

– przekształcenie nierówności $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ do postaci $x \cdot y \geq 4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający podstawia do związków $x + y = 4$ oraz $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ konkretne wartości liczbowe i na tym opiera swoją argumentację, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ $x + y = 4$, więc $y = 4 - x$. Ponieważ ponadto x i y spełniają nierówność $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$, więc otrzymujemy

$$x^3 - x^2(4 - x) \leq x(4 - x)^2 - (4 - x)^3$$

Stosujemy wzór na sześcian różnicy oraz kwadrat różnicy i otrzymujemy

$$x^3 - 4x^2 + x^3 \leq x(16 - 8x + x^2) - (64 - 48x + 12x^2 - x^3)$$

Przekształcamy nierówność i otrzymujemy kolejno

$$x^3 - 4x^2 + x^3 \leq 16x - 8x^2 + x^3 - 64 + 48x - 12x^2 + x^3$$

$$16x^2 - 64x + 64 \leq 0$$

$$(4x - 8)^2 \leq 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc jedynym rozwiązaniem tej nierówności jest $x = 2$.
Ponieważ $y = 4 - x$, więc $y = 2$.
To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy nierówność $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ kolejno do postaci

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 \leq 0$$

$$(x - y)(x^2 - y^2) \leq 0$$

$$(x + y)(x - y)^2 \leq 0$$

Ponieważ $x + y = 4$, więc otrzymujemy

$$4(x - y)^2 \leq 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc musi zachodzić

$$(x - y)^2 = 0$$

Stąd $x - y = 0$, czyli $x = y$. Zatem $2x = 4$, czyli $x = 2$. Ponieważ $y = 4 - x$, więc $y = 2$.
To należało wykazać.

Zadanie 5. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.R3) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

2 pkt – obliczenie długości odcinka BN: $\sqrt{3} - 1$

ALBO

– obliczenie długości odcinka BD: $|BD| = 2\sqrt{3}$ i zapisanie równania z jedną niewiadomą x (długością odcinka BN),

ALBO

– zapisanie równania $\frac{x}{2\sqrt{3}-x} = \frac{2+\sqrt{3}}{1}$ z niewiadomą $x = |DN|$ (otrzymanego z podobieństwa trójkątów BLN i DEN, sposób VII),

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu N: $N = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$ i obliczenie długości odcinka BD: $|BD| = 2\sqrt{3}$ (sposób V),

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktów N i D: $N = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$ i $D = (\sqrt{3}, 3)$ (sposób V),

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktu N: $N = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$ i zapisanie długości $|DN|$ w postaci $\frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+1} - 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + 4\right|}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2}}$ (sposób V).

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą $x = |BN|$, np.

$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x\cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot x\cdot 1\cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ (z sumy pól trójkątów BLN oraz KBN),

$\frac{1}{\sin 105^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ}$ (z twierdzenia sinusów dla trójkąta BNK),

$\frac{1}{\sin 75^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ}$ (z twierdzenia sinusów dla trójkąta BNL),

$1 - \frac{1}{2}\cdot x = \frac{x\cdot\sqrt{3}}{2}$ (ze związków miarowych w trójkątach BEN i ELN),

ALBO

– obliczenie długości odcinka BD i zapisanie $|BD| = 2\sqrt{3}$,

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą x (pierwszą lub drugą współrzędną punktu N), np. $-x+1=\sqrt{3}x$ (sposób V),
ALBO
– wyznaczenie równań prostych AC i BD oraz obliczenie współrzędnych punktu D: $D=(\sqrt{3},3)$ (sposób V).

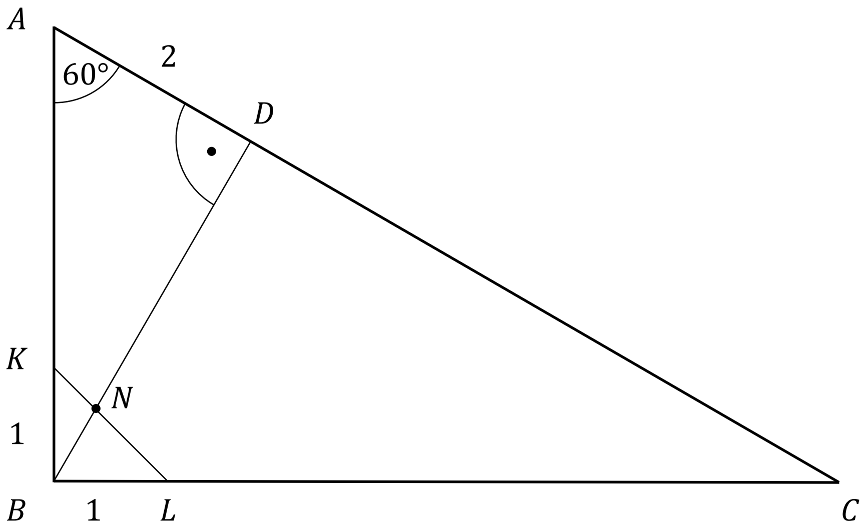
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano nieprawidłową metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
W rozwiązaniach nie są akceptowane przybliżenia dziesiętne liczb rzeczywistych.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (pola trójkątów)

W trójkącie DAB o kątach $90°, 60°, 30°$ mamy: $|AD|=2$, $|AB|=4$ i $|BD|=2\sqrt{3}$.



W trójkącie BLN miara kąta NBL jest równa $60°$. W trójkącie KBN miara kąta KBN jest równa $30°$. Ponieważ pole trójkąta KBL (równe $\frac{1}{2}$) jest sumą pól trójkątów BLN oraz KBN, więc możemy zapisać równość

$$\frac{1}{2}\cdot|BL|\cdot|BN|\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}\cdot|BN|\cdot|BK|\cdot\sin 30°=\frac{1}{2}$$

Stąd, po uwzględnieniu warunku $|BK|=|BL|=1$, otrzymujemy dalej

$$|BN|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+|BN|\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$|BN|\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)=2$$

$$|BN|=\sqrt{3}-1$$

Zatem $|ND|=|BD|-|BN|=2\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{3}+1$.
To należało wykazać.

Sposób II

W trójkącie DAB o kątach $90°, 60°, 30°$ mamy: $|AD| = 2$, $|AB| = 4$ i $|BD| = 2\sqrt{3}$.
Kąty w trójkącie BNK mają miary: $30°, 45°, 105°$. Stosujemy twierdzenie sinusów i zapisujemy równość:

$$\frac{|BK|}{\sin 105°} = \frac{|BN|}{\sin 45°}$$

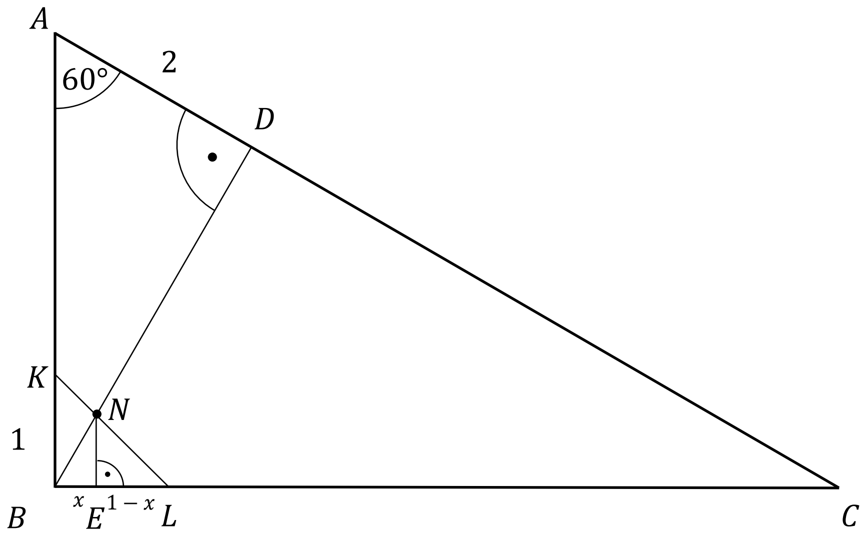
Zatem

$$|BN| = \frac{1 \cdot \sin 45°}{\sin(60° + 45°)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 1$$

Ostatecznie $|ND| = |BD| - |BN| = 2\sqrt{3} - \left(\sqrt{3} - 1\right) = \sqrt{3} + 1$.
To należało wykazać.

Sposób III (trójkąt BLN)

Prowadzimy wysokość NE w trójkącie BLN i oznaczamy $x = |BE|$.



Trójkąt prostokątny DAB ma kąty ostre $60°$ i $30°$, więc:

$$|AB| = 2|AD| = 2 \cdot 2 = 4 \quad \text{i} \quad |BD| = |AD|\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Trójkąt prostokątny BLK ma kąty ostre $45°$, więc $|KL| = \sqrt{2}$.
W trójkącie prostokątnym NBE kąty ostre mają miary $60°$ i $30°$, więc

$$|NE| = |BE| \cdot \sqrt{3} = x\sqrt{3} \quad \text{i} \quad |BN| = 2|BE| = 2x$$

Trójkąt prostokątny ELN ma kąty ostre $45°$, więc

$$|NE| = |EL| = x\sqrt{3}$$

Ale $|NE| = |BL| - |BE| = 1 - x$, więc otrzymujemy równanie

$$1 - x = x\sqrt{3}$$

$$x\sqrt{3} + x = 1$$

$$\left(\sqrt{3} + 1\right)x = 1$$

Mnożąc obie strony równania przez $\sqrt{3} - 1$, otrzymujemy

$$2x = \sqrt{3} - 1$$

czyli

$$|BN| = 2x = \sqrt{3} - 1$$

Zatem $|ND| = |BD| - |BN| = 2\sqrt{3} - \left(\sqrt{3} - 1\right) = \sqrt{3} + 1.$
To należało wykazać.

Sposób IV (twierdzenie cosinusów)
W trójkącie DAB o kątach $90°, 60°, 30°$ mamy: $|AD| = 2, |AB| = 4$ i $|BD| = 2\sqrt{3}.$
W trójkącie KBL kąty mają miary: $90°, 45°, 45°$ oraz: $|BK| = |BL| = 1, |KL| = \sqrt{2}.$
Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkątów KBN oraz BLN otrzymujemy równości

$$|BN|^2 = |BK|^2 + |KN|^2 - 2 \cdot |BK| \cdot |KN| \cdot \cos 45°$$

oraz

$$|BN|^2 = |BL|^2 + |LN|^2 - 2 \cdot |BL| \cdot |LN| \cdot \cos 45°$$

Zatem po podstawieniu $|BK| = |BL| = 1$ i dodaniu stronami równań otrzymujemy równość:

$$2 \cdot |BN|^2 = |LN|^2 + |KN|^2$$

Ponieważ $|\sphericalangle KBN| = 30°$, więc z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta KBN otrzymujemy:

$$|KN|^2 = |BK|^2 + |BN|^2 - 2 \cdot |BK| \cdot |BN| \cdot \cos 30°$$

Ponieważ $|\sphericalangle NBL| = 60°$, więc z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta BLN otrzymujemy:

$$|LN|^2 = |BL|^2 + |BN|^2 - 2 \cdot |BL| \cdot |BN| \cdot \cos 60°$$

Zatem po podstawieniu $|BK| = |BL| = 1$ i dodaniu stronami równań otrzymujemy równość:

$$|LN|^2 + |KN|^2 = 2 + 2 \cdot |BN|^2 - |BN| \cdot \sqrt{3} - |BN|$$

Ale

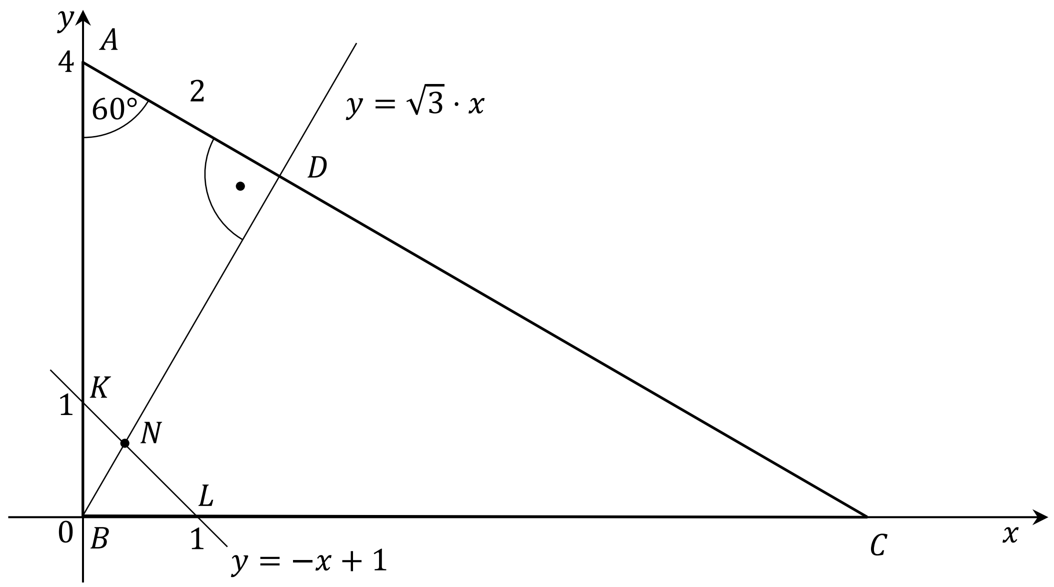
$$2 \cdot |BN|^2 = |LN|^2 + |KN|^2$$

więc

$$2 \cdot |BN|^2 = 2 + 2 \cdot |BN|^2 - |BN| \cdot \sqrt{3} - |BN|$$

Zatem $|BN|\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)=2$, czyli $|BN|=\sqrt{3}-1$. Dlatego
$|ND|=|BD|-|BN|=2\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{3}+1$.
To należało wykazać.

Sposób V (trójkąt w układzie współrzędnych)
Umieszczamy trójkąt ABC w kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y) tak, aby: $B=(0,0)$, A był punktem leżącym na dodatniej półosi Oy, C był punktem leżącym na dodatniej półosi Ox. Wtedy $K=(0,1)$ i $L=(1,0)$, więc prosta KL ma równanie $y=-x+1$. Ponieważ $|\sphericalangle BAC|=60^\circ$ i $BD\perp AC$, więc prosta BD jest nachylona do osi Ox pod kątem 60°. Stąd BD ma równanie $y=\sqrt{3}x$.



Obliczamy współrzędne punktu N:

$$\begin{cases} y=-x+1 \\ y=\sqrt{3}\,x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}x=-x+1 \\ y=\sqrt{3}\,x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1} \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \end{cases}$$

czyli $N=\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$.
Obliczamy współrzędne punktu A.
$\frac{|AD|}{|AB|}=\cos 60^\circ$, więc $|AB|=\frac{|AD|}{\cos 60^\circ}=4$ i stąd $A=(0,4)$.

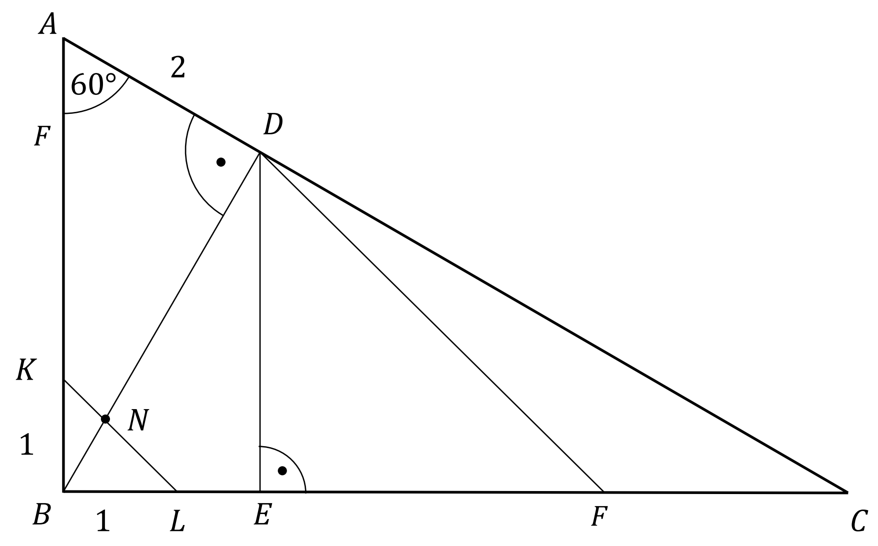
Ponieważ $|\sphericalangle BCA| = 30°$, więc współczynnik kierunkowy a w równaniu prostej AC jest równy $a = \operatorname{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Zatem prosta AC ma równanie $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$.
Obliczamy odległość punktu N od prostej AC:

$$\frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+1} - 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + 4\right|}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|\frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 12\left(\sqrt{3}+1\right)}{3(\sqrt{3}+1)}\right|}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{8\sqrt{3}+12}{3(\sqrt{3}+1)}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{8\sqrt{3}+12}{3(\sqrt{3}+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = \sqrt{3}+1$$

Zatem $|ND| = \sqrt{3}+1$. To należało wykazać.

Sposób VI (prosta równoległa do KL przechodząca przez D)
Prowadzimy wysokość DE trójkąta BCD, a przez punkt D prostą równoległą do prostej KL i oznaczamy przez F punkt jej przecięcia z prostą BC.



W trójkącie DAB o kątach $90°, 60°, 30°$ mamy: $|AD| = 2$, $|AB| = 4$ i $|BD| = 2\sqrt{3}$.
Trójkąt prostokątny BED ma również kąty ostre $60°$ i $30°$, więc $|BE| = \frac{|BD|}{2} = \sqrt{3}$ i $|DE| = |BD|\sqrt{3} = 3$.
Trójkąt prostokątny DEF ma kąty ostre $45°$, więc jest równoramienny.
Zatem $|EF| = |DE| = 3$.
Stąd $|LF| = |LE| + |EF| = (|BE| - |BL|) + |EF| = \sqrt{3} - 1 + 3 = 2 + \sqrt{3}$.
Z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{|ND|}{|LF|} = \frac{|BN|}{|BL|}$$

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

czyli

$$\frac{|ND|}{2+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - |ND|}{1}$$

Stąd

$$|ND| = \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2\sqrt{3} - |ND|\right)$$

$$|ND| + \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot|ND| = 4\sqrt{3} + 6$$

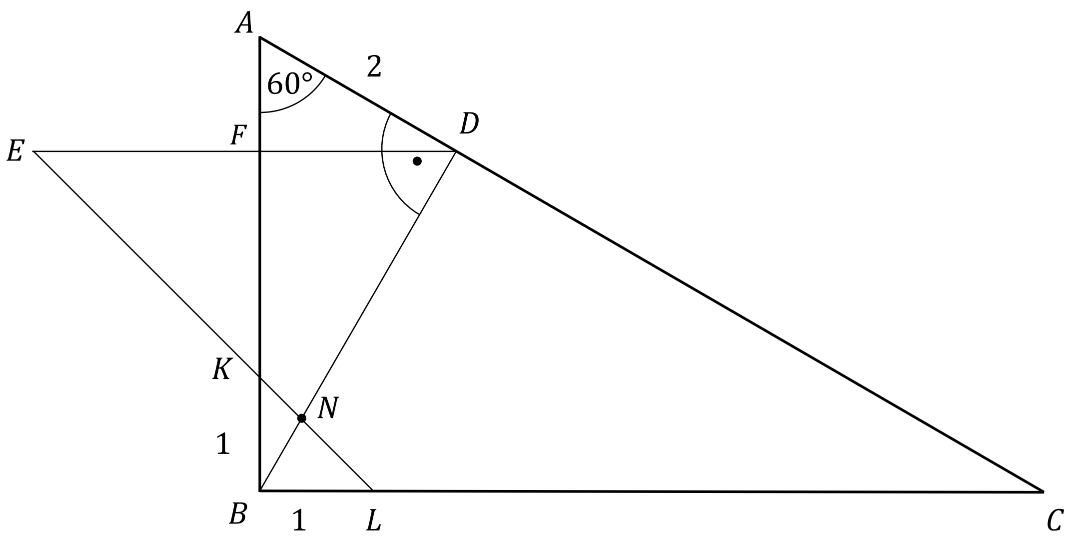
$$|ND|\cdot\left(3+\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} + 6$$

$$|ND| = \frac{4\sqrt{3}+6}{3+\sqrt{3}} = \frac{2(2\sqrt{3}+3)(3-\sqrt{3})}{9-3} = \sqrt{3}+1$$

To należało wykazać.

Sposób VII (prosta równoległa do BC przechodząca przez D)

Prowadzimy przez punkt D prostą równoległą do prostej BC i oznaczamy przez E punkt jej przecięcia z prostą KL, natomiast przez F – punkt jej przecięcia z prostą AB.



W trójkącie DAB o kątach $90°, 60°, 30°$ mamy: $|AD| = 2$, $|AB| = 4$ i $|BD| = 2\sqrt{3}$.
Trójkąt prostokątny AFD ma kąty ostre $60°$ i $30°$, więc $|AF| = 1$ oraz $|DF| = \sqrt{3}$.
Zatem $|FK| = 4 - 1 - 1 = 2$.
Trójkąt prostokątny KFE ma kąty ostre $45°$, więc jest równoramienny.
Zatem $|EF| = |FK| = 2$. Stąd $|ED| = 2 + \sqrt{3}$.
Trójkąty DEN i BLN są podobne (*kkk*), więc

$$\frac{|ND|}{|ED|} = \frac{|BN|}{|BL|}$$

czyli

$$\frac{|ND|}{2+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-|ND|}{1}$$

Stąd

$$|ND| = \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}-|ND|\right)$$

$$|ND| + \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot|ND| = 4\sqrt{3}+6$$

$$|ND|\cdot\left(3+\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}+6$$

$$|ND| = \frac{4\sqrt{3}+6}{3+\sqrt{3}} = \frac{2(2\sqrt{3}+3)(3-\sqrt{3})}{9-3} = \sqrt{3}+1$$

To należało wykazać.

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{7}{12}\pi + k\pi$ oraz $\frac{11}{12}\pi + k\pi$,
gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2 pkt – przekształcenie równania do postaci $\sin(2x) = -\frac{1}{2}$ lub $\sin(-2x) = \frac{1}{2}$.

1 pkt – zastosowanie wzoru na sinus sumy kątów i zapisanie $\sin(10x)$ jako
$\sin(6x)\cos(4x) + \cos(6x)\sin(4x)$
ALBO
– zastosowanie wzoru na sumę/różnicę sinusów i zapisanie wyrażenia
$2\sin(4x)\cos(6x)$ jako $\sin(10x) - \sin(2x)$ lub $\sin(10x) + \sin(-2x)$,
ALBO
– zastosowanie wzorów na sinus różnicy i cosinus sumy kątów i zapisanie
$4\sin(4x)\cos(6x)$ jako $[\sin(5x)\cos x - \cos(5x)\sin x] \cdot [\cos(5x)\cos x - \sin(5x)\sin x]$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający popełnia błąd rachunkowy, w wyniku którego otrzymuje jedną serię rozwiązań, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający popełnia jednokrotnie błąd polegający na:
– niepoprawnym zastosowaniu wzorów trygonometrycznych na: sinus sumy/różnicy lub sumy/różnicy sinusów, lub iloczyn sinusa i cosinusa
ALBO
– błędnym zastosowaniu nieparzystości/parzystości funkcji trygonometrycznej
i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, i otrzyma co najmniej jedną serię rozwiązań, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Stosujemy wzory na sinus sumy oraz różnicy kątów i przekształcamy równanie równoważnie, otrzymując:

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(10x) + 1$$

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(6x + 4x) + 1$$

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(6x)\cos(4x) + 2\cos(6x)\sin(4x) + 1$$

$$2\sin(4x)\cos(6x) - 2\sin(6x)\cos(4x) = 1$$

$$-2\sin(2x) = 1$$

$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}$$

Stąd $2x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ lub $2x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, czyli

$$x = \frac{7}{12}\pi + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{11}{12}\pi + k\pi$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Sposób II

Zauważamy, że $4x + 6x = 10x$. Postać lewej strony równania sugeruje zastosowanie wzoru na różnicę sinusów. Niech α i β będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $\frac{\alpha-\beta}{2} = 4x$ oraz $\frac{\alpha+\beta}{2} = 6x$. Wtedy

$$\begin{cases} \alpha = 8x + \beta \\ \dfrac{8x + \beta + \beta}{2} = 6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 10x \\ \beta = 2x \end{cases}$$

Przekształcamy lewą stronę równania $4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(10x) + 1$:

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2(\sin\alpha - \sin\beta) = 2(\sin(10x) - \sin(2x))$$

Stąd i ze wzoru na różnicę sinusów otrzymujemy:

$$2(\sin(10x) - \sin(2x)) = 2\sin(10x) + 1$$

$$-2\sin(2x) = 1$$

$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}$$

Rozwiązując to równanie, otrzymujemy:

$$2x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in Z$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{11}{12}\pi + k\pi, \text{ gdzie } k \in Z$$

Sposób III

Przekształcamy równoważnie wyrażenie $4\sin(4x)\cos(6x)$, stosując wzory na sinus różnicy i cosinus sumy kątów:

$4\sin(4x)\cos(6x) = 4\sin(5x - x)\cos(5x + x) =$

$$= 4[\sin(5x)\cos x - \cos(5x)\sin x] \cdot [\cos(5x)\cos x - \sin(5x)\sin x] =$$

$$= 4\sin(5x)\cos(5x)\cos^2 x - 4\sin^2(5x)\sin x\cos x - 4\cos^2(5x)\sin x\cos x +$$

$$+4\sin(5x)\cos(5x)\sin^2 x =$$

$$= 4\sin(5x)\cos(5x) - 4\sin x\cos x = 2\sin(10x) - 2\sin(2x)$$

Stąd otrzymujemy:

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(10x) + 1$$

$$2(\sin(10x) - \sin(2x)) = 2\sin(10x) + 1$$

$$-2\sin(2x) = 1$$

$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}$$

Rozwiązując to równanie, otrzymujemy:

$$2x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad 2x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in Z$$

$$x = \frac{7}{12}\pi + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{11}{12}\pi + k\pi, \text{ gdzie } k \in Z$$

Zadanie 7. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się. X.R5) wyznacza przekroje sześcianu […].

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\sqrt{6}$.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością odcinka SP), np.:

$\frac{|SP|}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$ (z podobieństwa trójkątów PHS i AHB, sposób I),

$18\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot |SP|$ (z równości pól $P_{HAB} = P_{BAS} + P_{HSB}$),

$9\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot |SP|$ (z równości $P_{HSB} = \frac{1}{2} \cdot |HS| \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot |HB| \cdot |SP|$, sposób II),

ALBO

– obliczenie pola trójkąta HSR oraz długości odcinka HR: $P_{\Delta HSR} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ oraz $|HR| = 3\sqrt{3}$,

ALBO

– obliczenie długości odcinków HP i HS: $|HP| = 2\sqrt{3}$ i $|HS| = 3\sqrt{2}$,

ALBO

– obliczenie długości odcinków HP oraz cosinusa/tangensa kąta SHP: $|HP| = 2\sqrt{3}$ i $\cos \measuredangle SHP = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ($\operatorname{tg} \measuredangle SHP = \frac{\sqrt{2}}{2}$),

ALBO

– obliczenie długości AK: $AK = 2\sqrt{6}$.

2 pkt – obliczenie długości boków trójkąta HSB: $|HS| = 3\sqrt{2}$, $|HB| = 6\sqrt{3}$, $|SB| = 3\sqrt{6}$

ALBO

– zapisanie proporcji wynikającej z podobieństwa dwóch trójkątów prostokątnych, przy czym jednym z nich jest trójkąt HSP,

ALBO

– obliczenie/zapisanie długości odcinków BH oraz SR: $|BH| = 6\sqrt{3}$ oraz $|SR| = 3$,

ALBO

– obliczenie wartości funkcji trygonometrycznej kąta SHR: np. $\cos \measuredangle SHR = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin \measuredangle SHR = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} \measuredangle SHR = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

ALBO

– obliczenie pola trójkąta HAB: $P_{\Delta HAB} = 18\sqrt{2}$,

ALBO

– obliczenie długości odcinka SB i sinusa kąta SBH: $|SB| = 3\sqrt{6}$ i $\sin\sphericalangle SBH = \frac{1}{3}$,
ALBO
– zapisanie pola trójkąta HAB jako sumy pól trójkątów SAB oraz HSB i zapisanie $P_{HSB} = \frac{1}{2}\cdot|HB|\cdot|SP|$ (lub $P_{HSB} = \frac{1}{2}\cdot P_{HAB}$),
ALBO
– zapisanie pola trójkąta HSB na dwa sposoby: $P_{HSB} = \frac{1}{2}\cdot|HS|\cdot|AB|$ oraz $P_{HSB} = \frac{1}{2}\cdot|HB|\cdot|SP|$,
ALBO
– obliczenie pola trójkąta HSB: $P_{HSB} = 9\sqrt{2}$.

1 pkt – obliczenie/zapisanie długości jednego z odcinków BH, SR, HS albo BS: $|BH| = 6\sqrt{3}$, $|SR| = 3$, $|HS| = 3\sqrt{2}$, $|BS| = 3\sqrt{6}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:
   a) zastosowanie niepoprawnej definicji jednej funkcji trygonometrycznej
   b) błędne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa
   c) zastosowanie niepoprawnej tożsamości $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
   d) błędne zastosowanie twierdzenia cosinusów lub sinusów
   e) błędne zastosowanie wzoru Herona

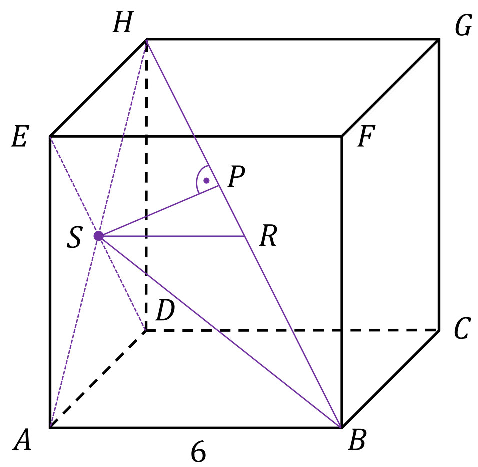
to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający korzysta ze związku $|HP| = \frac{1}{3}\cdot|HB|$ (gdzie P jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka S na podstawę HB trójkąta HSB) i nie uzasadni jego prawdziwości, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:

S – środek odcinka AH,
R – środek odcinka BH,
P – spodek wysokości trójkąta SBH poprowadzonej z punktu S na bok BH.



Sposób I

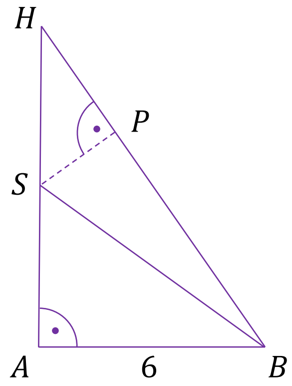
Obliczamy $|AH| = 6\sqrt{2}$, $|BH| = 6\sqrt{3}$.

Trójkąty AHB i PHS są podobne (cecha *kkk*), więc

$$\frac{|SP|}{|AB|} = \frac{|SH|}{|BH|}$$

$$\frac{|SP|}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$$

$$|SP| = \sqrt{6}$$



Uwaga:

Równanie $\frac{|SP|}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}$ otrzymamy, stosując dwukrotnie definicję sinusa kąta SHP w trójkątach prostokątnych HSP i HAB.

Sposób II

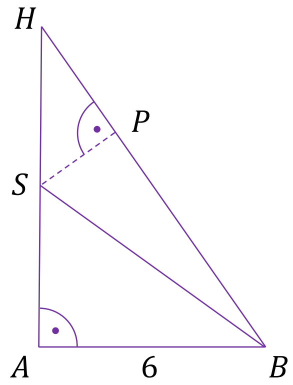
Obliczamy $|AH| = 6\sqrt{2}$, $|BH| = 6\sqrt{3}$, $|HS| = 3\sqrt{2}$.

Obliczamy pole trójkąta HSB:

$$P_{\Delta HSB} = \frac{1}{2} \cdot |HS| \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = 9\sqrt{2}$$

Ale

$$P_{\Delta HSB} = \frac{1}{2} \cdot |HB| \cdot |SP| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot |SP| = 3\sqrt{3} \cdot |SP|$$



Stąd

$$3\sqrt{3} \cdot |SP| = 9\sqrt{2}$$

więc $|SP| = \sqrt{6}$.

Sposób IIa

Odcinek SR łączy środki boków w trójkącie ABH, jest więc równoległy do boku AB i ma długość równą $|SR| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$.

Zauważmy, że trójkąt HAB jest prostokątny, zatem trójkąt HSR też jest prostokątny.

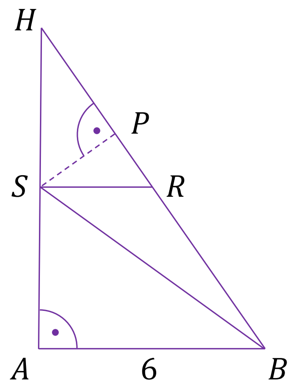
Obliczamy $|AH| = 6\sqrt{2}$, $|BH| = 6\sqrt{3}$.

Obliczamy pole trójkąta HSR:

$$P_{\Delta HSR} = \frac{1}{2}|HS| \cdot |SR| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

Ale

$$P_{\Delta HSR} = \frac{1}{2}|HR| \cdot |SP| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot |SP|$$



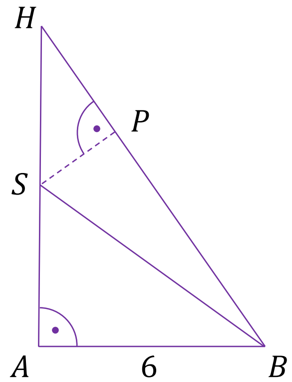
Stąd

$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot |SP| = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

więc $|SP| = \sqrt{6}$.

Sposób III

Wyznaczamy cosinus kąta SHP:



$\cos\sphericalangle SHP = \frac{|AH|}{|BH|} = \frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Ponieważ $\cos\sphericalangle SHP = \frac{|HP|}{|HS|} = \frac{|HP|}{3\sqrt{2}}$, więc $\frac{|HP|}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

i stąd $|HP| = 2\sqrt{3}$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie HPS mamy $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = |SP|^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2$,
więc $|SP| = \sqrt{6}$.

Sposób IV

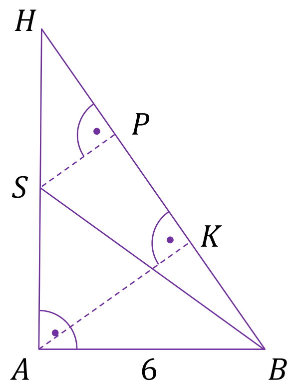
Obliczamy $|AH| = 6\sqrt{2}$, $|BH| = 6\sqrt{3}$.
Zauważamy, że trójkąt HAB jest prostokątny. Pole trójkąta HAB jest równe

$$P_{\Delta HAB} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 6}{2} = 18\sqrt{2}$$

Niech punkt K będzie rzutem wierzchołka A na bok BH trójkąta HAB, zatem

$$\frac{|AK| \cdot |HB|}{2} = 18\sqrt{2}$$

$$|AK| = \frac{36\sqrt{2}}{|HB|} = \frac{36\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$



Ponieważ trójkąty HSP i HAK są podobne, więc

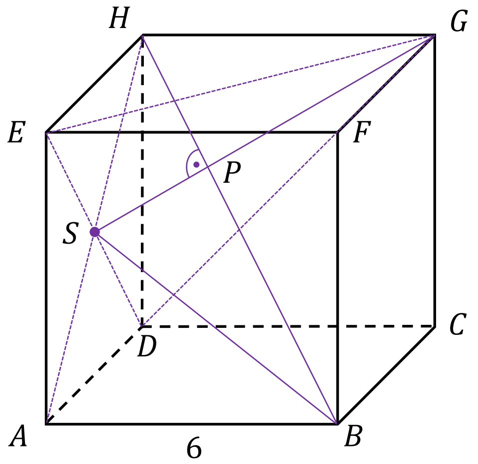
$$\frac{|HS|}{|SP|} = \frac{|HA|}{|AK|}$$

Stąd

$$|SP| = \frac{3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

Uwaga:
Zadanie można również rozwiązać, rozważając ostrosłupy $DEGH$ oraz $DEGB$.
Prowadzimy odcinki EG i DG. Trójkąt EDG jest równoboczny, gdyż wszystkie jego boki są przekątnymi przystających kwadratów, a ponieważ odcinki DH, EH i GH mają równe

długości, odcinki DB, EB i GB też mają równe długości, więc ostrosłupy $DEGH$ i $DEGB$ o wspólnej podstawie DEG są prawidłowe.



Wynika stąd, że prosta BH zawiera wysokości tych ostrosłupów, a to oznacza, że punkt P jest środkiem ciężkości trójkąta DEG o boku długości $|DE| = 6\sqrt{2}$. Zatem

$$|SP| = \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

Zadanie 8. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $16\sqrt{3}+10$.

3 pkt – obliczenie długości boku AB: $|AB|=8\sqrt{3}$ i zapisanie $Ob_{ABCD}=2\cdot(|AB|+|CD|)$

ALBO

– obliczenie długości boku AB: $|AB|=8\sqrt{3}$ i zapisanie równania

$8\sqrt{3}+5=4+|AD|$.

2 pkt – obliczenie długości boku AB: $8\sqrt{3}$

ALBO

– zapisanie równości 1) i 3) określonych w kryterium oceniania za 1 punkt,

ALBO

– zapisanie równości 2) i 3) określonych w kryterium oceniania za 1 punkt,

ALBO

– zapisanie równości 1) i 4) określonych w kryterium oceniania za 1 punkt.

1 pkt – zapisanie jednej z poniższych równości 1)- 4):

1) $\frac{|AB|}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\frac{1}{4}}$ lub $\frac{1}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{|AB|}$,

2) $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot|AC|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|AB|\cdot\frac{1}{4}$,

3) $Ob_{ABCD}=2\cdot(|AB|+|CD|)$,

4) $|AB|+5=4+|AD|$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą x (długością boku AB), np.

$$x^2=16+\left(2+\frac{x\sqrt{15}}{4}\right)^2-4\left(2+\frac{x\sqrt{15}}{4}\right),$$

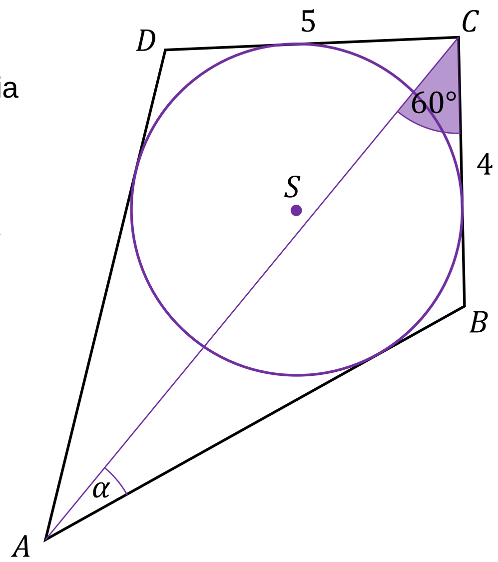
$$16=\left(2+\frac{\sqrt{15}}{4}x\right)^2+x^2-\frac{\sqrt{15}}{2}\cdot\left(2+\frac{\sqrt{15}}{4}x\right)x$$

(z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC i dwóch kątów tego trójkąta).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I



Oznaczmy $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Zgodnie z warunkami zadania $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

Obliczamy długość a boku AB. Korzystamy z twierdzenia sinusów w trójkącie ABC i otrzymujemy

$$\frac{|AB|}{\sin 60^\circ} = \frac{|BC|}{\sin\alpha}$$

$$\frac{|AB|}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{4}}$$

Stąd $|AB| = 8\sqrt{3}$.

Ponieważ w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, więc prawdziwa jest zależność

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$$

Zatem obwód Ob_{ABCD} czworokąta jest równy

$$Ob_{ABCD} = 2\cdot(|AB| + |CD|) = 16\sqrt{3} + 10$$

Sposób II

Zauważmy, że pole P trójkąta ABC można obliczyć na dwa sposoby:

$$P = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AC|\cdot\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot|AC|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|AB|\cdot\frac{1}{4}$$

Stąd $|AB| = 8\sqrt{3}$.

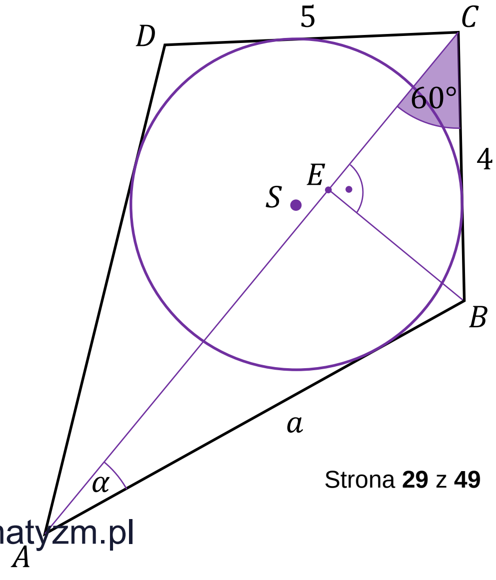
Ponieważ w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, więc prawdziwa jest zależność

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$$

Zatem obwód Ob_{ABCD} czworokąta jest równy

$$Ob_{ABCD} = 2\cdot(|AB| + |CD|) = 16\sqrt{3} + 10$$

Sposób III



Oznaczmy $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Zgodnie z warunkami zadania $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Obliczamy długość a boku AB.

Prowadzimy wysokość BE trójkąta ABC.

Trójkąt prostokątny BCE ma kąty ostre 30° i 60°, więc jest „połową” trójkąta równobocznego o boku długości 4. Zatem

$$|EB| = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Z definicji sinusa w trójkącie prostokątnym ABE otrzymujemy

$$\sin\alpha = \frac{|EB|}{|AB|}$$

czyli

$$\frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{|AB|}$$

Stąd $|AB| = 8\sqrt{3}$.
Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, więc $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.
Zatem obwód Ob_{ABCD} czworokąta jest równy

$$Ob_{ABCD} = 2 \cdot (|AB| + |CD|) = 16\sqrt{3} + 10$$

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2. III.R4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2\|x+3\|+3\|x-1\|=13$, $\|x+2\|+2\|x-3\|<11$.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x \in \left(-\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

3 pkt – rozwiązanie nierówności w dwóch spośród rozważanych przedziałów/przypadków (o ile rozpatruje nierówność w przedziałach/przypadkach, których suma jest równa $\mathbb{R}$/wyczerpujących zbiór $\mathbb{R}$)
ALBO
– zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności:
$x+2<\frac{25}{3}-|x-3|$ i $x+2>-\left(\frac{25}{3}-|x-3|\right)$, a następnie w postaci równoważnej koniunkcji nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:
$x-3<\frac{19}{3}-x$ i $x-3>-\left(\frac{19}{3}-x\right)$ i $x-3<x+\frac{31}{3}$ i $x-3>-\left(x+\frac{31}{3}\right)$,
ALBO
– odczytanie z wykresów funkcji f oraz g pierwszych współrzędnych punktów ich przecięcia: $x=-\frac{11}{3}$ oraz $x=\frac{14}{3}$ i sprawdzenie rachunkiem poprawności odczytanych współrzędnych.

2 pkt – zastosowanie definicji wartości bezwzględnej lub własności wartości bezwzględnej i zapisanie danej nierówności odpowiednio w trzech przedziałach: $(-\infty,-2)$, $[-2,3)$, $[3,+\infty)$, lub w czterech przypadkach: $x+2<0$ i $x-3<0$, $x+2<0$ i $x-3\geq 0$, $x+2\geq 0$ i $x-3<0$, $x+2\geq 0$ i $x-3\geq 0$ (z dokładnością do domknięcia)
ALBO
– zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności:
$x+2<\frac{25}{3}-|x-3|$ i $x+2>-\left(\frac{25}{3}-|x-3|\right)$,
ALBO
– narysowanie wykresów funkcji $f(x)=|x+2|$ oraz $g(x)=\frac{25}{3}-|x-3|$.

1 pkt – przekształcenie danej nierówności do postaci $|x+2|<\frac{25}{3}-|x-3|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeśli w rozwiązaniu algebraicznym zdający popełni błąd przy zapisie nierówności tylko w jednym z rozpatrywanych przypadków, ale konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeśli w rozwiązaniu graficznym zdający popełni jeden błąd przy rysowaniu wykresu funkcji $f(x) = |x+2|$ albo $g(x) = \frac{25}{3} - |x-3|$, ale otrzyma dwa punkty przecięcia i dalej konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za zapisanie wyrażeń w postaci $|x+2|$ oraz $|x-3|$ oraz konsekwentną interpretację zbioru rozwiązań).

3. Jeżeli zdający przy rozwiązaniu graficznym poda zbiór rozwiązań $x \in \left(-\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$, ale nie sprawdzi rachunkiem pierwszych współrzędnych punktów przecięcia wykresów funkcji f i g, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Zauważamy, że $\sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ oraz
$\sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$.

Zapisujemy nierówność $\sqrt{x^2+4x+4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2-6x+9}$ w równoważnej postaci
$|x+2| < \frac{25}{3} - |x-3|$.

Rozważamy trzy przypadki.

Przypadek 1. (gdy $x \in (-\infty, -2)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $-x-2 < \frac{25}{3} + x - 3$, czyli $x > -\frac{11}{3}$.

Stąd otrzymujemy $x \in \left(-\frac{11}{3}, -2\right)$.

Przypadek 2. (gdy $x \in [-2,\ 3)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $x+2 < \frac{25}{3} + x - 3$. Otrzymujemy prawdziwą nierówność $5 < \frac{25}{3}$, więc $x \in [-2, 3)$.

Przypadek 3. (gdy $x \in [3, +\infty)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $x+2 < \frac{25}{3} - x + 3$, czyli $x < \frac{14}{3}$. Stąd otrzymujemy $x \in \left[3, \frac{14}{3}\right)$.

Ostatecznie rozwiązaniami danej nierówności są wszystkie liczby ze zbioru $\left(-\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

Sposób II (poprzez koniunkcję nierówności)

Zauważamy, że $\sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$ oraz
$\sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$.

Zapisujemy nierówność $\sqrt{x^2+4x+4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2-6x+9}$ w równoważnej postaci

$|x+2| < \frac{25}{3} - |x-3|$.

Dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równoważność: $|x| < a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < a$ i $x > -a$.

Przekształcamy nierówność $|x+2| < \frac{25}{3} - |x-3|$, korzystając z tej równoważności dwukrotnie:

$$x+2 < \frac{25}{3} - |x-3| \quad \text{i} \quad x+2 > -\left(\frac{25}{3} - |x-3|\right)$$

$$|x-3| < \frac{19}{3} - x \quad \text{i} \quad |x-3| < x + \frac{31}{3}$$

$$x-3 < \frac{19}{3} - x \quad \text{i} \quad x-3 > -\left(\frac{19}{3} - x\right) \quad \text{i} \quad x-3 < x + \frac{31}{3} \quad \text{i} \quad x-3 > -\left(x + \frac{31}{3}\right)$$

$$2x < \frac{28}{3} \quad \text{i} \quad -3 > -\frac{19}{3} \quad \text{i} \quad -3 < \frac{31}{3} \quad \text{i} \quad 2x > -\frac{22}{3}$$

$$x < \frac{14}{3} \quad \text{i} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad x > -\frac{11}{3}$$

$$-\frac{11}{3} < x < \frac{14}{3}$$

Ostatecznie rozwiązaniami danej nierówności są wszystkie liczby ze zbioru $\left(-\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

Zadanie 10. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $L = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}}$

(lub $L = \frac{8\cdot(4+\sqrt{10})a}{3}$).

3 pkt – zapisanie: $L = 4a\left(1 + \frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{5}{8} + \ ...\right)$.

2 pkt – obliczenie ilorazu ciągu: $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

1 pkt – obliczenie długości boku drugiego kwadratu: $a_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}a$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający obliczy tylko sumę długości boków (po jednym z każdego kwadratu), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający błędnie ustala stosunek podziału długości boku kwadratu i rozwiązuje zadanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za obliczenie ilorazu q ciągu, o ile $q \in (0, 1)$, oraz za konsekwentne obliczenie sumy obwodów wszystkich kwadratów).

3. Jeżeli zdający przyjmuje do obliczeń konkretną długość boku kwadratu K_1 i rozwiązuje zadanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

4. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i otrzyma iloraz q ciągu, który jest liczbą spoza przedziału $(0, 1)$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie (za poprawne obliczenie a_2).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez a_i długość boku kwadratu K_i , natomiast przez L_i – obwód kwadratu K_i (dla $i = 1, 2, 3, ...$). Niech L oznacza sumę obwodów wszystkich rozważanych kwadratów.
Obliczamy długości boków kolejnych kwadratów:

$$a_1 = a$$

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a$$

Analogicznie

$$a_3 = \frac{\sqrt{10}}{4}a_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{\sqrt{10}}{4}a = \frac{5}{8}a$$

$$a_4 = \frac{5\sqrt{10}}{32}a$$

i tak dalej.
Stąd

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \ \dots = 4a + 4\cdot\frac{\sqrt{10}}{4}a + 4\cdot\frac{5}{8}a + \ \dots = 4a\left(1 + \frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{5}{8} + \ \dots\right)$$

Zauważamy, że wyrażenie w nawiasie jest sumą szeregu geometrycznego, gdzie $a_1 = 1$ i $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Ponieważ $|q| = \frac{\sqrt{10}}{4} < 1$, zatem spełnione są założenia twierdzenia o istnieniu sumy nieskończonego szeregu geometrycznego.

Zatem $L = 4a\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{8\cdot\left(4+\sqrt{10}\right)a}{3}$.

Zadanie 11. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, 2) \cup \left(\frac{11}{5}, +\infty\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^3 + x_2^3 > -28$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

3 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą m, wynikającej z warunku
$x_1^3 + x_2^3 > -28$: $m \in \left(2, \frac{9}{4}\right)$.

2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m, wynikającej z warunku
$x_1^3 + x_2^3 > -28$, np. $-64 - 3 \cdot \left(-\frac{m-3}{m-2}\right) \cdot (-4) > -28$

ALBO

– zapisanie nierówności $\left(-2 - \sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^3 + \left(-2 + \sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^3 > -28$ i poprawne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy/różnicy do co najmniej jednego ze składników sumy $\left(-2 - \sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^3 + \left(-2 + \sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^3$.

1 pkt – przekształcenie nierówności $x_1^3 + x_2^3 > -28$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np.
$(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) > -28$

ALBO

– wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2+4x-\frac{m-3}{m-2}$ w zależności od m: $x_1=\frac{-4-\sqrt{\frac{20m-44}{m-2}}}{2\cdot 1}$, $x_2=\frac{-4+\sqrt{\frac{20m-44}{m-2}}}{2\cdot 1}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie dwa warunki: $\Delta>0$ i $x_1^3+x_2^3>-28$: $m\in\left(\frac{11}{5},\frac{9}{4}\right)$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie warunki $\Delta>0$ i $x_1^3+x_2^3>-28$: $m\in\left(\frac{11}{5},\frac{9}{4}\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający popełni w I i/lub II etapie jedynie błędy rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań z I i II etapu, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I i II, to za III etap otrzymuje **1 punkt**.

2. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd i przyjmie, że $x_1+x_2=\pm\frac{m-3}{m-2}$ lub $x_1\cdot x_2=\pm 4$, to za II etap może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, a za III etap otrzymuje **0 punktów**.

3. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd, który nie jest rachunkowy (np. pominie istotne nawiasy przy przekształcaniu nierówności $x_1^3+x_2^3>-28$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, albo przyjmie, że $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-x_1\cdot x_2]$, i konsekwentnie do popełnionego błędu doprowadzi rozwiązanie II etapu zadania do końca, to może uzyskać co najwyżej **1 punkt** za II etap.

Przykładowe pełne rozwiązanie

I etap

Trójmian kwadratowy $x^2+4x-\frac{m-3}{m-2}$, gdzie $m\neq 2$, ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik tego trójmianu jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta>0$:

$$4^2-4\cdot\left(-\frac{m-3}{m-2}\right)>0$$

$$\frac{20m-44}{m-2}>0$$

$$(20m-44)\cdot(m-2)>0$$

$$20\left(m-\frac{11}{5}\right)\cdot(m-2)>0$$

$$m \in (-\infty, 2) \cup \left(\frac{11}{5}, +\infty\right)$$

II etap

Sposób I

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, dla których jest spełniony warunek $x_1^3 + x_2^3 > -28$, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) > -28$$

$$-64 - 3 \cdot \left(-\frac{m-3}{m-2}\right) \cdot (-4) > -28$$

$$\frac{m-3}{m-2} < -3$$

$$(4m - 9)(m - 2) < 0$$

$$m \in \left(2, \frac{9}{4}\right)$$

Sposób II

Wyznaczamy pierwiastki x_1, x_2 trójmianu kwadratowego $x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2}$:

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{\frac{20m-44}{m-2}}}{2 \cdot 1} = -2 - \sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}$$

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{\frac{20m-44}{m-2}}}{2 \cdot 1} = -2 + \sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}$$

Nierówność $x_1^3 + x_2^3 > -28$ możemy więc zapisać w postaci

$$\left(-2 - \sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^3 + \left(-2 + \sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^3 > -28$$

Oznaczmy $\sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}$ przez p. Wtedy

$$(-2 - p)^3 + (-2 + p)^3 > -28$$

Korzystając ze wzoru na sześcian różnicy i sześcian sumy, otrzymujemy dalej

$$(-8 - 12p - 6p^2 - p^3) + (-8 + 12p - 6p^2 + p^3) > -28$$

$$-12p^2 - 16 > -28$$

$$12p^2 - 12 < 0$$

$$p^2 - 1 < 0$$

Zatem

$$\left(\sqrt{\frac{5m-11}{m-2}}\right)^2 - 1 < 0$$

$$\frac{5m-11}{m-2} - 1 < 0$$

$$\frac{5m-11-m+2}{m-2} < 0$$

$$\frac{4m-9}{m-2} < 0$$

$$(4m-9)(m-2) < 0$$

$$m \in \left(2, \frac{9}{4}\right)$$

Uwaga:
Nierówność $(-2-p)^3 + (-2+p)^3 > -28$ możemy również przekształcić, korzystając ze wzoru na sumę sześcianów. Wtedy otrzymujemy

$$(-2-p+(-2)+p)[(-2-p)^2 - (-2-p)(-2+p) + (-2+p)^2] > -28$$

$$-4(4+4p+p^2+p^2-4+4-4p+p^2) > -28$$

$$3p^2 + 4 < 7$$

$$p^2 - 1 < 0$$

III etap
Wyznaczamy wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, które jednocześnie spełniają warunki $m \in (-\infty, 2) \cup \left(\frac{11}{5}, +\infty\right)$ oraz $m \in \left(2, \frac{9}{4}\right)$: $m \in \left(\frac{11}{5}, \frac{9}{4}\right)$.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.	Zdający: I.R1) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu. I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne przekształcenie wyrażenia $81^{\log_3 x}+\frac{2\cdot\log_2\sqrt{27}\cdot\log_3 2}{3}\cdot x^2-6x$ do postaci x^4+x^2-6x.

1 pkt – poprawne zastosowanie własności $a^{\log_a b}=b$, tj. przekształcenie wyrażenia $3^{\log_3 x^4}$ (lub $\left(3^{\log_3 x}\right)^4$) do postaci x^4

ALBO

– poprawne zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy wyrażenie $81^{\log_3 x}+\frac{2\cdot\log_2\sqrt{27}\cdot\log_3 2}{3}\cdot x^2-6x$, korzystając z własności logarytmów:

$$81^{\log_3 x}+\frac{2\cdot\log_2\sqrt{27}\cdot\log_3 2}{3}\cdot x^2-6x=(3^4)^{\log_3 x}+\frac{2}{3}\log_2 3^{\frac{3}{2}}\cdot\log_3 2\cdot x^2-6x=$$

$$=3^{4\log_3 x}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\log_2 3\cdot\log_3 2\cdot x^2-6x=3^{\log_3 x^4}+\log_2 3\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 3}\cdot x^2-6x=$$

$$=x^4+x^2-6x$$

Zadanie 12.2. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; XIII.R4) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji.

Zasady oceniania

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 1$ i obliczenie wartości najmniejszej funkcji f: (-4).

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = 1$.

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania $4x^3 + 2x - 6 = 0$: $x = 1$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = 4x^3 + 2x - 6$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający wyznaczy pochodną funkcji f z błędem i wyznaczona pochodna nie jest wielomianem stopnia trzeciego, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości x, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:
– opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji f
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja f ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja f ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

3. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.

4. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, że dla $x = 1$ funkcja f osiąga najmniejszą wartość i obliczy $f(1) = -4$, to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie. Jeśli zdający nie przedstawi żadnego uzasadnienia i obliczy $f(1) = -4$, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

5. Jeżeli zdający:

– nie rozwiązuje równania $4x^3 + 2x - 6 = 0$, lecz stwierdza, że liczba 1 jest jego rozwiązaniem bez uzasadnienia, że jest to jedyne rozwiązanie rzeczywiste tego równania

ALBO

– popełnia błąd (który nie jest błędem rachunkowym) przy rozkładzie wielomianu $4x^3 + 2x - 6$ na czynniki, ale otrzymuje wielomian stopnia trzeciego, który przyjmuje w zbiorze $(0, +\infty)$ wartość najmniejszą

i dalej konsekwentnie rozwiązuje zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Dla każdego $x > 0$ wyrażenie $81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$ jest równe wyrażeniu $x^4 + x^2 - 6x$. Obliczamy najmniejszą wartość funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^4 + x^2 - 6x$ dla $x \in (0, +\infty)$.

Wyznaczamy pochodną funkcji f: $f'(x) = 4x^3 + 2x - 6$ dla $x \in (0, +\infty)$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji f:

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 + 2x - 6 = 0$$

$$4x^3 + 2x - 4 - 2 = 0$$

$$4(x^3 - 1) + 2(x - 1) = 0$$

$$4(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(4x^2 + 4x + 4 + 2) = 0$$

$$(x - 1)(4x^2 + 4x + 6) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad 4x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$x = 1$$

gdyż $4x^2 + 4x + 6 > 0$ dla każdego $x > 0$.

Badamy znak pochodnej:

$f'(x) > 0$ dla $x \in (1, +\infty)$,

$f'(x) < 0$ dla $x \in (0, 1)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $(0, 1]$ oraz jest rosnąca w przedziale $[1, +\infty)$.

Stąd dla $x = 1$ funkcja f osiąga wartość najmniejszą równą $f(1) = 1^4 + 1^2 - 6 \cdot 1 = -4$.

Zadanie 13. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R5) korzysta ze wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych. IX.R3) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.

Zasady oceniania

6 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $C=\left(\frac{11}{10},-\frac{3}{10}\right)$.

5 pkt – zapisanie jednego równania stopnia pierwszego i równania stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi, np.

$$\begin{cases} y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2} \\ (x-1)^2+(y+1)^2=\frac{1}{2} \end{cases}$$ (pr. AC i okrąg $\mathcal{O}$),

$$\begin{cases} y=7(x-1)-1 \\ (x-1)^2+(y+1)^2=\frac{1}{2} \end{cases}$$ (pr. SC i okrąg $\mathcal{O}$),

ALBO

– wyznaczenie równania prostej CC_1: $y=-x+\frac{4}{5}$,

ALBO

– zapisanie układu równań liniowych, np. równań prostych AC i BC.

4 pkt – zapisanie jednego równania z dwiema niewiadomymi, np.

$y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}$ (pr. AC),

$(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{1}{2}$ (okrąg $\mathcal{O}$),

$y=7(x-1)-1$ (pr. SC),

$\sqrt{\frac{2}{10}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-x\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-y\right)^2}$ (okrąg o środku w punkcie B i promieniu BC),

$3\sqrt{\frac{2}{10}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(-\frac{3}{2}-y\right)^2}$ (okrąg o środku w punkcie A i promieniu AC),

$\frac{\sqrt{\left(\frac{3}{2}-x\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-y\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+\left(-\frac{3}{2}-y\right)^2}}=\frac{1}{3}$ (wykorzystanie zależności między przyprostokątnymi BC oraz AC).

3 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AC: 2 oraz obliczenie współrzędnych punktów przecięcia paraboli z prostą l: $A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ oraz $B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

ALBO

– obliczenie współrzędnych środka S okręgu $\mathcal{O}$ lub promienia R okręgu $\mathcal{O}$: $S = (1, -1)$ lub $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$, lub $|AB| = \sqrt{2}$,

ALBO

– obliczenie współczynnika kierunkowego prostej SC: 7 oraz obliczenie współrzędnych punktów przecięcia paraboli z prostą l: $A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ oraz $B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów przecięcia paraboli z prostą l: $A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ oraz $B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

ALBO

– obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AC: 2,

ALBO

– obliczenie współczynnika kierunkowego prostej SC: 7,

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą (jedną ze współrzędnych punktu A lub B), które wynika z układu równań $\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ oraz zapisanie, że $a_{AC} = \text{tg}(\alpha + 45°)$ (lub $a_{SC} = \text{tg}(2\alpha + 45°)$),

ALBO

– zapisanie, że pierwsza/druga współrzędna środka S okręgu jest średnią arytmetyczną rozwiązań równania $4x^2 - 8x + 3 = 0$ (lub $4y^2 + 8y + 3 = 0$), np. $x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $x_S = \frac{\frac{8}{4}}{2}$ (wzory Viète'a).

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (jedną ze współrzędnych punktu A lub B), które wynika z układu równań $\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$, np.

$x - 2 = 4x^2 - 7x + 1$, $y = 4(y + 2)^2 - 7(y + 2) + 1$

ALBO

– zapisanie, że $a_{AC} = \text{tg}(\alpha + 45°)$ lub $a_{SC} = \text{tg}(2\alpha + 45°)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający obliczy $C_1 = \left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$ oraz C_2 (różny od C_1) i nie odrzuci C_2, to otrzymuje **5 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:

a) zastosowanie niepoprawnej równości $\text{tg}(\alpha + \beta) = \text{tg}\alpha + \text{tg}\beta$,

b) zastosowanie niepoprawnej definicji funkcji trygonometrycznej,
c) podstawienie do równania okręgu średnicy zamiast promienia,
d) błędne zastosowanie wzorów Viète'a przy obliczaniu współrzędnych środka okręgu,
to zdający może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez proste AC i BC)

Obliczamy współrzędne punktów przecięcia paraboli z prostą l:

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ x - (4x^2 - 7x + 1) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ -4x^2 + 8x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ x = \frac{1}{2} \ \lor \ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Stąd $A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ oraz $B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Prosta l ma równanie kierunkowe $y = x - 2$, więc jest nachylona do osi Ox układu współrzędnych pod kątem $45°$. Zatem prosta przechodząca przez punkty A i C jest nachylona do osi Ox układu pod kątem $\alpha + 45°$. Obliczamy $\operatorname{tg}(\alpha + 45°)$, korzystając ze wzoru na tangens sumy kątów:

$$\operatorname{tg}(\alpha + 45°) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}45°}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}45°} = \frac{\frac{1}{3} + 1}{1 - \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{1+3}{3-1} = 2$$

Wyznaczamy równanie prostej AC: $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}$.

Ponieważ AB jest średnicą okręgu, więc kąt ACB (jako kąt wpisany oparty na średnicy AB) jest prosty. Wobec tego współczynnik kierunkowy a_{BC} prostej BC jest równy $a_{BC} = -\frac{1}{2}$ i prosta BC ma równanie $y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}$.

Punkt $C = (x_C, y_C)$ leży na prostych AC i BC, więc $y_C = 2\left(x_C - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}$ oraz $y_C = -\frac{1}{2}\left(x_C - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}$. Stąd otrzymujemy:

$$2\left(x_C - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\left(x_C - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2}x_C = \frac{11}{4}$$

$$x_C = \frac{11}{10}$$

Zatem $C = \left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$.

Sposób II (poprzez długości odcinków AC i BC)

Wyznaczamy punkty przecięcia prostej l i paraboli $y = 4x^2 - 7x + 1$:

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 = 4x^2 - 7x + 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 8x + 3 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe $4x^2 - 8x + 3 = 0$ i otrzymujemy $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$.

Dla $x = \frac{1}{2}$ otrzymujemy $y = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$, więc $A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Dla $x = \frac{3}{2}$ otrzymujemy $y = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$, więc $B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Obliczamy długość odcinka AB:

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Ponieważ AB jest średnicą okręgu $\mathcal{O}$, więc kąt wpisany ACB jest prosty.

Obliczamy długości boków AC i BC trójkąta prostokątnego ABC.

Wobec $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ i $|AB| = \sqrt{2}$ otrzymujemy $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{3}$ i $|AC|^2 + |BC|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$. Stąd $|AC| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ i $|BC| = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Niech $C = (x, y)$. Wykorzystujemy obliczone długości przyprostokątnych trójkąta ABC oraz wzór na długość odcinka i zapisujemy równania:

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = |BC| = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{5} = |AC| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2}$$

Z układu równań

$$\begin{cases} \frac{1}{5} = x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} \\ \frac{9}{5} = x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 3y + \frac{9}{4} \end{cases}$$

otrzymujemy zależność liniową między y a x

$$-\frac{8}{5} = -2x - 2y$$

z której wyznaczamy y: $y = -x + \frac{4}{5}$.

Z otrzymanych równań $y = -x + \frac{4}{5}$ i $\frac{1}{5} = x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4}$ obliczamy współrzędne punktu C:

$$\frac{1}{5} = x^2 - 3x + \frac{9}{4} + \left(-x + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(-x + \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{4}$$

$$0 = 2x^2 - \frac{28}{5}x + \frac{187}{50}$$

$$0 = 100x^2 - 280x + 187$$

$$x = \frac{11}{10} \quad \text{lub} \quad x = \frac{17}{10}$$

Rozwiązanie $x = \frac{17}{10}$ odrzucamy, gdyż wtedy $y = -\frac{9}{10}$, a punkt $\left(\frac{17}{10}, -\frac{9}{10}\right)$ leży pod prostą l.

Gdy $x = \frac{11}{10}$, to $y = -\frac{3}{10}$, więc $C = \left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$.

Sposób III (poprzez okrąg $\mathcal{O}$ i prostą AC)

Obliczamy współrzędne punktów przecięcia paraboli z prostą l:

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ x - (4x^2 - 7x + 1) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ -4x^2 + 8x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Stąd $A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ oraz $B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Prosta l ma równanie kierunkowe $y = x - 2$, więc jest nachylona do osi Ox układu współrzędnych pod kątem $45°$. Zatem prosta przechodząca przez punkty A i C jest nachylona do osi Ox układu pod kątem $\alpha + 45°$. Obliczamy $\operatorname{tg}(\alpha + 45°)$, korzystając ze wzoru na tangens sumy kątów:

$$\operatorname{tg}(\alpha + 45°) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}45°}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}45°} = \frac{\frac{1}{3} + 1}{1 - \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{1 + 3}{3 - 1} = 2$$

Wyznaczamy równanie prostej AC: $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}$.

Obliczamy długość odcinka AB:

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Obliczamy współrzędne środka S okręgu $\mathcal{O}$: $S = (1, -1)$.

Zapisujemy równanie okręgu $\mathcal{O}$: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}$.

Obliczamy współrzędne punktów przecięcia okręgu $\mathcal{O}$ z prostą AC:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2} \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Stąd

$$(x-1)^2 + \left(2x - \frac{5}{2} + 1\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = \frac{1}{2}$$

$$5x^2 - 8x + \frac{11}{4} = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{11}{10}$$

Dla $x = \frac{1}{2}$ otrzymujemy $y = -\frac{3}{2}$, czyli współrzędne punktu A.

Dla $x = \frac{11}{10}$ otrzymujemy $y = -\frac{3}{10}$, czyli $C = \left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$.

Sposób IV (poprzez okrąg $\mathcal{O}$ i średnicę przechodzącą przez C)

Wyznaczamy punkty przecięcia prostej l i paraboli $y = 4x^2 - 7x + 1$:

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 = 4x^2 - 7x + 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 8x + 3 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe $4x^2 - 8x + 3 = 0$ i otrzymujemy $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$.

Dla $x = \frac{1}{2}$ otrzymujemy $y = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$, więc $A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Dla $x = \frac{3}{2}$ otrzymujemy $y = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$, więc $B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Obliczamy długość odcinka AB:

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Ponieważ AB jest średnicą okręgu $\mathcal{O}$, więc ten okrąg ma środek w punkcie $S = (1,-1)$ i promień $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Kąty CAB oraz CSB są oparte na tym samym łuku okręgu $\mathcal{O}$, więc $|\measuredangle CSB| = 2 \cdot |\measuredangle CAB| = 2\alpha$. Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, więc

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy a w równaniu prostej SC:

$$a = \operatorname{tg}(2\alpha + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg}(2\alpha) + \operatorname{tg}45^\circ}{1-\operatorname{tg}(2\alpha)\cdot\operatorname{tg}45^\circ} = \frac{\frac{3}{4}+1}{1-\frac{3}{4}\cdot 1} = 7$$

Równanie prostej SC: $y = 7(x-1)-1$.

Obliczamy współrzędne punktu C:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2} \\ y = 7(x-1)-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + [7(x-1)]^2 = \frac{1}{2} \\ y = 7(x-1)-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50(x-1)^2 = \frac{1}{2} \\ y = 7(x-1)-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-1| = \frac{1}{10} \\ y = 7(x-1)-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{9}{10} \quad \vee \quad x = \frac{11}{10} \\ y = 7(x-1)-1 \end{cases}$$

Dla $x = \frac{9}{10}$ otrzymujemy $y = -\frac{17}{10} < y_A$, więc punkt $\left(\frac{9}{10}, -\frac{17}{10}\right)$ nie spełnia warunków zadania.

Dla $x = \frac{11}{10}$ otrzymujemy $y = -\frac{3}{10}$, więc $C = \left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$.