

Rodzaj dokumentu:	Zasady oceniania rozwiązań zadań
Egzamin:	Egzamin maturalny
Przedmiot:	Matematyka
Poziom:	Poziom rozszerzony

Uwagi:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający, rozwiązując zadanie otwarte, popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Wymagania egzaminacyjne 2023 i 2024:

<https://www.gov.pl/web/edukacja-i-nauka/wymagania-egzaminacyjne-obowiazujace-na-egzaminie-maturalnym-w-roku-2023-i-2024>

Zadanie 1. (0–3)	
Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.</p>	<p>Zdający: I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej [...]; II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $a^2 - b^2$.</p>

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie poprawne – wykazanie, że dana liczba jest równa $\frac{5}{2}$, czyli jest liczbą wymierną

2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – obliczenie pierwiastka $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = |1 - 2\sqrt{3}|$ i usunięcie niewymierności z mianownika ułamka $\frac{2 - \sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}}$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – usunięcie niewymierności z mianownika ułamka $\frac{2 - \sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}}$ albo zapisanie liczby

podpierwiastkowej $13 - 4\sqrt{3}$ w postaci kwadratu, np. $(1 - 2\sqrt{3})^2$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

$$\sqrt{13-4\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1-4\sqrt{3}+12} + \frac{2-\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})} = \sqrt{(1-2\sqrt{3})^2} + \frac{(2-\sqrt{3})^2}{2} =$$

$$= |1-2\sqrt{3}| + \frac{4-4\sqrt{3}+3}{2} = 2\sqrt{3}-1 + \frac{7}{2} - 2\sqrt{3} = \frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$$

Zadanie 2. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilku-etapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. 3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.	Zdający: I.2) (R) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2; II.1) (R) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych; II.2) (R) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$.

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie poprawne – przekształcenie danej liczby do postaci $\frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6}$ i wykazanie, że liczba $n^3 + 6n^2 + 11n + 6$ jest podzielna przez 6

2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci – zapisanie wielomianu $n^3 + 6n^2 + 11n + 6$ w postaci iloczynu $(n+1)(n+2)(n+3)$ przy braku uzasadnienia lub niepełnym uzasadnieniu podzielności liczb postaci $(n+1)(n+2)(n+3)$ przez 6

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – przekształcenie danej liczby do postaci $\frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6}$ i znalezienie jednego z całkowitych pierwiastków wielomianu $n^3 + 6n^2 + 11n + 6$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

$$\frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1 = \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6}$$

Pierwiastkiem wielomianu $W(n) = n^3 + 6n^2 + 11n + 6$ jest liczba -1 , gdyż $W(-1) = 0$. Wielomian $W(n)$ jest więc podzielny przez dwumian $(n+1)$.

Podzielimy wielomian $W(n)$ przez dwumian $(n+1)$.

	1	6	11	6
-1	1	5	6	0

$$n^3 + 6n^2 + 11n + 6 = (n+1)(n^2 + 5n + 6)$$

Zatem:

$$\frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{6} = \frac{(n+1)(n^2 + 5n + 6)}{6}$$

Pierwiastki równania $n^2 + 5n + 6 = 0$ są równe:

$$n_1 = \frac{-5-1}{2} = -3 \text{ i } n_2 = \frac{-5+1}{2} = -2, \text{ więc } n^2 + 5n + 6 = (n+3)(n+2), \text{ więc:}$$

$$\frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

Stwierdzamy, że $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \in \mathbb{N}$, gdyż liczba naturalna $(n+1)(n+2)(n+3)$ jako iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 2 i jest podzielna przez 3, czyli jest podzielna przez 6.

Zadanie 3. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>VI.4) stosuje wzory na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;</p> <p>IV. 1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;</p> <p>IV.1) (R) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci</p> $\begin{cases} ax + by = 3 \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases};$ <p>VI.1) (R) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych.</p>

Zasady oceniania

6 pkt – rozwiązanie poprawne – wyznaczenie wzorów na n -te wyrazy ciągów $a_n = 2n + 3$ i $b_n = 3n - 1$ oraz poprawne obliczenie granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{3}$

5 pkt – rozwiązanie, w którym zostały bezbłędnie pokonane zasadnicze trudności zadania – wyznaczono poprawnie wzory na n -te wyrazy obu ciągów $a_n = 2n + 3$ i $b_n = 3n - 1$ i popełniono błędy w obliczaniu granicy ciągu lub tej granicy nie wyznaczono albo popełniono błędy rachunkowe podczas wyznaczania wzorów na n -te wyrazy ciągów i w ich wyniku otrzymano inną granicę typu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, którą obliczono poprawnie

4 pkt – rozwiązanie, w którym zostały bezbłędnie pokonane zasadnicze trudności zadania – wyznaczono wzory na n -te wyrazy obu ciągów, przy czym popełniono błędy rachunkowe lub nie uwzględniono, że (a_n) jest ciągiem rosnącym

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – wyznaczenie pierwszego wyrazu i różnicy ciągu $(a_n) - \begin{cases} a_1 = 5 \\ r = 2 \end{cases}$ oraz wyznaczenie pierwszego wyrazu i różnicy ciągu $(b_n) - \begin{cases} b_1 = 2 \\ r' = 3 \end{cases}$
ALBO

rozwiązanie, w którym prawidłowo wyznaczono wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n) , albo rozwiązanie, w którym prawidłowo wyznaczono wzór na n -ty wyraz ciągu (b_n)

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – wyznaczenie pierwszego wyrazu i różnicy ciągu (a_n) – $\begin{cases} a_1 = 5 \\ r = 2 \end{cases}$ albo wyznaczenie pierwszego wyrazu i różnicy ciągu (b_n) – $\begin{cases} b_1 = 2 \\ r' = 3 \end{cases}$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania – zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n) , np. $\begin{cases} 2a_1 + 6r = 22 \\ a_1(a_1 + 4r) = 65 \end{cases}$, albo zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć pierwszy wyraz i różnicę

ciągu (b_n) , np. $\begin{cases} \frac{b_1 + b_1 + 48r'}{2} \cdot 25 = 1850 \\ \frac{b_1 + r' + b_1 + 49r'}{2} \cdot 25 = 1925 \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że $a_1(a_1 + 4r) = 65$ i $a_1 + r + a_1 + 5r = 22$.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 = 11 - 3r \\ a_1(a_1 + 4r) = 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 11 - 3r \\ (11 - 3r)(11 + r) - 65 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 11 - 3r \\ -3r^2 - 22r + 56 = 0 \end{cases}$$

$$-3r^2 - 22r + 56 = 0$$

$$\Delta = 1156 \quad r = \frac{22 - 34}{-6} = 2 \text{ lub } r = \frac{22 + 34}{-6} = -9\frac{1}{3} < 0 \text{ wynik sprzeczny z informacją o tym, że } (a_n)$$

jest ciągiem rosnącym

Rozwiązaniem układu jest para $\begin{cases} a_1 = 5 \\ r = 2 \end{cases}$. Wyraz ogólny ciągu (a_n) można przedstawić wzorem:

$$a_n = 5 + 2(n - 1), \text{ stąd } a_n = 2n + 3.$$

Z treści zadania wynika, że skoro:

$$b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{47} + b_{49} = 1850$$

$$b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{48} + b_{50} = 1925,$$

to spełniony być musi układ równań:

$$\begin{cases} \frac{b_1 + b_{49}}{2} \cdot 25 = 1850 \\ \frac{b_2 + b_{50}}{2} \cdot 25 = 1925 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b_1 + b_{49}}{2} \cdot 25 = 1850 \\ \frac{b_2 + b_{50}}{2} \cdot 25 = 1925 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b_1 + b_{49}}{2} \cdot 25 = 1850 \\ \frac{b_2 + b_{50}}{2} \cdot 25 = 1925 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b_1 + b_1 + 48r'}{2} \cdot 25 = 1850 \\ \frac{b_1 + r' + b_1 + 49r'}{2} \cdot 25 = 1925 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + 24r' = 74 \\ b_1 + 25r' = 77 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' = 3 \\ b_1 = 2 \end{cases}$$

Wyraz ogólny ciągu (b_n) można przedstawić wzorem $b_n = 2 + 3(n - 1)$, czyli $b_n = 3n - 1$.

Obliczamy granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{3n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$$

Zadanie 4. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VII.5) (R) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych; VII.6) (R) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$.

Zasady oceniania**Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.**

Pierwszy to wykluczenie ze zbioru $[0, 2\pi]$ rozwiązań równania $\sin \frac{x}{4} = 0$ i uzyskanie wyniku $x \in (0, 2\pi)$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie zbioru rozwiązań równania $\sin \frac{x}{4} = 0$

Drugi etap to rozwiązanie równania trygonometrycznego $\cos 2x - \cos x = 0$ w przedziale $(0, 2\pi)$. Za ten etap można otrzymać maksymalnie 3 pkt.

3 pkt – rozwiązanie poprawne i otrzymanie w toku poprawnego rozumowania wyniku:

$$x \in \left\{ \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi \right\}$$

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – wyznaczenie rozwiązań równania w zbiorze liczb rzeczywistych w postaci: $x = \frac{2}{3}k\pi$ i $k \in \mathbb{Z}$ lub w postaci $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, lub $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, lub

$x = 2k\pi$ i $k \in \mathbb{Z}$, albo rozwiązanie jednego z równań $\sin \frac{x}{2} = 0$ lub $\sin \frac{3x}{2} = 0$ w zbiorze $(0, 2\pi)$, lub roz-

wiązanie jednego z równań $\cos x = -\frac{1}{2}$ lub $\cos x = 1$ w zbiorze $(0, 2\pi)$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania – wykorzystanie wzoru na różnicę cosinusów i zapisanie alternatywy równań trygonometrycznych, np. $\sin \frac{x}{2} = 0$ lub $\sin \frac{3x}{2} = 0$

ALBO

wykorzystanie wzoru na cosinus podwojonego argumentu, zastosowanie podstawienia $t = \cos x$ i zapisanie równania kwadratowego, np. $2t^2 - t - 1 = 0$

ALBO

zapisanie, że $\cos 2x = \cos x \cdot [(2x = x + 2k\pi \text{ lub } 2x = -x + 2k\pi) \text{ i } k \in \mathbb{C}]$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Uwaga: Jeżeli zdający nie uwzględni koniecznego założenia i rozwiązań szuka w przedziale domkniętym $\langle 0, 2\pi \rangle$, to za etap 1. otrzymuje 0 pkt, a za etap 2. – maksymalną liczbę punktów, gdy konsekwentnie

do błędu otrzyma odpowiedź $x \in \left\{ 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi \right\}$.

Przykładowe rozwiązanie

Etap 1.

Z postaci równania wynika, że spełniony być musi warunek $\sin \frac{x}{4} \neq 0$. Rozwiążemy równanie $\sin \frac{x}{4} = 0$, by wykluczyć ze zbioru $\langle 0, 2\pi \rangle$ pierwiastki tego równania.

$$\sin \frac{x}{4} = 0 \Rightarrow \frac{x}{4} = k\pi \text{ i } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 4k\pi \text{ i } k \in \mathbb{Z}$$

$$(x \in \langle 0, 2\pi \rangle \text{ i } \sin \frac{x}{4} \neq 0) \Leftrightarrow x \in (0, 2\pi)$$

Etap 2.

Metoda 1.

Należy rozwiązać równanie $\cos 2x - \cos x = 0$. Do jego lewej strony zastosujemy wzór na różnicę cosinusów.

$$\cos 2x - \cos x = 0 \Rightarrow -2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \left(\sin \frac{x}{2} = 0 \text{ lub } \sin \frac{3x}{2} = 0 \right)$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} = k\pi \text{ i } k \in \mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow (x = 2k\pi \text{ i } k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin \frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3x}{2} = k\pi \text{ i } k \in \mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{2}{3}k\pi \text{ i } k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\left(x = 2k\pi \text{ lub } x = \frac{2}{3}k\pi \right) \text{ i } k \in \mathbb{Z}, \text{ czyli } x = \frac{2}{3}k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

Ponieważ $x \in (0, 2\pi)$, to rozwiązaniami są jedynie $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ i 2π .

$$x \in \left\{ \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi \right\}$$

Metoda 2.

Przekształcamy równanie do postaci równoważnej, stosując wzór na cosinus podwojonego argumentu $\cos 2x - \cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0$.

Wygodnie jest zastosować podstawienie $t = \cos x$ dla $t \in \langle -1, 1 \rangle$.

Otrzymujemy pomocniczo równanie kwadratowe, które następnie rozwiązujemy:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \quad \Delta = 9 \quad t_1 = -\frac{1}{2} \text{ lub } t_2 = 1$$

Na podstawie obliczeń zapiszemy alternatywę równań elementarnych z niewiadomą x :

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ lub } \cos x = 1$$

Zatem:

$$\left(x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \text{ lub } x = 2k\pi \right) \text{ i } k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \left\{ \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi \right\}$$

Metoda 3.

$$\cos 2x = \cos x \Leftrightarrow (2x = x + 2k\pi \text{ lub } 2x = -x + 2k\pi) \text{ i } k \in \mathbb{Z}$$

$$\left(x = 2k\pi \text{ lub } x = \frac{2}{3}k\pi \right) \text{ i } k \in \mathbb{Z}$$

Ponieważ $x \in (0, 2\pi)$, to rozwiązaniami są jedynie $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ i 2π .

$$x \in \left\{ \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi \right\}$$

Zadanie 5. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.</p> <p>3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.</p>	<p>Zdający:</p> <p>V.7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;</p> <p>V.4) odczytuje z wykresu funkcji dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;</p> <p>I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;</p> <p>V.13) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.</p>

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie poprawne – wyznaczenie zbioru wartości funkcji f , czyli przedziału $\langle -9, 40 \rangle$

2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – stwierdzenie, że pomocnicza funkcja o wzorze $g(t) = t^2 - 2t - 8$ jest określona dla $t \in \left\langle -\frac{1}{2}, 8 \right\rangle$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – podstawienie $t = 2^x$ i stworzenie pomocniczej funkcji $g(t) = t^2 - 2t - 8$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

Zapiszemy wzór tej funkcji w postaci ułatwiającej zastosowanie podstawienia:

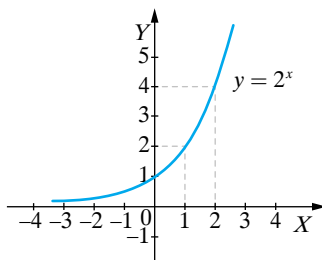
$$4^x - 2^{x+1} - 8 = (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8$$

Niech $t = 2^x$, wtedy wyrażenie $4^x - 2^{x+1} - 8$ zapisać możemy jako $t^2 - 2t - 8$.

Pomocniczą funkcją będzie funkcja $g(t) = t^2 - 2t - 8$.

Wyznaczymy teraz jej dziedzinę.

Z własności funkcji wykładniczej mamy, że jeśli $x \in \langle -1, 3 \rangle$, to 2^x przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $\left\langle \frac{1}{2}, 8 \right\rangle$.



Funkcja pomocnicza g ma wzór $g(t) = t^2 - 2t - 8$ i jest określona dla $\frac{1}{2} \leq t \leq 8$.

Na podstawie własności wykresu funkcji g podamy poszukiwany zbiór wartości. W celu analizy wykresu wyznaczamy miejsca zerowe funkcji g i wierzchołek W paraboli, której ten wykres jest fragmentem.

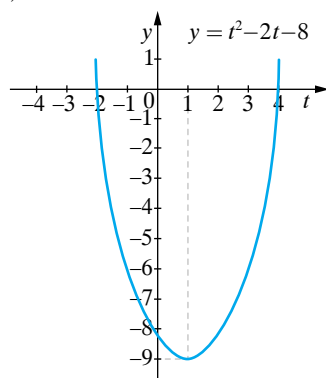
$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36, t_1 = \frac{2-6}{2} = -2, t_2 = 4$$

$$W = (1, -9)$$

Obliczymy wartości tej funkcji na krańcach jej dziedziny $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 - 8 = -8\frac{3}{4}$ i $g(8) = 64 - 16 - 8 = 40$.

Na rysunku jest narysowana część paraboli. Fragmentem tej paraboli jest też wykres funkcji g . Jego końcami są punkty paraboli $\left(\frac{1}{2}, -8\frac{3}{4}\right)$ i $(8, 40)$.



Najmniejszą wartością, jaką funkcja g osiągnie dla argumentów $t \in \left[\frac{1}{2}, 8\right]$, jest rzędna wierzchołka, czyli -9 , a największą jest 40 . Funkcja osiąga wszystkie wartości z przedziału $\langle -9, 40 \rangle$.

$$ZW_f = \langle -9, 40 \rangle.$$

Zadanie 6. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>IV. Rozumowanie i argumentacja.</p> <p>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilku-etapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.</p> <p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>XIII.3) (R) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu;</p> <p>4) (R) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;</p> <p>III.5) (R) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.</p>

Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie poprawne – funkcja f nie ma ekstremów dla $m \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, zapisanie warunków na brak zmiany znaku pochodnej $\begin{cases} -2m < 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \leq 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} -2m > 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \leq 0 \end{cases}$, w przypadku gdy licznik pochodnej jest wyrażeniem kwadratowymi, i uzasadnienie, że dla $m = 0$ pochodna funkcji ma postać $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ i nie zmienia znaku, lub pominięcie przypadku, gdy licznik pochodnej jest liniowy, i roz-

wiązanie warunków $\begin{cases} -2m < 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \leq 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} -2m > 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \leq 0 \end{cases}$ oraz uzyskanie odpowiedzi $m \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – uzasadnienie, że dla $m = 0$ pochodna funkcji ma postać $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ i nie zmienia znaku

ALBO

zapisanie warunków na to, by wyrażenie kwadratowe $-2mx^2 + 4mx - 1$ nie zmieniało znaku $\begin{cases} -2m < 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \leq 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} -2m > 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \leq 0 \end{cases}$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp – obliczenie pochodnej funkcji $f'(x) = \frac{-2mx^2 + 4mx - 1}{(x-1)^2}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Uwaga: Za rozwiązanie, w którym jedynym błędem jest uwzględnienie warunku $\Delta < 0$ zamiast $\Delta \leq 0$, zdający otrzymuje 3 punkty.

Przykładowe rozwiązanie

Obliczamy pochodną funkcji f :

$$f'(x) = \frac{-4mx(x-1) - 1 + 2mx^2}{(x-1)^2} = \frac{-2mx^2 + 4mx - 1}{(x-1)^2}$$

$f'(x)$ nie zmienia znaku, gdy wyrażenie $-2mx^2 + 4mx - 1$ nie zmienia znaku dla $x \in D$

Tak będzie, gdy $m = 0$. Wtedy $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$ dla każdej wartości $x \in D$.

Dla $m \neq 0$ wyrażenie $-2mx^2 + 4mx - 1$ nie zmieni znaku, gdy:

$$\begin{cases} -2m < 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \leq 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} -2m > 0 \\ \Delta = 16m^2 - 8m \leq 0 \end{cases}$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m , dla których jest spełniona ta alternatywa:

$$\begin{cases} m > 0 \\ 16m\left(m - \frac{1}{2}\right) \leq 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} m < 0 \\ 16m\left(m - \frac{1}{2}\right) \leq 0 \end{cases}$$

Zatem:

$$\begin{cases} m > 0 \\ m \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} m < 0 \\ m \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{cases}, \text{ więc } m \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$$

Po uwzględnieniu parametru $m = 0$ otrzymujemy, że $m \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$.

$$m \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$$

Zadanie 7. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>IV. Rozumowanie i argumentacja.</p> <p>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilku-etapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.</p> <p>3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.</p>	<p>Zdający:</p> <p>VIII.3) (R) przeprowadza dowody geometryczne;</p> <p>VIII.11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;</p> <p>II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ i $a^2 - b^2$.</p>

Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie poprawne – pełne uzasadnienie tezy

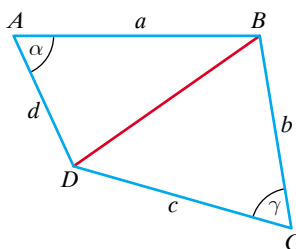
3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci – doprowadzenie do tezy bez pisemnego uzasadnienia, że dla dowolnych liczb rzeczywistych iloczyn tych liczb jest mniejszy lub równy połowie sumy ich kwadratów, bądź bez uzasadnienia, że skoro a, b, c i d są jako długości boków liczbami dodatnimi, to uzasadnienie nierówności wynika z zależności między średnimi

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – wykorzystanie faktu, że wartość funkcji sinus jest zawsze mniejsza lub równa 1 i oszacowanie pola $P \leq \frac{1}{2}a \cdot d + \frac{1}{2}b \cdot c$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania – zapisanie pola czworokąta jako sumy pól dwóch trójkątów z zastosowaniem wzoru wykorzystującego sinus kąta między dwoma bokami trójkąta

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie



Zapiszemy pole czworokąta $ABCD$ jako sumę pól trójkątów ABD i DBC :

$$P = \frac{1}{2}a \cdot d \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin \gamma$$

Ponieważ $\sin \alpha \leq 1$ i $\sin \gamma \leq 1$, to prawdziwa jest nierówność:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot d \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin \gamma \leq \frac{1}{2}a \cdot d + \frac{1}{2}b \cdot c$$

Ponadto ponieważ dla dowolnych liczb a i d prawdziwa jest nierówność $(a-d)^2 \geq 0$, to możemy wyka-
zać, że dla dowolnych liczb a i d prawdziwa jest nierówność $ad \leq \frac{a^2 + d^2}{2}$:

$$(a-d)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ad + d^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + d^2 \geq 2ad \Rightarrow ad \leq \frac{a^2 + d^2}{2}$$

Analogicznie można wykazać prawdziwość nierówności $bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2}$. Wykorzystując te nierówności, otrzymujemy, że:

$$\frac{1}{2}a \cdot d + \frac{1}{2}b \cdot c = \frac{1}{2}(a \cdot d + b \cdot c) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 + d^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} \right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$$

Zatem:

$$P \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} \quad \text{c.n.d.}$$

Zadanie 8. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.</p> <p>3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.</p> <p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>IV. Rozumowanie i argumentacja.</p> <p>4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.</p>	<p>Zdający:</p> <p>IX.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;</p> <p>IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostokątność do innej prostej, styczność do okręgu).</p>

Zasady oceniania

6 pkt – rozwiązanie poprawne i uzyskanie odpowiedzi: $A = (-1, 4)$, $B = (-5, 8)$ i $C = (3, 12)$

5 pkt – rozwiązanie, w którym zostały wyznaczone współrzędne punktów A , B i C , ale popełniono przy tym błędy rachunkowe

4 pkt – rozwiązanie, w którym wyznaczono współrzędne punktów A i B

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – wyznaczenie współrzędnych punktu A oraz równania prostej będącej osią symetrii tego trójkąta $-y = x + 9$

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – wyznaczenie współrzędnych punktu wspólnego prostej równoległej do prostej AB i przechodzącej przez D oraz prostej zawierającej ramię AC – punktu $(1, 8)$

ALBO

wyznaczenie współrzędnych punktu A oraz wyznaczenie równania prostej równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt D

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania – wyznaczenie współrzędnych punktu A

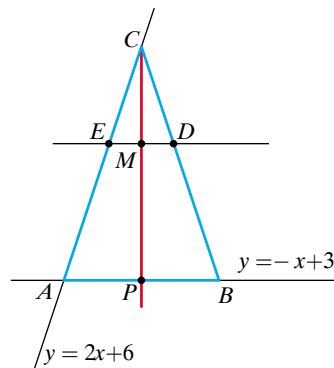
ALBO

wyznaczenie równania prostej równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt D

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

Na rysunku przedstawiono trójkąt ABC z zaznaczonym punktem D . Przez ten punkt jest poprowadzona prosta równoległa do podstawy AB trójkąta. Przecina ona ramię AC trójkąta w punkcie E . Punkt M , leżący na prostej będącej osią symetrii trójkąta, jest środkiem odcinka ED .



Wyznaczamy współrzędne punktu A . Spełniają one układ równań:

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 2x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6 = -x + 3 \\ y = 2x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}, \text{ czyli } A = (-1, 4)$$

Prosta ED ma równanie postaci $y = -x + b$.

Współrzędne punktu D spełniają to równanie, więc:

$$10 = 1 + b \Rightarrow b = 9$$

Równaniem prostej ED jest równanie $y = -x + 9$.

Wyznaczamy współrzędne punktu E : $\begin{cases} y = -x + 9 \\ y = 2x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6 = -x + 9 \\ y = 2x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}$, czyli $E = (1, 8)$.

$$M \text{ jest środkiem odcinka } DE, \text{ czyli } M = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{10+8}{2} \right) \quad M = (0, 9)$$

Prosta CM jest prostopadła do prostej AB , czyli jej równanie ma postać $y = x + k$.

M należy do tej prostej, czyli $k = 9$.

Prosta CM ma równanie $y = x + 9$.

Wyznaczamy współrzędne punktu P , który jest środkiem odcinka AB i jednocześnie jest punktem wspólnym prostych CM i AB .

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = x + 9 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 3 = x + 9 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$$

Zatem: $P = (-3, 6)$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka B :

$$\left(\frac{-1+x_B}{2} = -3 \text{ i } \frac{4+y_B}{2} = 6 \right) \Rightarrow (x_B = -5 \text{ i } y_B = 8), \text{ czyli } B = (-5, 8)$$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka C :

$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 9 = 2x + 6 \\ y = x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 12 \end{cases}, \text{ czyli } C = (3, 12)$$

$A = (-1, 4)$, $B = (-5, 8)$ i $C = (3, 12)$

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
<p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.</p> <p>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.</p> <p>II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.</p> <p>1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.</p>	<p>Zdający:</p> <p>VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów; V.1) określa funkcję jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);</p> <p>XIII. rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.</p> <p>albo</p> <p>XIII.5) (R) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.</p>

Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie poprawne – pole powierzchni prostokąta spełniającego warunki zadania jest równe $18\frac{3}{8} \text{ dm}^2$

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci – brak obliczenia pola

ALBO

obliczenie największego pola prostokąta bez pełnego uzasadnienia istnienia wartości największej, osiągniętej dla $x = 5\frac{1}{4}$ (w tym bez porównania największego pola z polami prostokątów o bokach długości

3 dm i 5 dm oraz 3 dm i 6 dm)

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – zapisanie wzoru funkcji opisującej pole prostokąta, np. $P(x) = x \Rightarrow \left(7 - \frac{2}{3}x\right)$

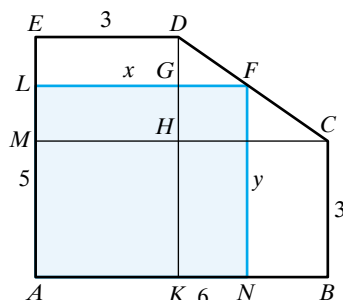
i $x \in [3, 6]$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania – uzależnienie długości jednego boku prostokąta od długości drugiego boku, np. $y = \frac{21 - 2x}{3}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

Metoda 1:



Obliczamy pola największych prostokątów uzyskanych w wyniku tylko jednego cięcia.

Pole prostokąta $EDKA$ jest równe $3 \cdot 5 = 15 \text{ dm}^2$.

Pole prostokąta $MCBA$ jest równe $3 \cdot 6 = 18 \text{ dm}^2$.

W przypadku gdy linie cięcia przecinają się na odcinku DC :

$$P = x \cdot y \text{ i } x \in [3, 6] \text{ i } y \in [3, 5]$$

$$\triangle DGF \sim \triangle DHC (kkk), \text{ więc } \frac{|DG|}{|GF|} = \frac{|DH|}{|HC|}, \text{ czyli } \frac{5-y}{x-3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{5-y}{x-3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 15-3y = 2x-6 \Rightarrow y = \frac{21-2x}{3} = 7 - \frac{2}{3}x$$

Metoda 2:

Pole pięciokąta to suma pola prostokąta $EDKA$ i trapezu $FCBN$:

$$P = 3 \cdot 5 + \frac{3+5}{2} \cdot 3 = 27$$

Pole tego pięciokąta można też policzyć jako sumę pól prostokąta $ALFN$ i trapezów $FNBC$ i $EDFL$.

$$P = x \cdot y + \frac{x+3}{2} \cdot (5-y) + \frac{3+y}{2} \cdot (6-x)$$

Mamy:

$$x \cdot y + \frac{x+3}{2} \cdot (5-y) + \frac{3+y}{2} \cdot (6-x) = 27 \Rightarrow 2xy + (x+3)(5-y) + (3+y)(6-x) = 54 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2xy + 5x - xy + 15 - 3y + 18 - 3x + 6y - xy = 54 \Rightarrow 2x + 3y = 21 \Rightarrow y = 7 - \frac{2}{3}x$$

Zapisałiśmy pole P prostokąta, w przypadku gdy linie cięcia przecinają się na odcinku DC , jako funkcję jednej zmiennej.

$$P(x) = x \cdot \left(7 - \frac{2}{3}x\right) \text{ i } x \in [3, 6], \text{ czyli } P(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 7x$$

Obliczamy pochodną tej funkcji:

$$P'(x) = -\frac{4}{3} \cdot x + 7 \text{ i badamy jej znak:}$$

$$-\frac{4}{3} \cdot x + 7 > 0 \Rightarrow \frac{4}{3}x < 7 \Rightarrow x < \frac{21}{4}, \text{ więc:}$$

$$P'(x) > 0 \text{ dla } x \in \left(3, 5\frac{1}{4}\right)$$

$$P'(x) < 0 \text{ dla } x \in \left(5\frac{1}{4}, 6\right)$$

Ze zmiany znaku pochodnej wynika istnienie maksimum w punkcie $x = 5\frac{1}{4}$, z monotoniczności wynika, że w tym punkcie osiąga funkcja także wartość największą.

Uwaga: Możliwe jest uzasadnienie osiągnięcia wartości największej na podstawie własności funkcji kwadratowej.

$$P\left(5\frac{1}{4}\right) = \frac{21}{4} \cdot \left(7 - \frac{2 \cdot 21}{4}\right) = \frac{21}{4} \cdot \left(7 - \frac{7}{2}\right) = \frac{21 \cdot 7}{8} = \frac{147}{8} = 18\frac{3}{8} \text{ dm}^2$$

To pole jest większe od pól prostokątów uzyskanych w wyniku tylko jednego cięcia.

Zadanie 10. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów i ostrosłupów; X.3) (R) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów.

Zasady oceniania

5 pkt – rozwiązanie poprawne – wyznaczenie objętości $V = 36 \text{ cm}^3$ i pola powierzchni całkowitej $P_c = (36 + 36\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

4 pkt – rozwiązanie, w którym przy zastosowaniu poprawnej metody obliczono objętości i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa, ale popełniono przy tym błędy rachunkowe

3 pkt – rozwiązanie, w którym wyznaczono długość wysokości ostrosłupa i długość jego krawędzi bocznej $b = 3\sqrt{3}$ i $H = 3$

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – porównanie pól ściany bocznej obliczonych różnymi sposobami i obliczenie długości krawędzi bocznej: $b = 3\sqrt{3}$

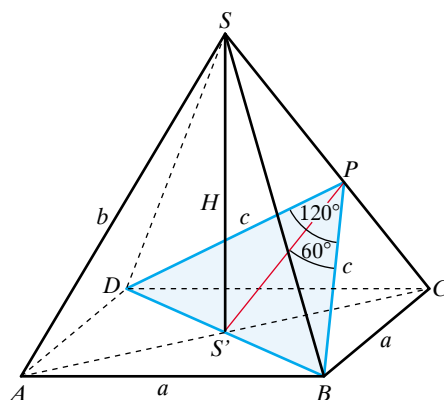
1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania – poprawne wybranie trójkąta z kątem miary 120° i wyznaczenie długości ramienia tego trójkąta, niech c oznacza tę długość, wtedy $c = 2\sqrt{6}$

ALBO

wyznaczenie w zależności od długości krawędzi bocznej, np. b , i długości krawędzi podstawy, a ($a = 6$), długości wysokości ściany bocznej ostrosłupa $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie



$a = 6 \text{ cm}$

W trójkącie $S'BS$ $\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{c} \Rightarrow c = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$.

Wysokość trójkąta BCS opuszczona z S ma długość $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Jeśli porównamy obliczone na dwa sposoby pola, otrzymujemy równość:

$$\frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \Rightarrow 2\sqrt{6}b = 6\sqrt{b^2 - 9}$$

$$24b^2 = 36b^2 - 324 \Rightarrow b = 3\sqrt{3}$$

$$H^2 + (3\sqrt{2})^2 = 27 \Rightarrow H^2 = 9 \Rightarrow H = 3$$

$$V = 36 \text{ cm}^3$$

$$P_c a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} = 36 + 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{3} = 36 + 12\sqrt{18} = 36 + 36\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

Zadanie 11. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XI.1) (R) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów.

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie poprawne – obliczenie liczby kartek: 36 wraz z uzasadnieniem

2 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale rozwiązanie nie zostało doprowadzone poprawnie do końcowej postaci – obliczenie, ile jest kartek, w przypadku gdy każdego dnia ma być rozwiązywana inna liczba zadań – 24

ALBO

obliczenie, ile jest kartek, w przypadku gdy podczas dwóch dni ma być rozwiązywana ta sama liczba zadań – 12

ALBO

obliczenie obu wyżej wymienionych liczb z błędem rachunkowym

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – rozdział zadań na trzy grupy: $\{1, 1, 8\}$, $\{1, 2, 7\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 2, 6\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 4\}$, $\{3, 3, 4\}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma istotnego postępu, albo brak rozwiązania

Uwaga: Jeśli zdający pominie jeden przypadek spośród: $\{1, 1, 8\}$, $\{1, 2, 7\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 2, 6\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 4\}$, $\{3, 3, 4\}$, to za całe zadanie (przy poprawnym rozumowaniu) może najwyżej otrzymać 1 pkt. Jeśli zdający, wypisując zapisy na poszczególnych karteczkach, pominie jeden przypadek, to za całe zadanie może otrzymać najwyżej 2 pkt.

Przykładowe rozwiązanie

Rozdział zadań na trzy grupy:

$\{1, 1, 8\}$, $\{1, 2, 7\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 2, 6\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 4\}$, $\{3, 3, 4\}$, np.: $\{1, 1, 8\}$

Dzień	Poniedziałek	Wtorek	Środa
Liczba zadań	1	1	8
	1	8	1
	8	1	1

$\{1, 2, 7\}$ jest $3! = 6$ przestawień

Dzień	Poniedziałek	Wtorek	Środa
Liczba zadań	1	2	7
	1	7	2
	2	1	7
	2	7	1
	7	1	2
	7	2	1

Jeśli podczas dwóch dni jest rozwiązywana ta sama liczba zadań, to takie ustawienia są 3; jeżeli każdego dnia jest rozwiązywana inna liczba zadań, to takich ustawień jest $3! = 6$.

Liczba kartek będzie równa $4 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 36$.

Zadanie 12. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę; XII.2) (R) stosuje schemat Bernoullego.

Zasady oceniania

5 pkt – rozwiązanie poprawne – uzyskanie odpowiedzi „należy wysiać przynajmniej 6 nasion”

4 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – zapisanie nierówności z niewiadomą n oznaczającą liczbę nasion, które trzeba wysiać, aby z prawdopodobieństwem większym od 0,99 można było stwierdzić, że przynajmniej jedno z nich wykiełkuje: $(0,4)^n < 0,01$

3 pkt – rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania – zapisanie, z użyciem schematu Bernoullego, prawdopodobieństwa zdarzenia, że przy wysianiu n nasion przynajmniej jedno

wykiełkuje, np. $P(A) = 1 - \binom{n}{0}(0,6)^0 \cdot (0,4)^n$

2 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany istotny postęp – zauważenie, że w zadaniu mamy do czynienia ze schematem Bernoullego, gdzie próbą jest wysiew jednego nasiona i prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie jest równe $p = 0,6$

1 pkt – rozwiązanie, w którym został dokonany niewielki postęp, ale konieczny do rozwiązania zadania – obliczenie na podstawie danych z tabeli siły kiełkowania: 60%

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie ma niewielkiego postępu, albo brak rozwiązania

Przykładowe rozwiązanie

Siła kiełkowania jest równa $\frac{60 + 66 + 92 + 110 + 106 + 166}{1000} 100\% = 60\%$.

Niech próbą Bernoullego będzie wysianie jednego nasiona, a sukcesem – jego wykiełkowanie. Prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $p = 0,6$.

A – zdarzenie, że spośród wysianych n ziaren wykiełkowało przynajmniej jedno

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A jest równe prawdopodobieństwu tego, że w schemacie n prób Bernoullego sukces pojawi się przynajmniej raz.

$$P(A) = P(S_n \geq 1) = 1 - P(S_n = 0) = 1 - \binom{n}{0}(0,6)^0 \cdot (0,4)^n$$

$$1 - \binom{n}{0}(0,6)^0 \cdot (0,4)^n > 0,99 \Rightarrow 1 - (0,4)^n > 0,99 \Rightarrow (0,4)^n < 0,01$$

Oszacujemy, jakie musi być n , aby zachodziła ta nierówność.

Ponieważ $(0,4)^5 = 0,01024 > 0,01$ i $(0,4)^6 = 0,004096 < 0,01$, to $n \geq 6$.

Odpowiedź

Należy wysiać przynajmniej 6 nasion.

Matura 2023

Arkusze do nowej matury
dostępne w **Multitece**

Chcę zobaczyć

