

**WYPEŁNIA ZDAJĄCY**

**KOD**

--	--	--

**PESEL**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**Miejsce na naklejkę.**

Sprawdź, czy kod na naklejce to

**E-100.**

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.  
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

# EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

## POZIOM ROZSZERZONY

DATA: **2 czerwca 2022 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **14:00**

CZAS PRACY: **180 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

**WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY**



Uprawnienia zdającego do:

- nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę
- dostosowania zasad oceniania
- dostosowania w zw. z dyskalkulią.



EMAP-R0-**100**-2206

### Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 26 stron (zadania 1–15).  
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj  pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.
6. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
7. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
8. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
9. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

**Zadanie 1. (0–1)**

Wiadomo, że  $\log_5 2 = a$  i  $\log_5 3 = b$ . Wtedy liczba  $\log_{18} 40$  jest równa

A.  $\frac{3a+1}{a+b}$

B.  $\frac{2a+1}{a+b}$

C.  $\frac{2a+1}{a+2b}$

D.  $\frac{3a+1}{2b+a}$

**Zadanie 2. (0–1)**

Granica  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{0,5x^2 + 3,5x + 6}{-x^2 + 2x + 15}$  jest równa

A.  $\left(-\frac{1}{8}\right)$

B.  $\frac{1}{16}$

C.  $\left(-\frac{1}{16}\right)$

D.  $\frac{7}{4}$

**Zadanie 3. (0–1)**

Sumą wektorów  $\vec{a} = \left[2 + 2m, \frac{2}{3}n + 1\right]$  oraz  $\vec{b} = [n + 1, m + 2]$  jest wektor  $\vec{c} = [0, 0]$ .

Wynika stąd, że

A.  $m = 1$  i  $n = 3$ .

B.  $m = -9$  i  $n = -21$ .

C.  $m = 3$  i  $n = -9$ .

D.  $m = -1$  i  $n = 0$ .

**Zadanie 4. (0–1)**

Pole trójkąta ostrokątnego o bokach 5 i 8 jest równe 12. Długość trzeciego boku tego trójkąta jest równa

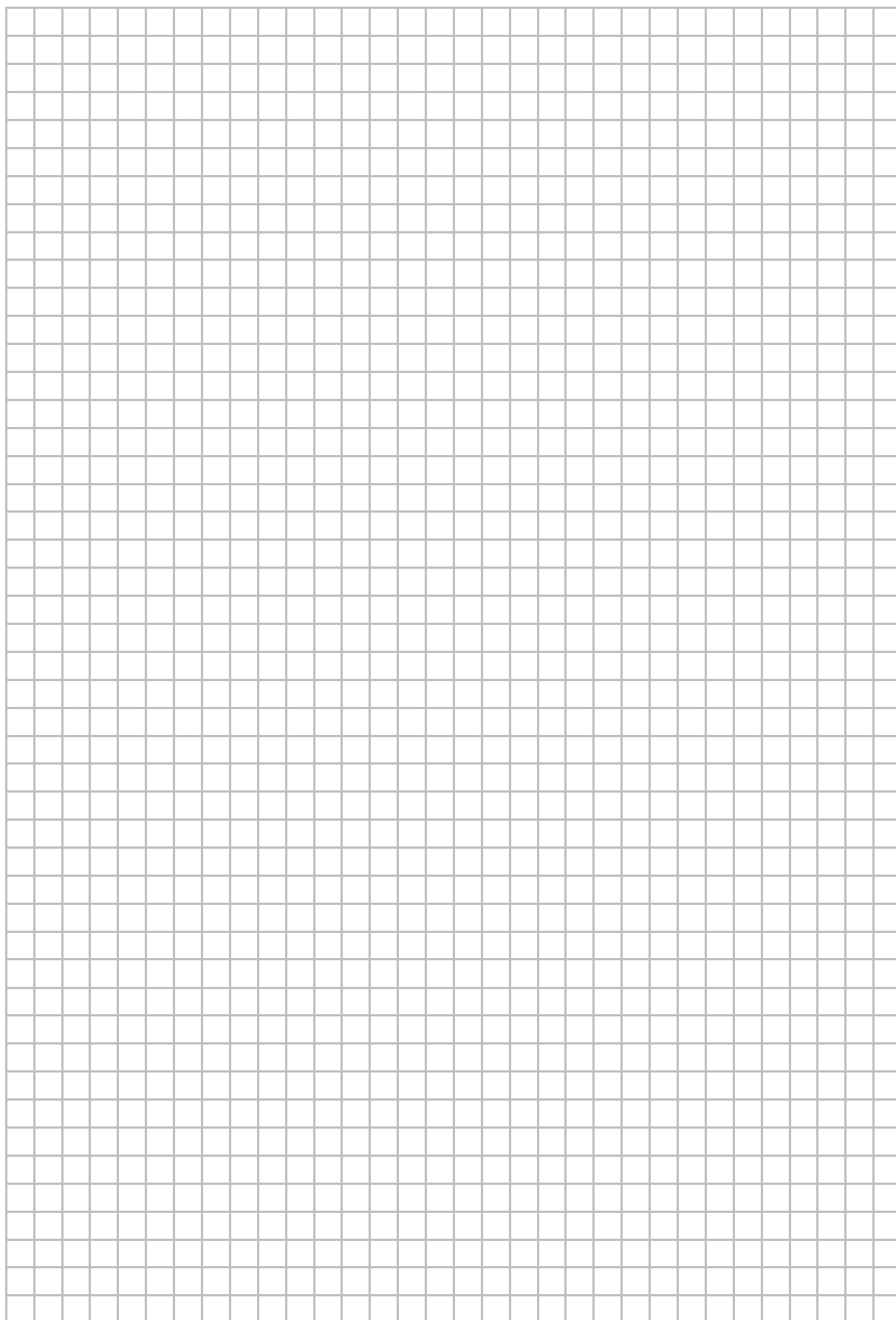
A. 5

B. 8

C.  $\sqrt{41}$

D.  $\sqrt{143}$

## **BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)**

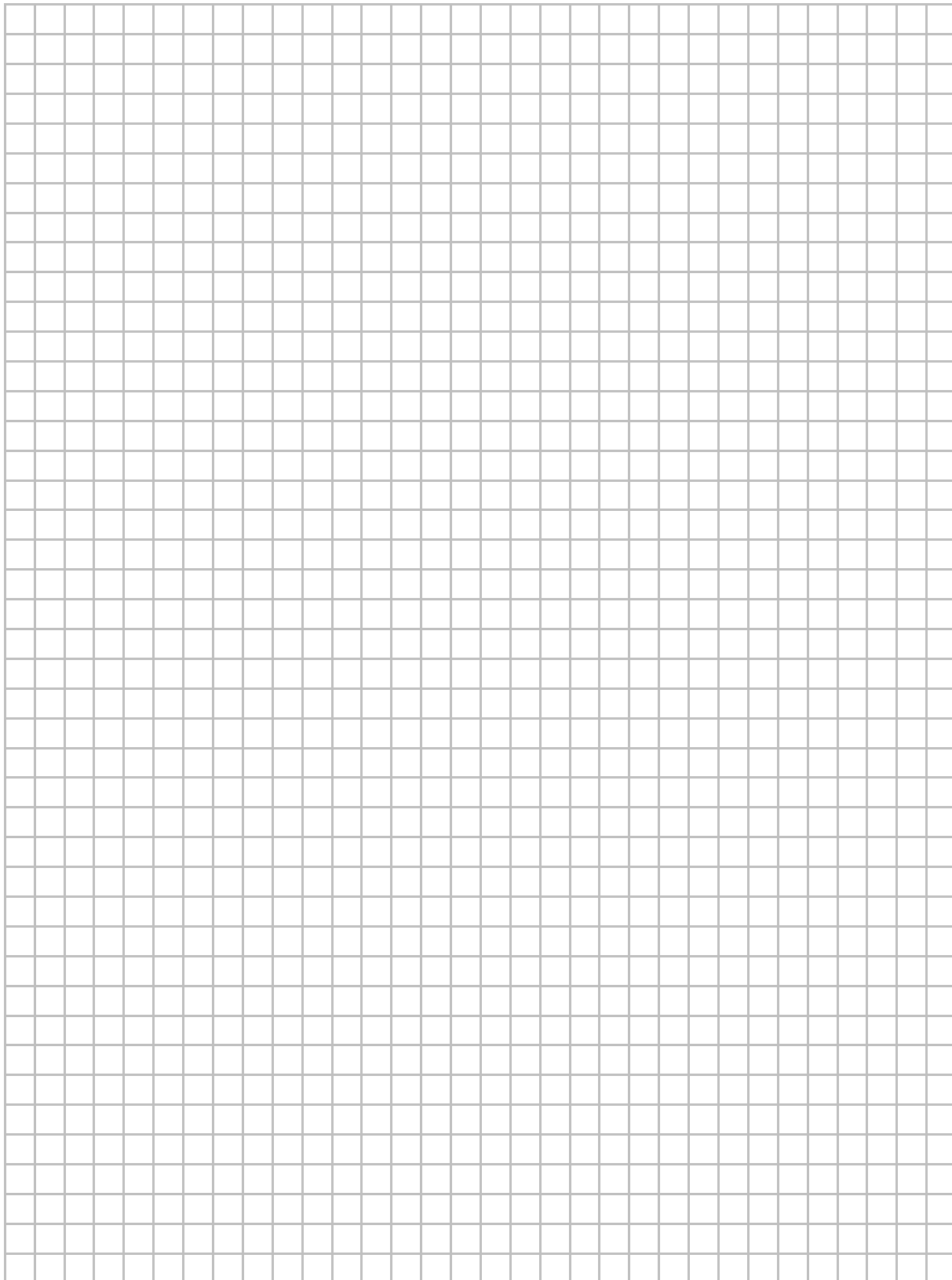




**Zadanie 6. (0–3)**

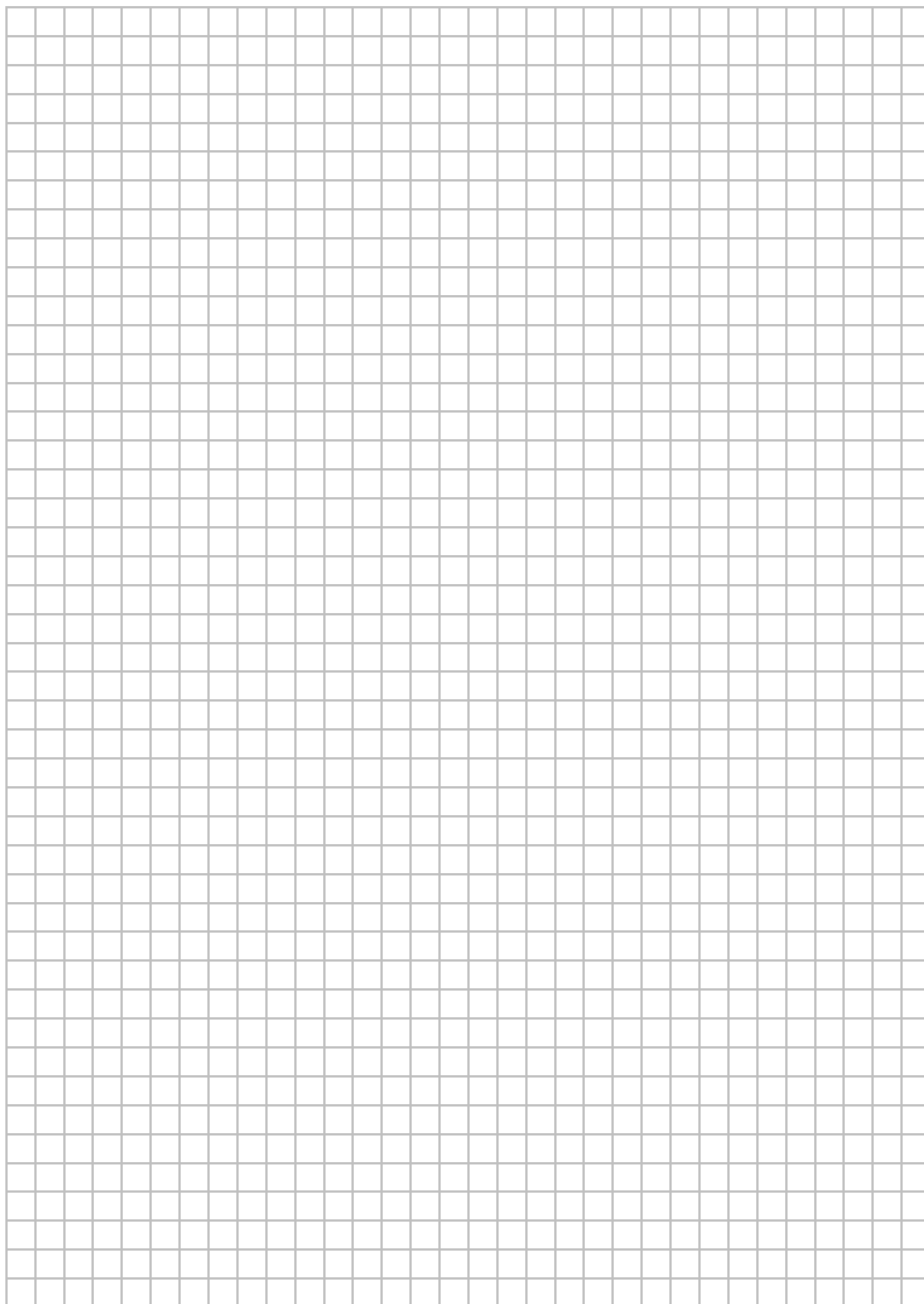
Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  i dla każdej liczby rzeczywistej  $y$  takich, że  $x \neq y$ , spełniona jest nierówność

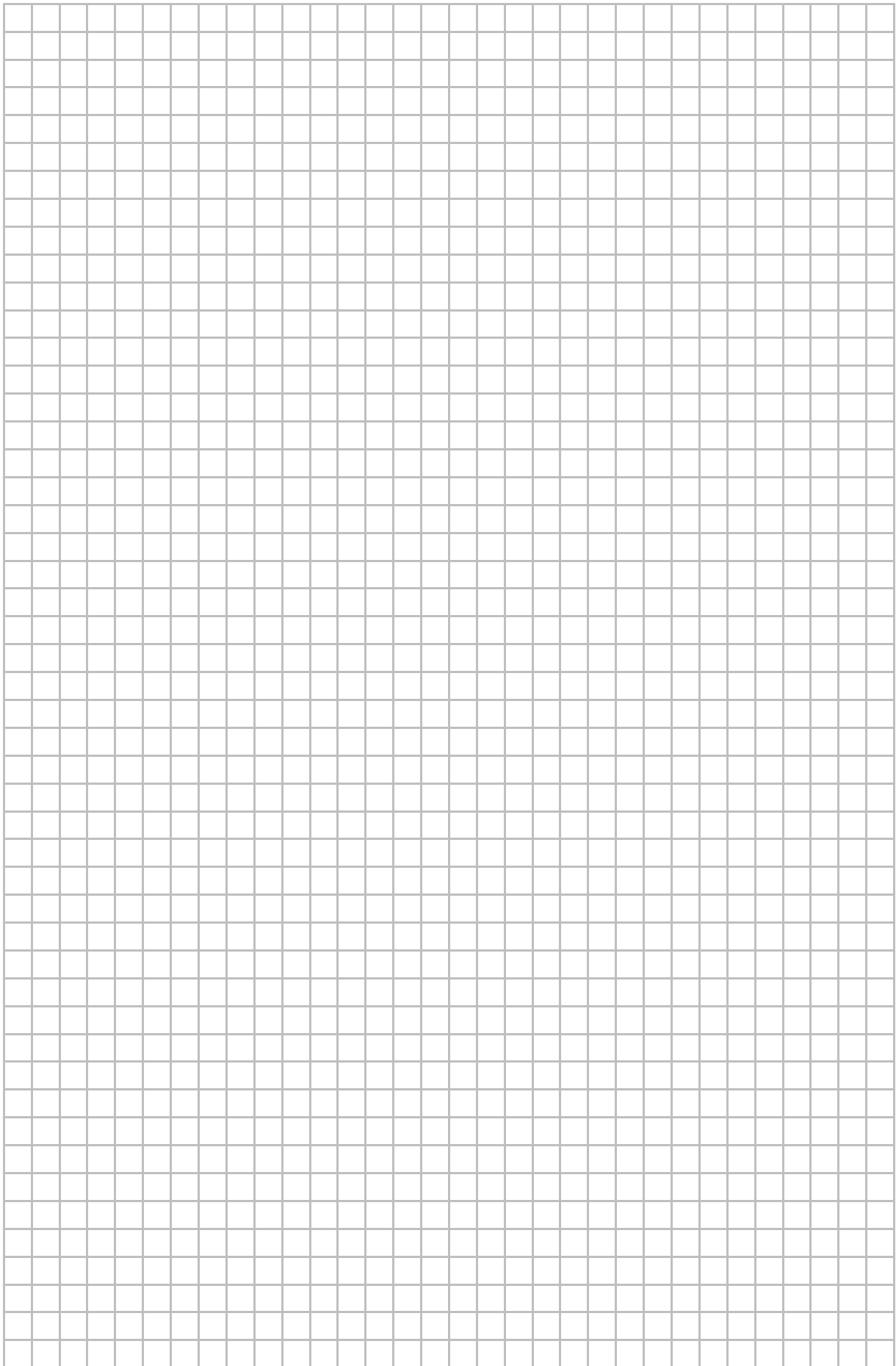
$$x^4 + y^4 > xy(x^2 + y^2)$$



**Zadanie 7. (0–3)**

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste.

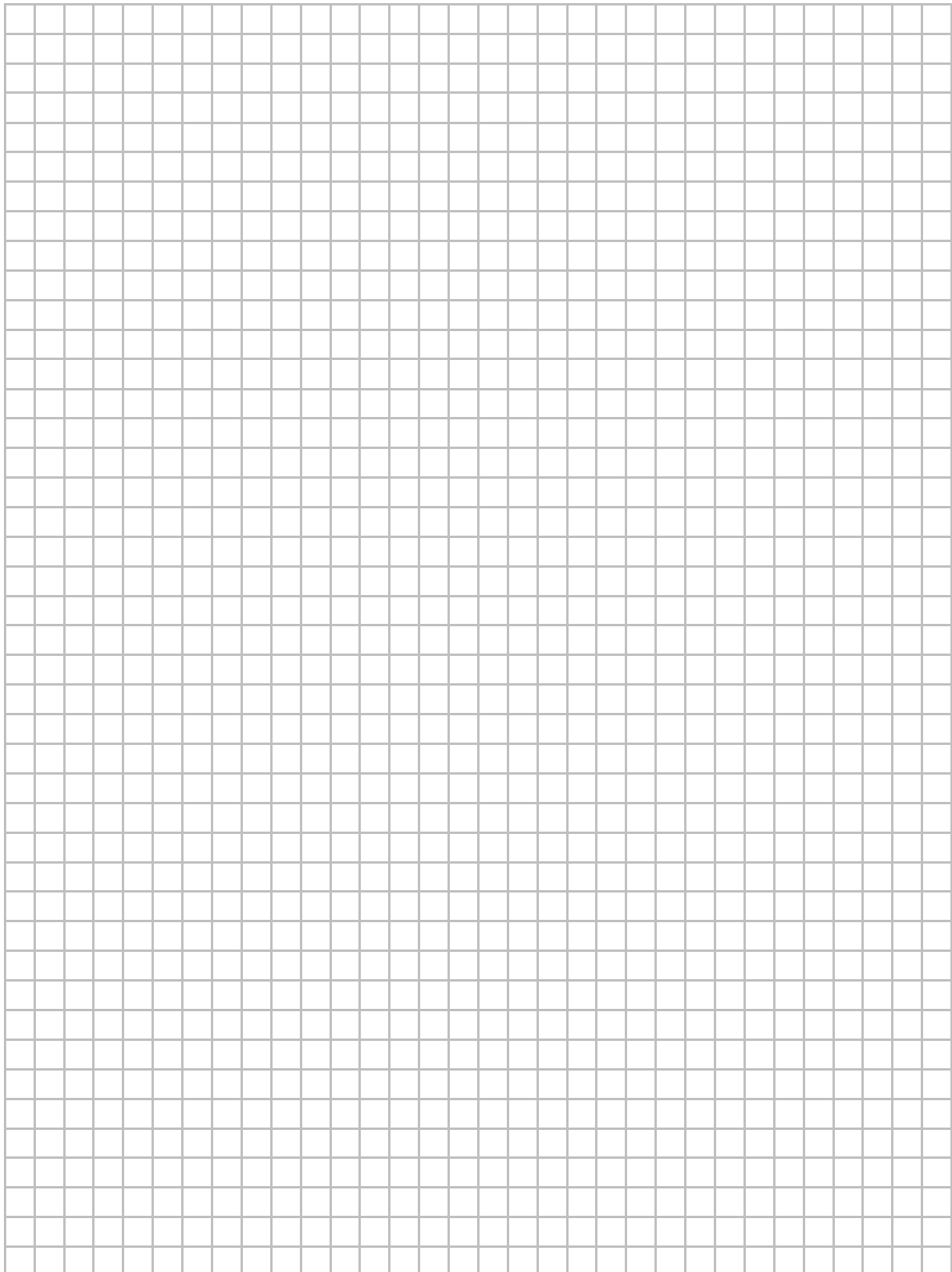


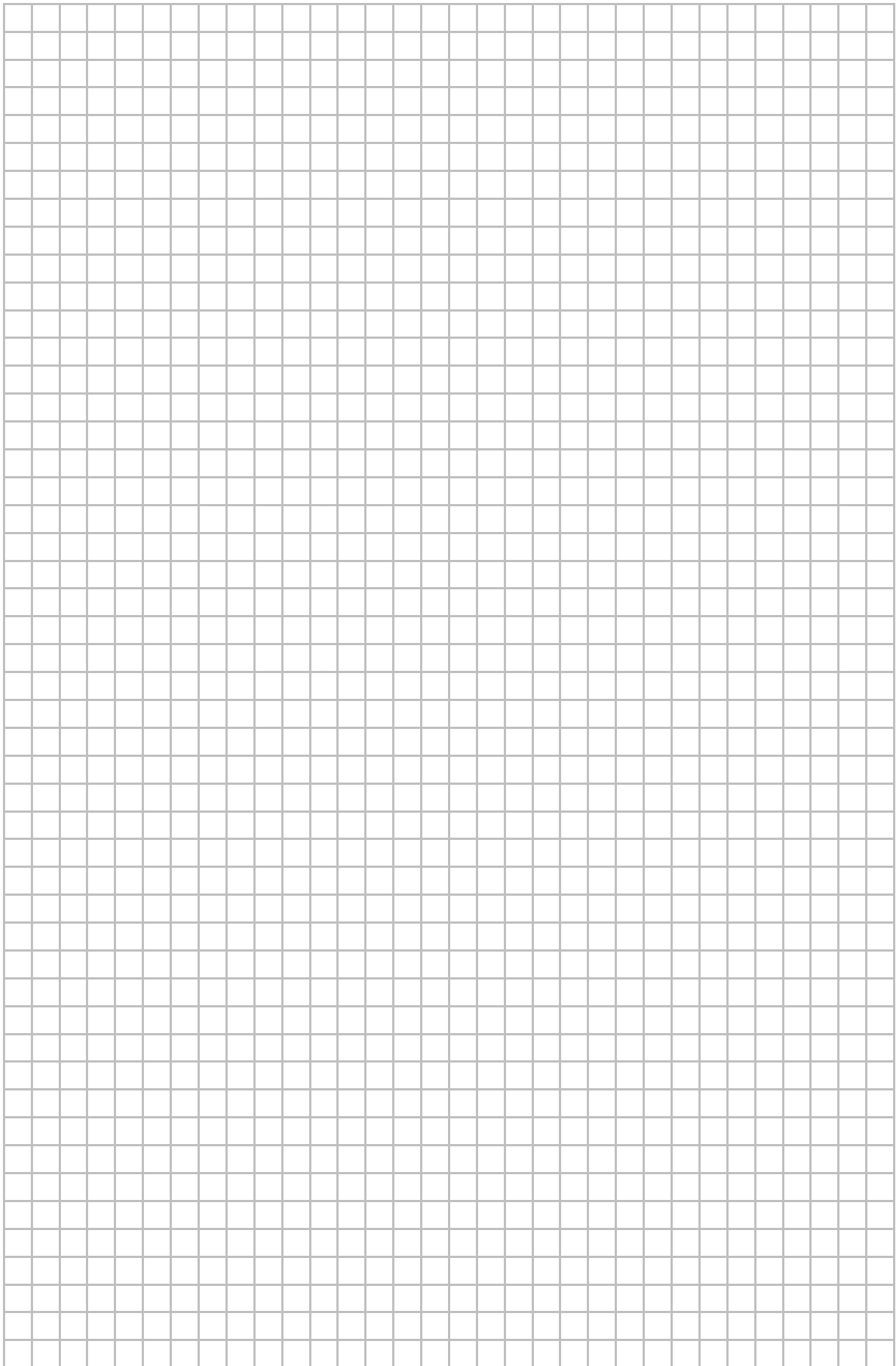


**Zadanie 8. (0–3)**

Rozwiąż nierówność

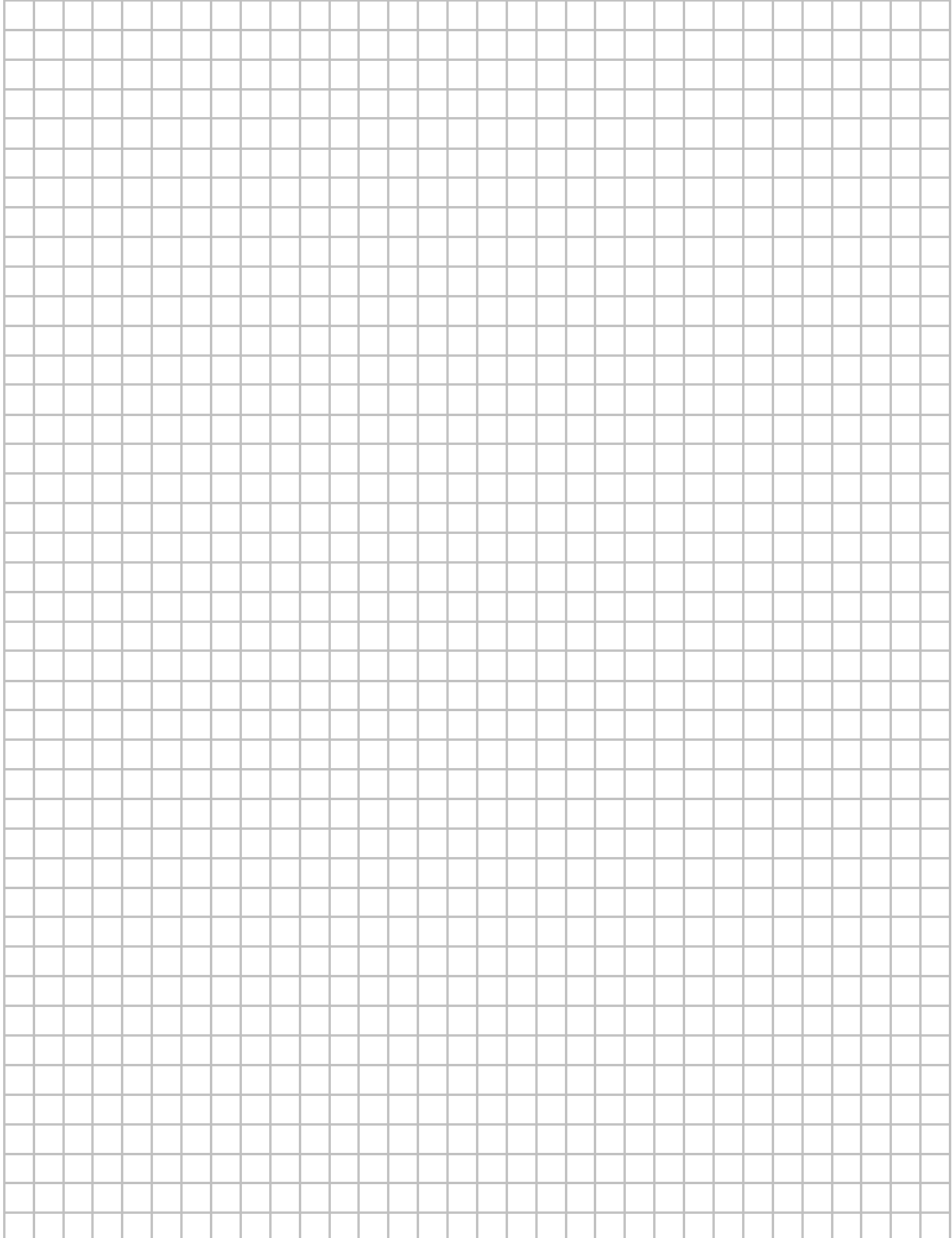
$$\frac{3x + 1}{2x + 1} \leq \frac{3x + 4}{2x + 3}$$

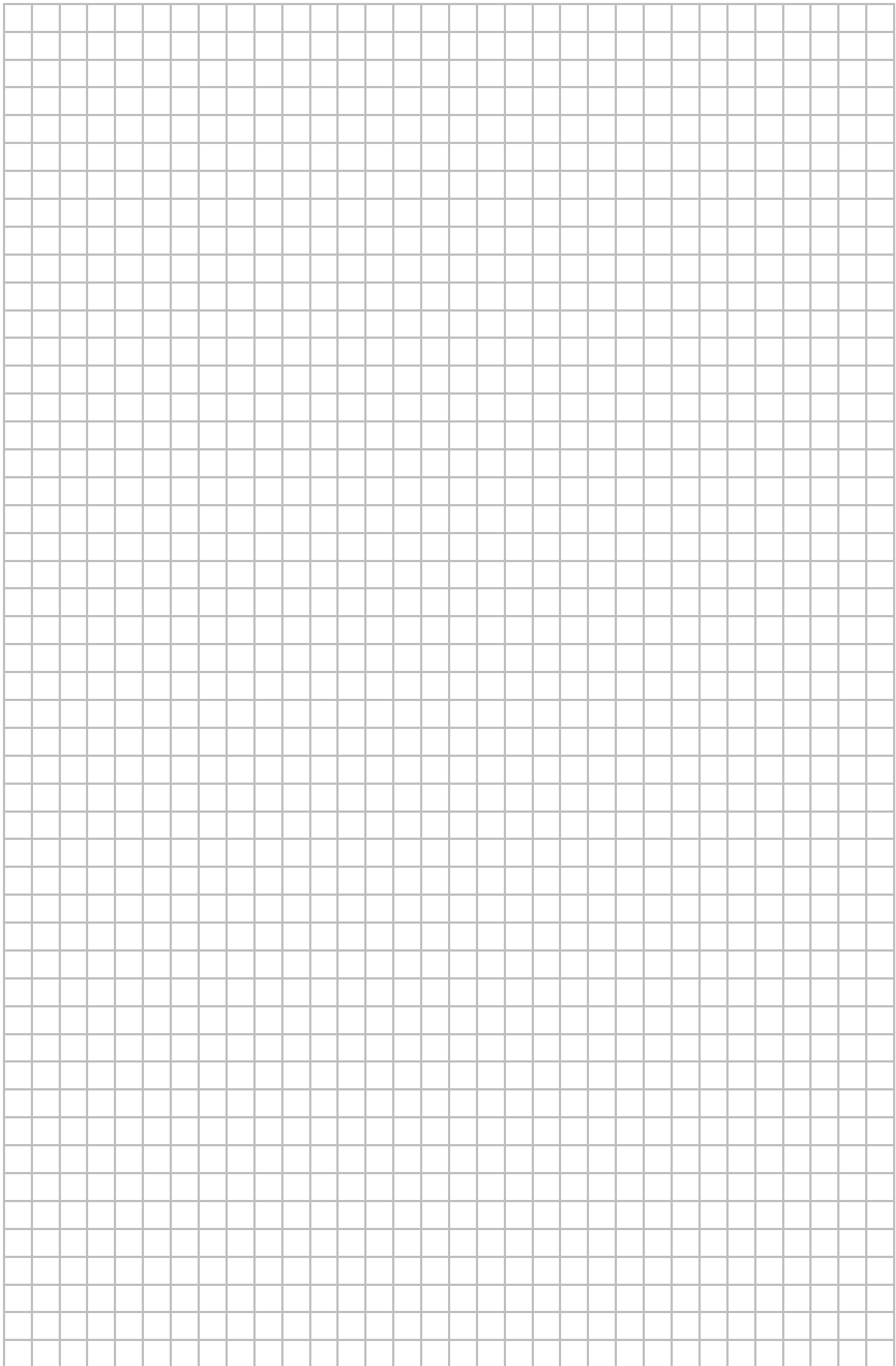




**Zadanie 9. (0–3)**

W trapezie  $ABCD$  o podstawach  $AB$  i  $CD$  przez punkt  $O$  przecięcia się przekątnych poprowadzono dwie proste równoległe do boków  $BC$  i  $AD$ . Prosta równoległa do boku  $BC$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $B'$ , a prosta równoległa do boku  $AD$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $A'$ . Wykaż, że  $|AA'| = |BB'|$ .



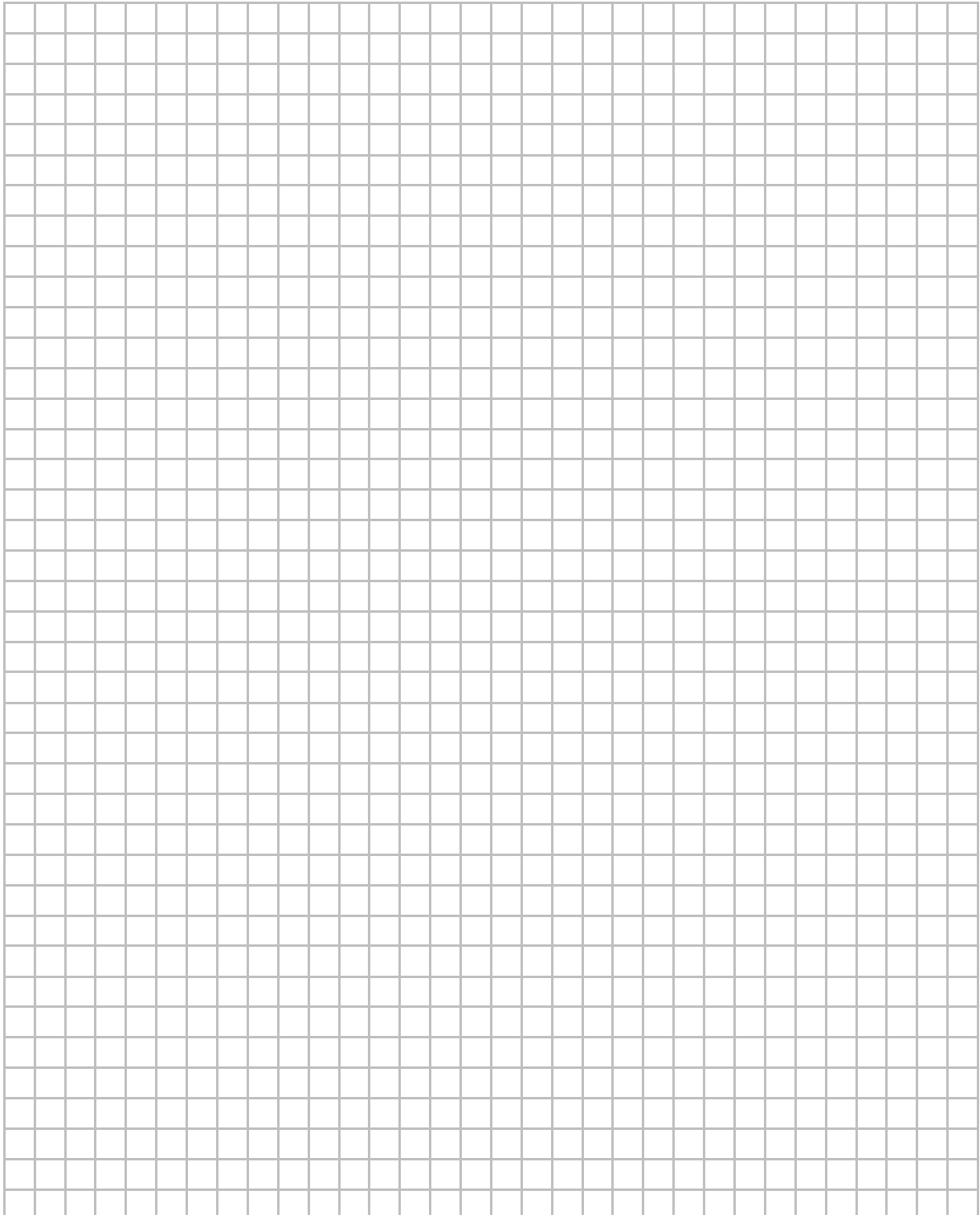


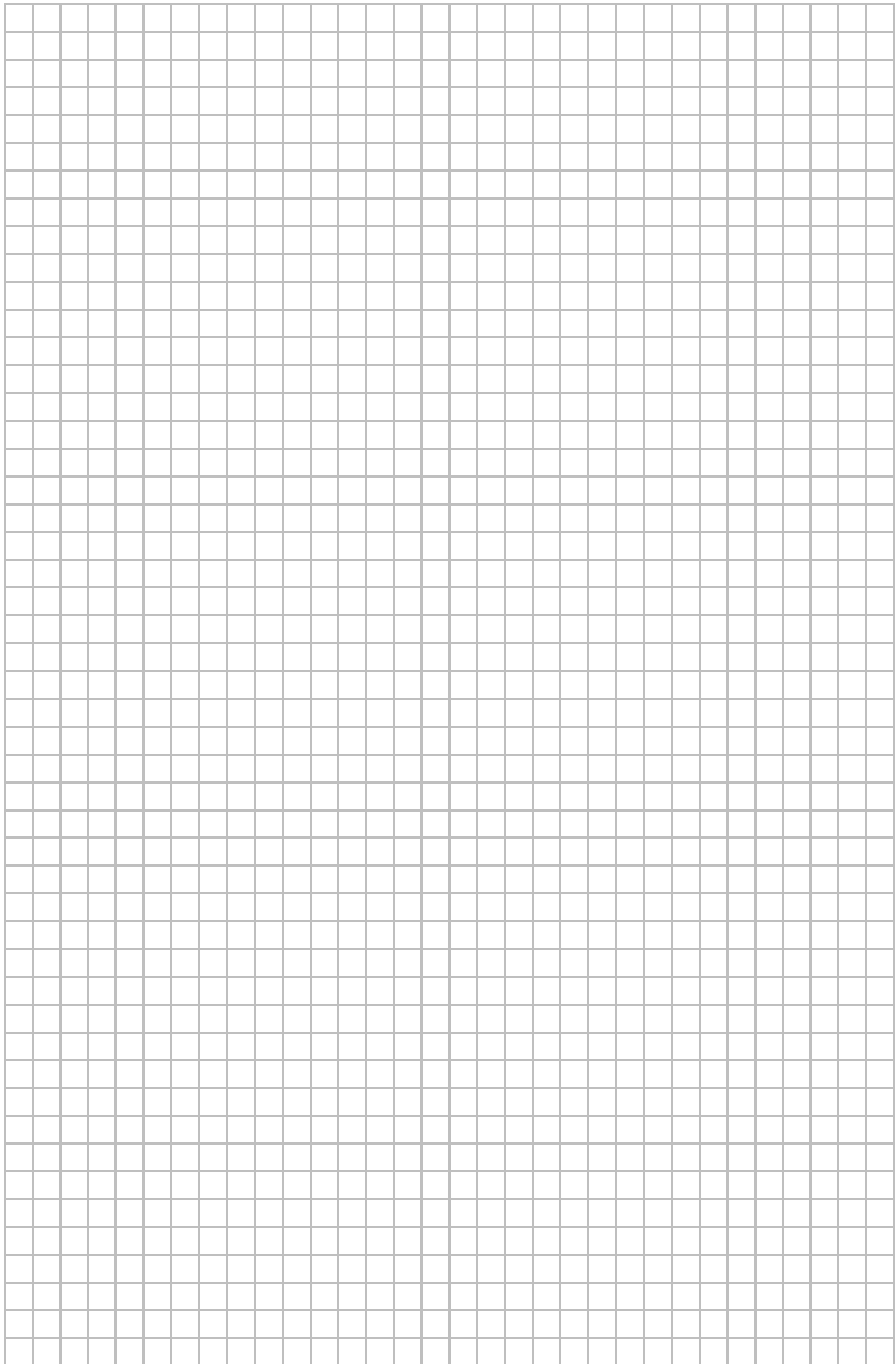
**Zadanie 10. (0–4)**

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny  $(a_n)$ , określony dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ , którego iloraz  $q$  jest równy pierwszemu wyrazowi i spełnia warunek  $|q| < 1$ .

Stosunek sumy  $S_N$  wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych do sumy  $S_P$  wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równy różnicy tych sum,

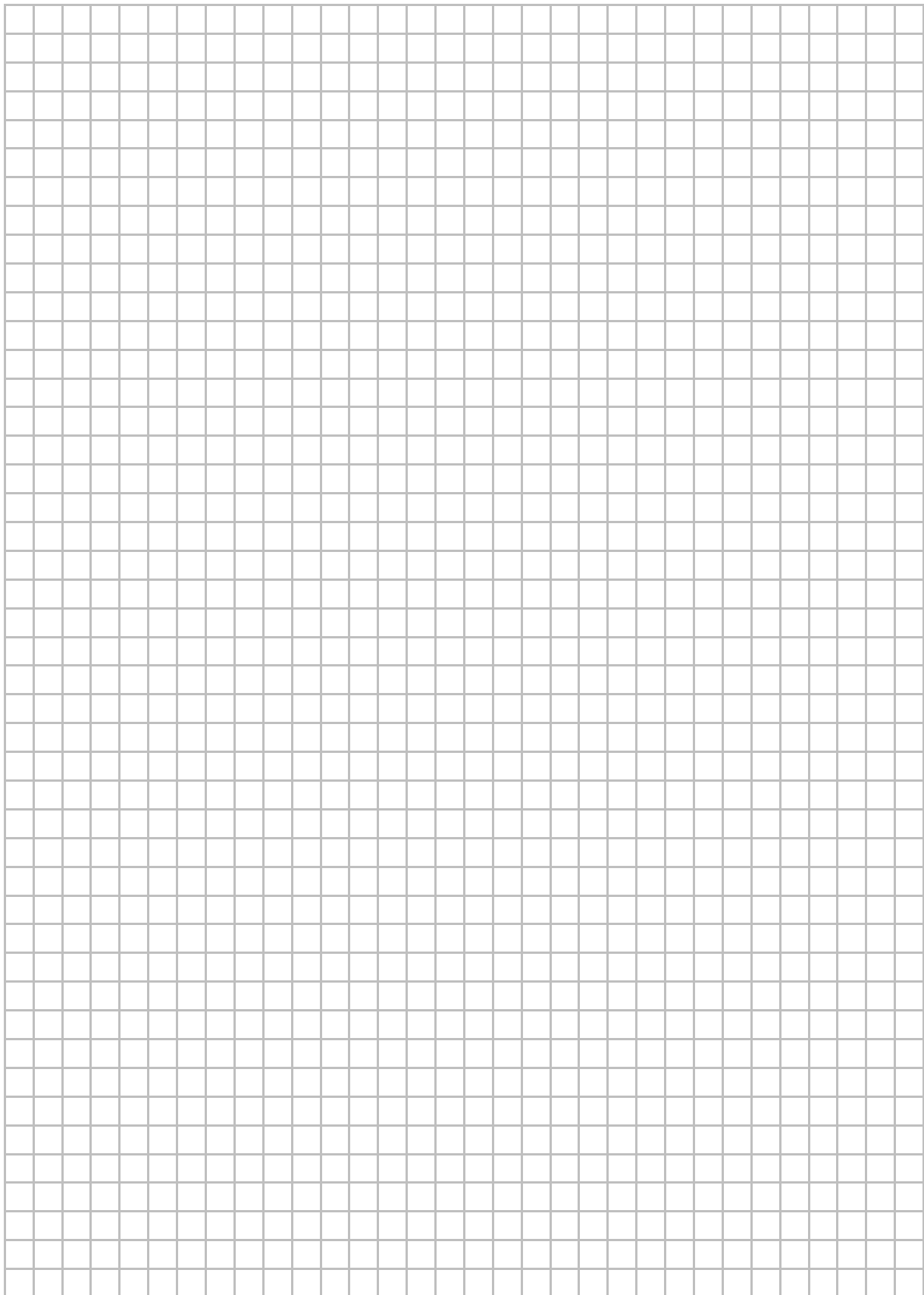
tj.  $\frac{S_N}{S_P} = S_N - S_P$ . Oblicz  $q$ .

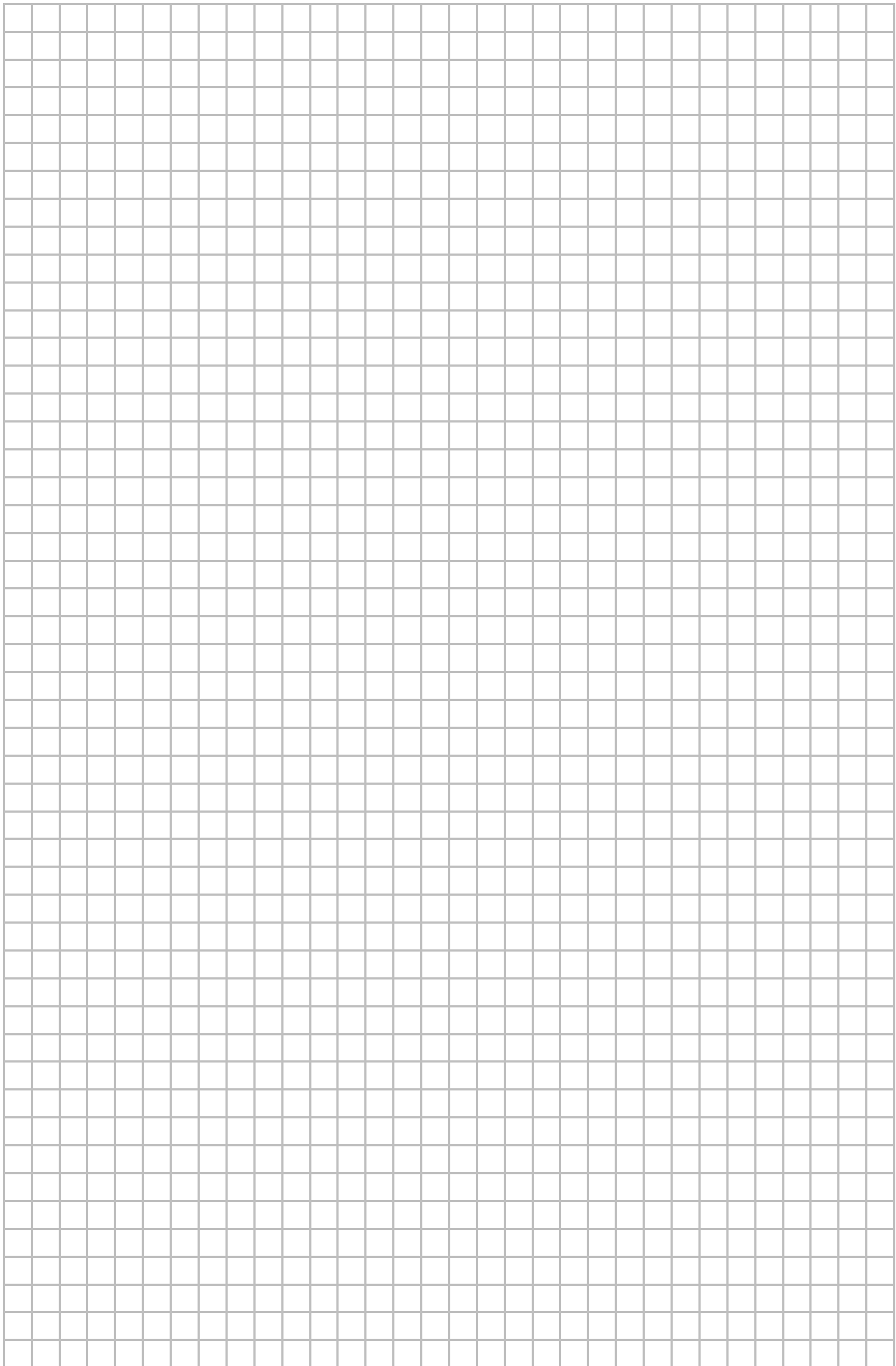




**Zadanie 11. (0–4)**

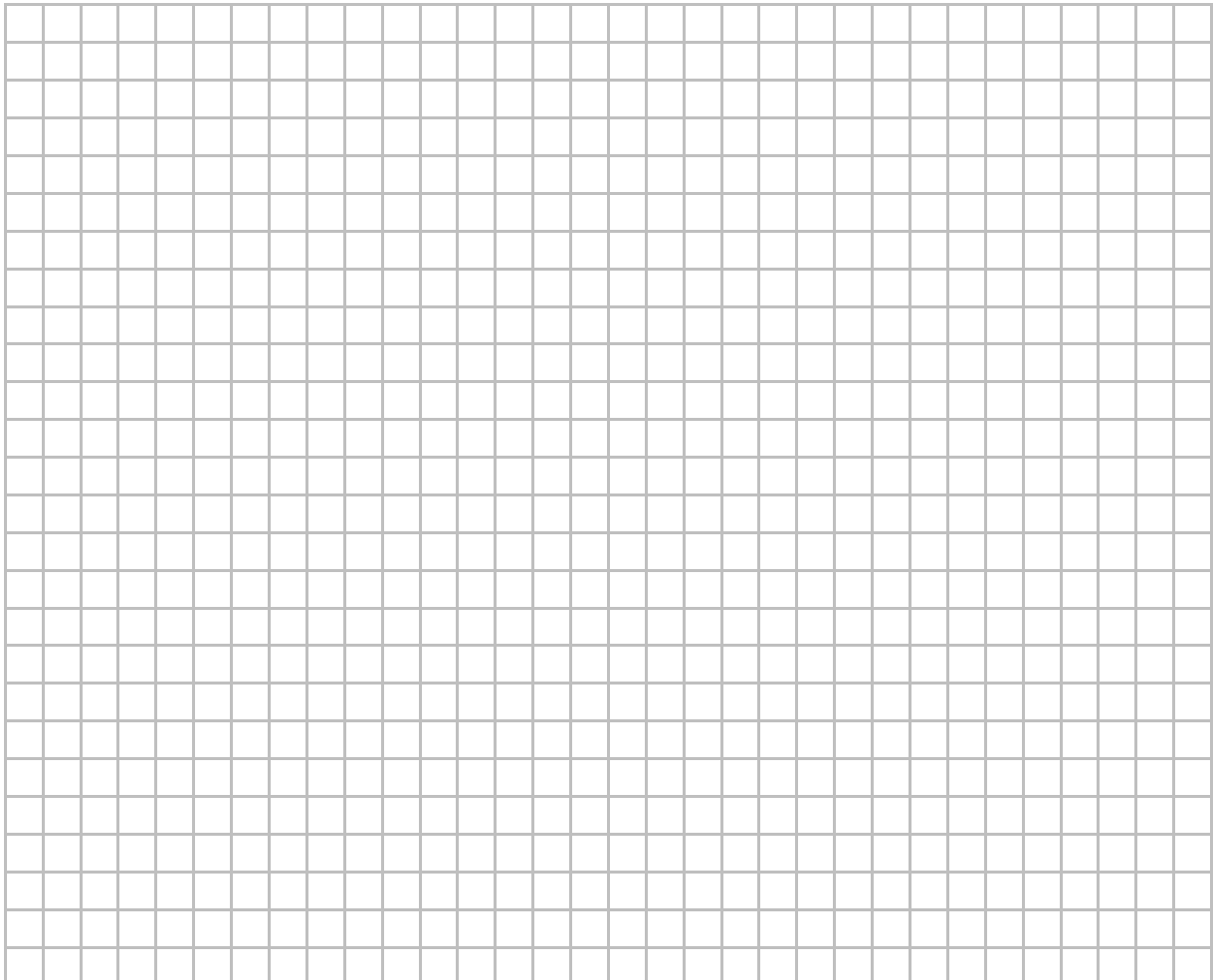
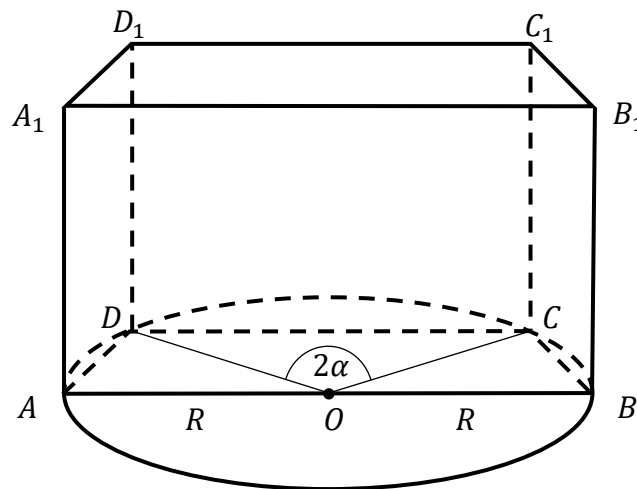
Rozwiąż równanie  $\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$  w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$ .

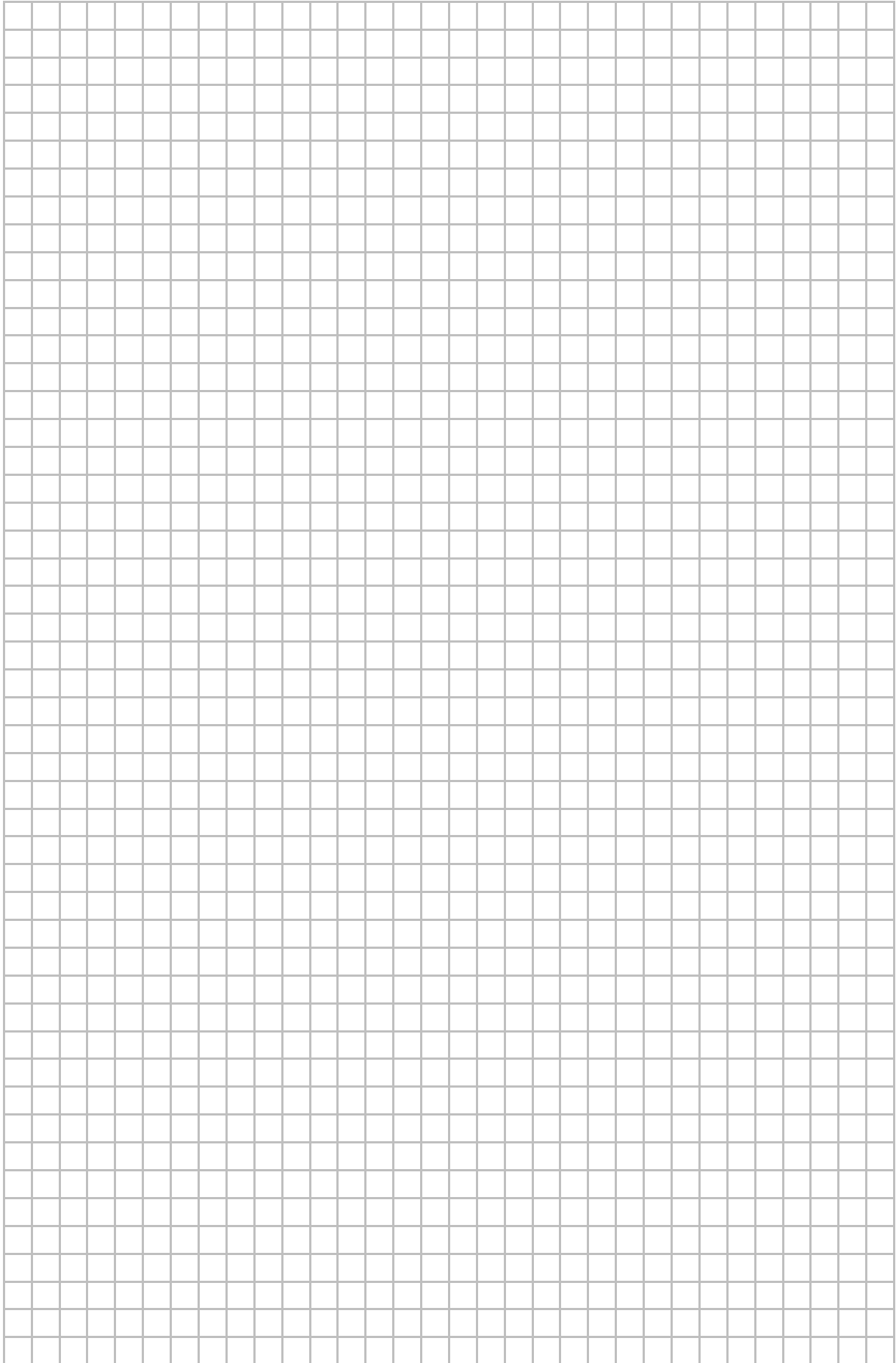




**Zadanie 12. (0–5)**

Podstawą graniastostupa prostego  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  jest trapez równoramienny  $ABCD$  wpisany w okrąg o środku  $O$  i promieniu  $R$ . Dłuższa podstawa  $AB$  trapezu jest średnicą tego okręgu, a krótsza – cięciwą odpowiadającą kątowi środkowemu o mierze  $2\alpha$  (zobacz rysunek). Przekątna ściany bocznej zawierającej ramię trapezu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze  $\alpha$ . Wyznacz objętość tego graniastostupa jako funkcję promienia  $R$  i miary kąta  $\alpha$ .





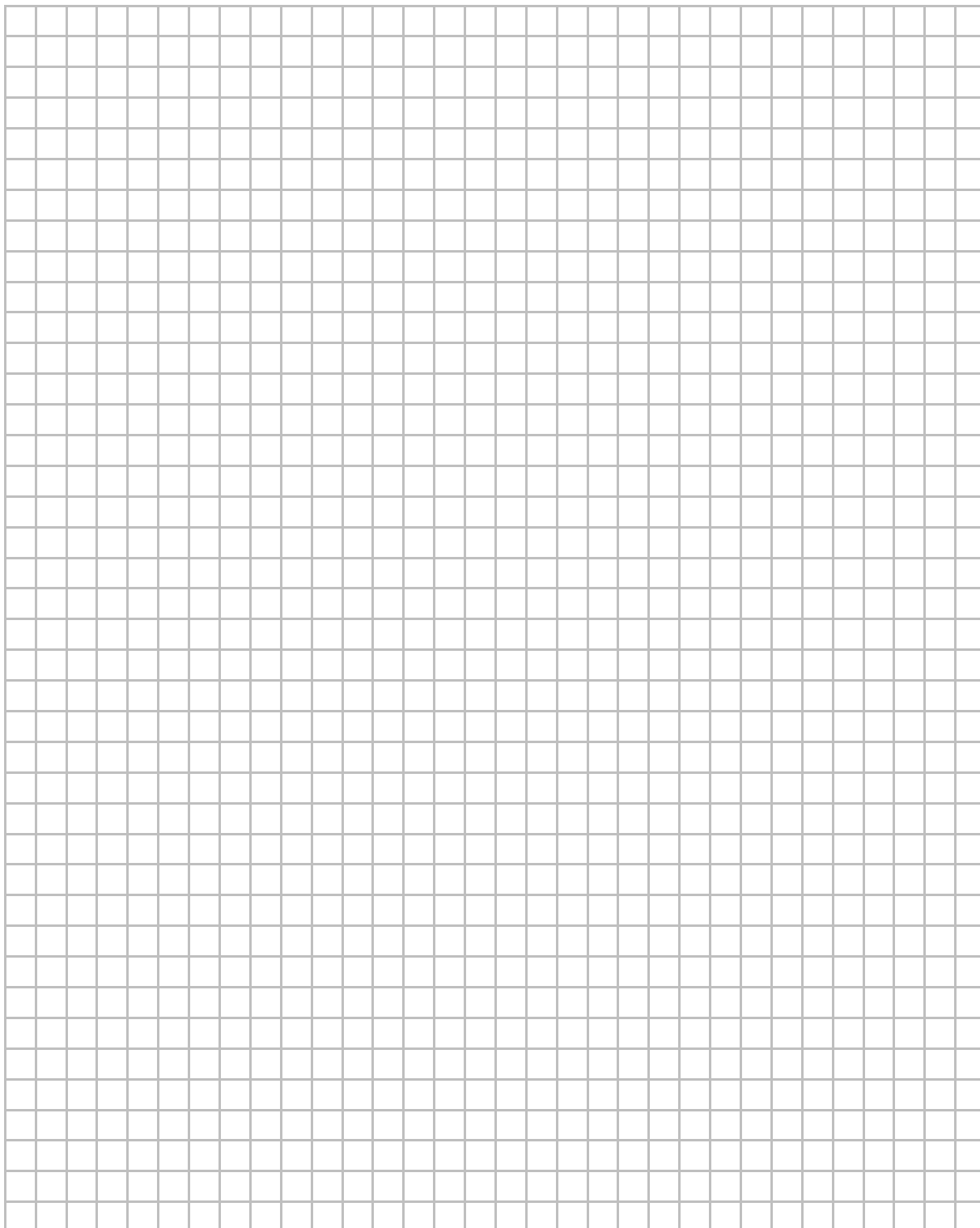
**Zadanie 13. (0–6)**

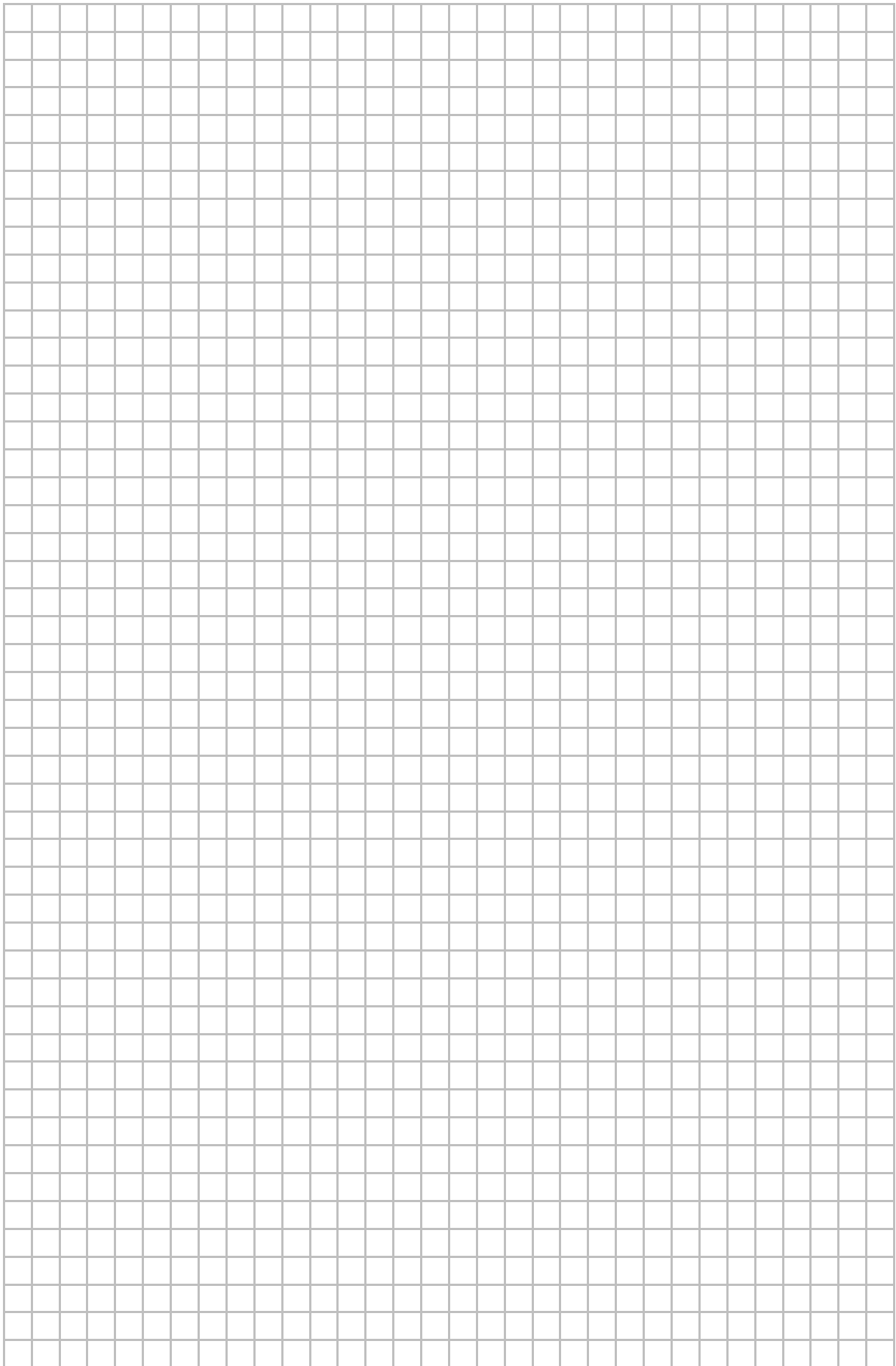
Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie

$$(x - 4)[x^2 + (m - 3)x + m^2 - m - 6] = 0$$

ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste  $x_1, x_2$  oraz  $x_3$ , spełniające warunek

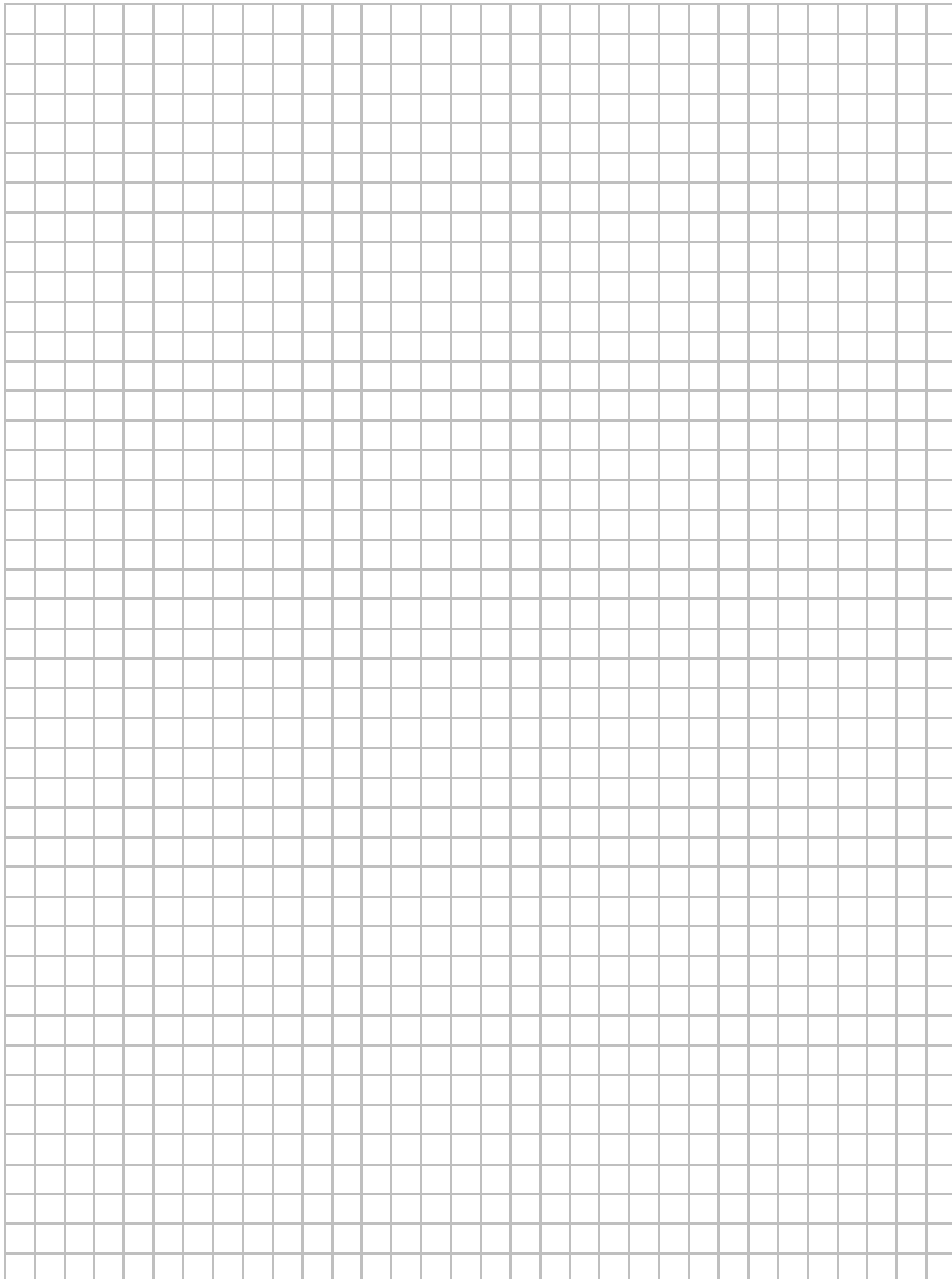
$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$$

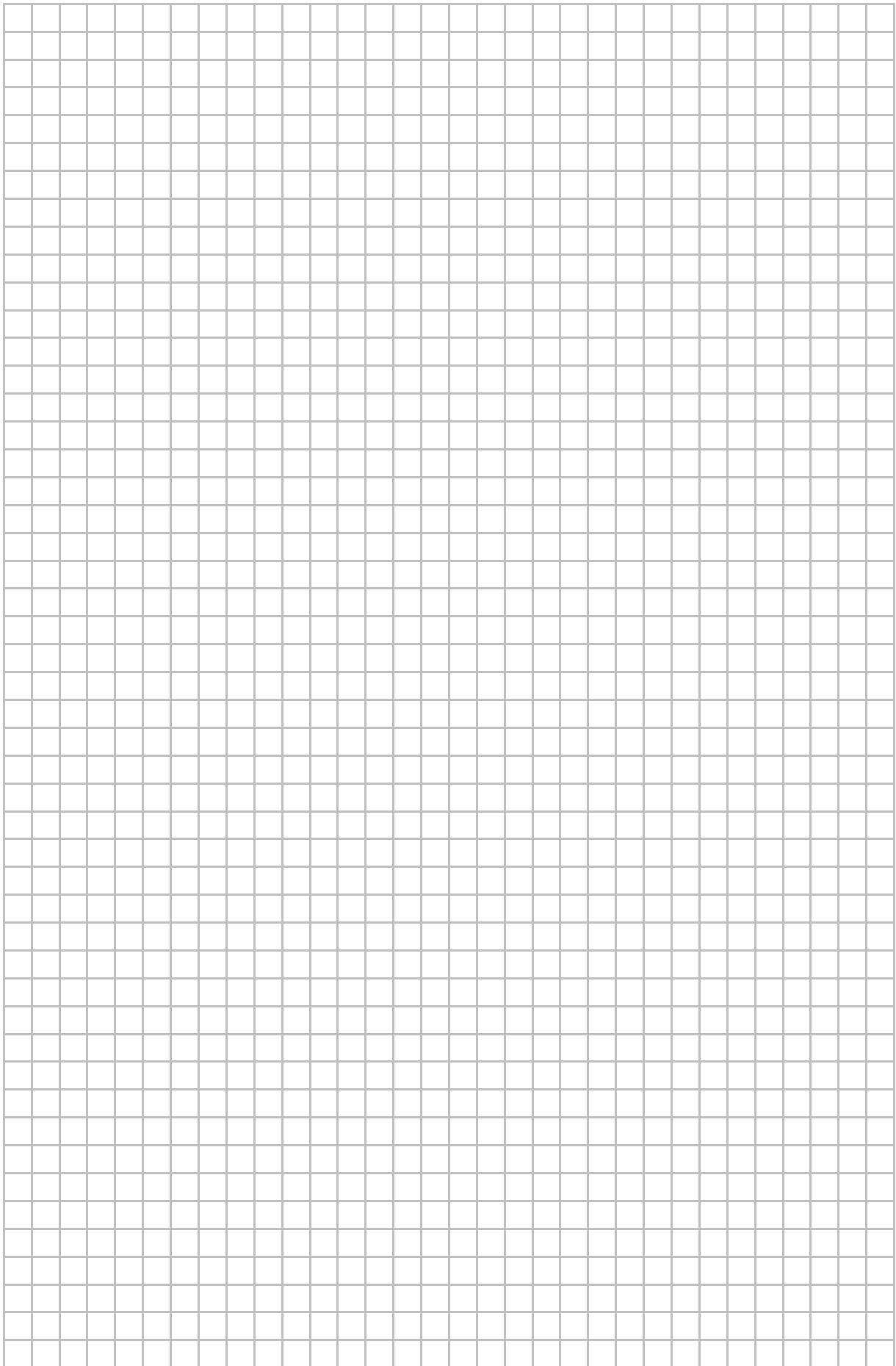




**Zadanie 14. (0–6)**

Dane są okrąg  $o_1$  o równaniu  $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 98$  oraz okrąg  $o_2$  o promieniu  $2\sqrt{5}$ . Środki okręgów  $o_1$  i  $o_2$  leżą po różnych stronach prostej  $k$  o równaniu  $y = -3x - 6$ , a punkty wspólne obu okręgów leżą na prostej  $k$ . Wyznacz równanie okręgu  $o_2$ .

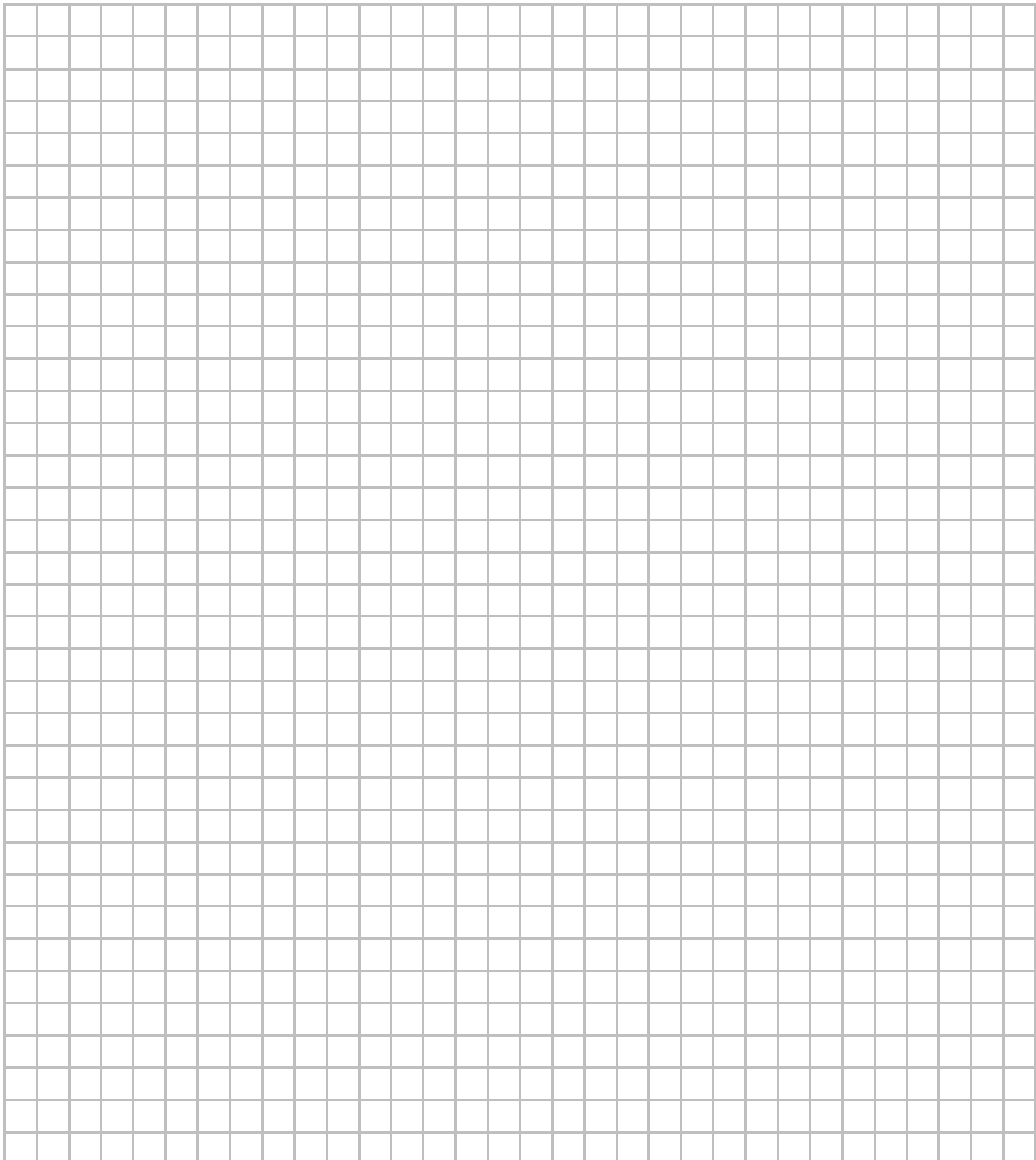


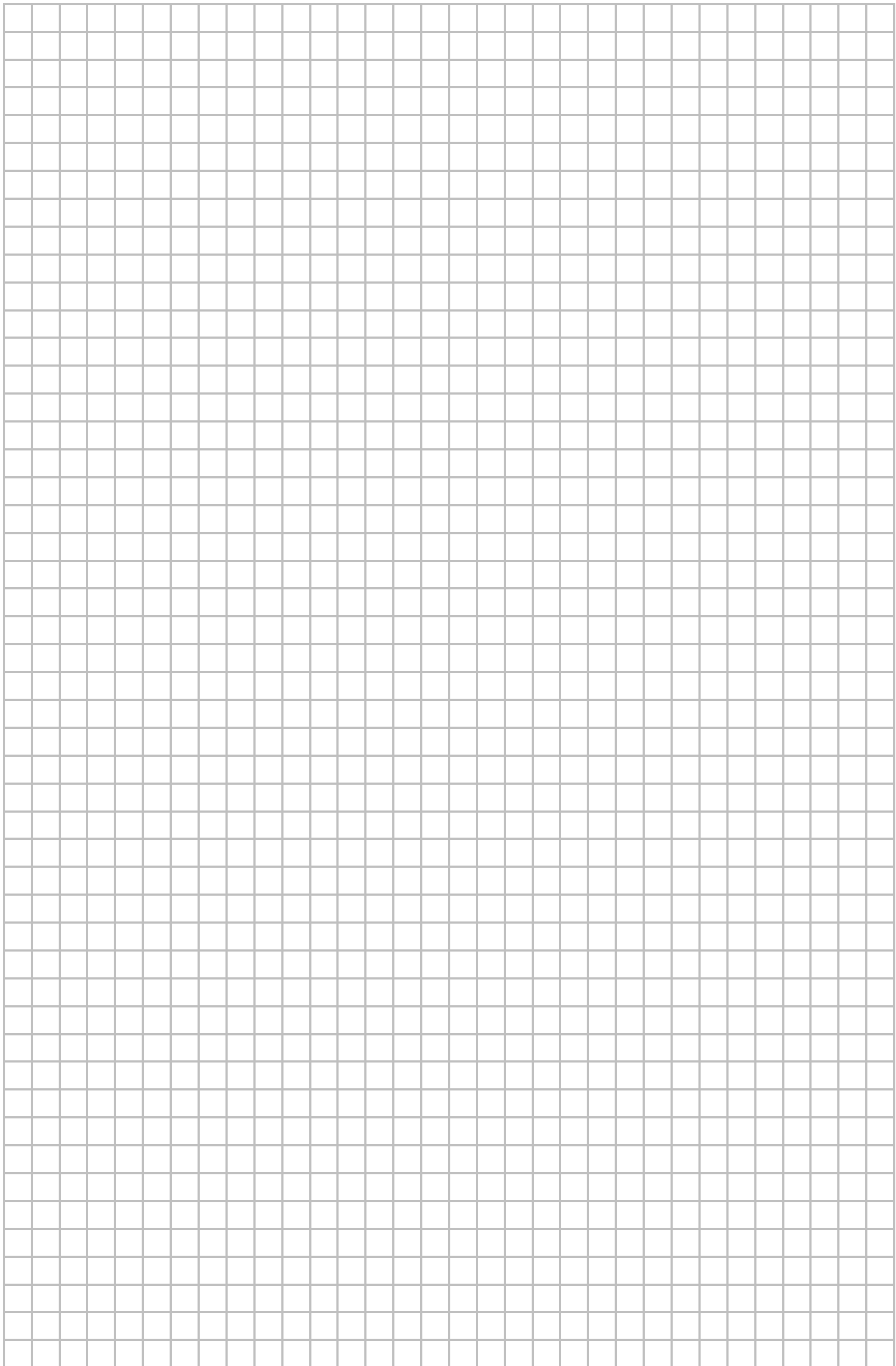


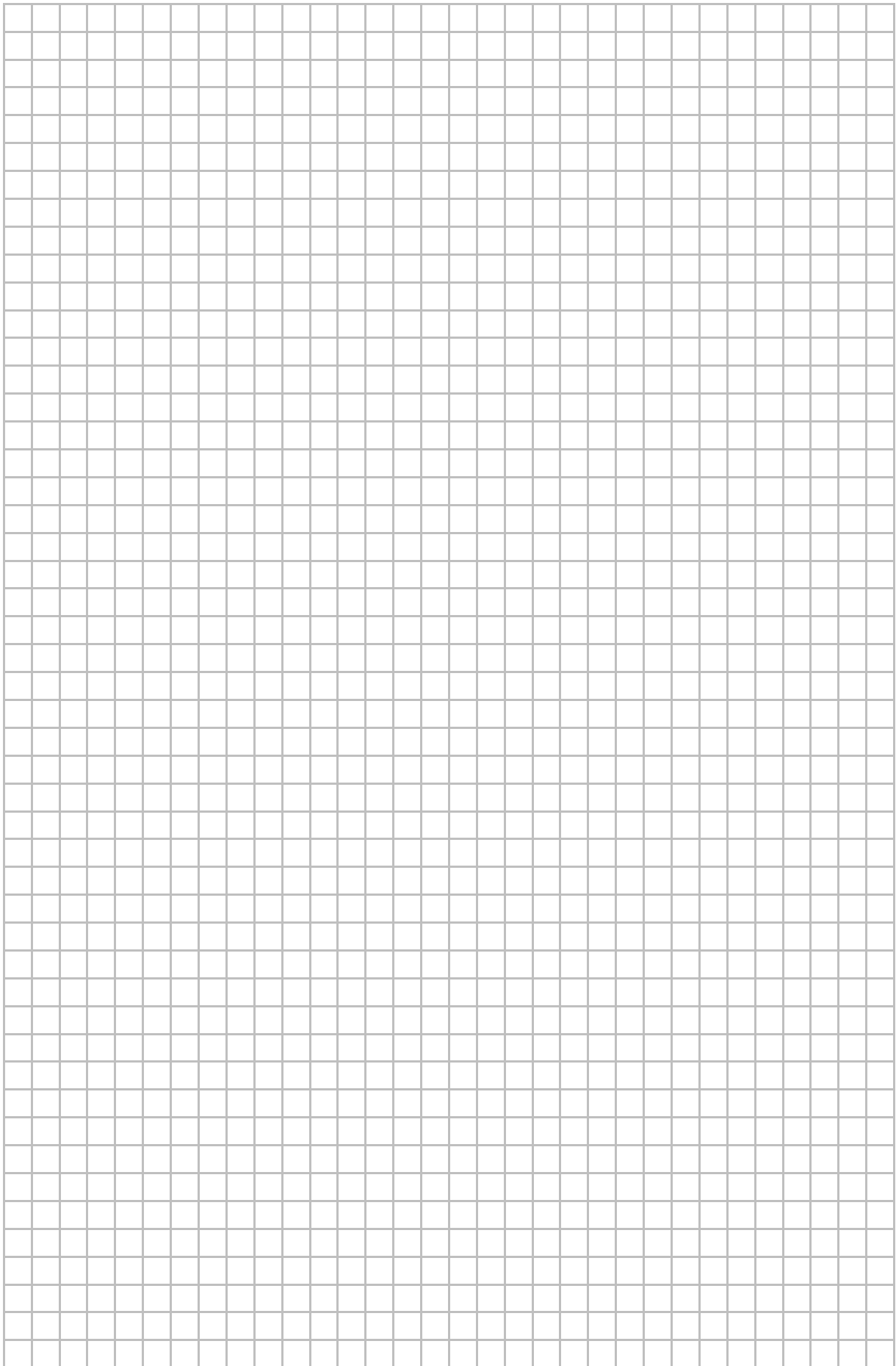
**Zadanie 15. (0–7)**

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne ostrokątne  $ABC$  ( $|AC| = |BC|$ ), na których opisano okrąg o promieniu  $R = 1$ . Niech  $x$  oznacza odległość środka okręgu od podstawy  $AB$  trójkąta.

- a) Wykaż, że pole  $P$  każdego z tych trójkątów, jako funkcja długości  $x$ , wyraża się wzorem  $P(x) = (x + 1) \cdot \sqrt{1 - x^2}$ .
- b) Wyznacz dziedzinę funkcji  $P$ .
- c) Oblicz długość odcinka  $x$  tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole. Oblicz to największe pole.







## **BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)**

