ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

na podstawie wymagań egzaminacyjnych określonych w załączniku nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji i Nauki z dnia 16 grudnia 2020 r. (Dz.U. poz. 2314)

Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka

Poziom rozszerzony

2021/2022

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i tworzenie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający: wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej (R1.1).	B

Rozwiązanie zadania

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(1+2\sqrt{2}\right)^2}=\left|1-\sqrt{2}\right|-\left|1+2\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1-1-2\sqrt{2}=-\left(2+\sqrt{2}\right)$$

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i tworzenie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający: – stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu (R1.2).	A

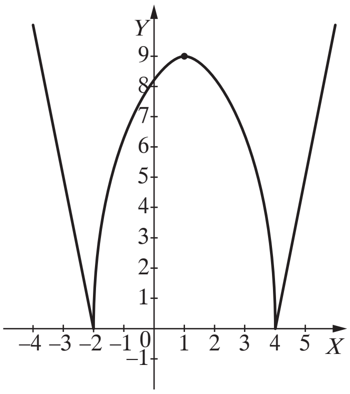
Rozwiązanie zadania

$$\log_2 5\cdot\log_5 81\cdot\log_9 216=\frac{\log 5}{\log 2}\cdot\frac{\log 9^2}{\log 5}\cdot\frac{\log 6^3}{\log 9}=\frac{2\log 9}{\log 2}\cdot\frac{3\log 6}{\log 9}=6\cdot\frac{\log 6}{\log 2}=6\log_2 6$$

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i tworzenie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający: – rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.8). 4. Funkcje. Zdający: – na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = \|f(x)\|$ (R4.1).	D

Naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \left| x^2 - 2x - 8 \right|$.



Określenie, na podstawie wykresu, maksymalnej liczby argumentów, którym odpowiada dana wartość funkcji.
$0 < m + 1 < 9$, stąd $m \in (-1, 8)$

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i tworzenie reprezentacji.	5. Ciągi. Zdający: – oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów (R5.1).	C

Rozwiązanie zadania

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(7n-n^2\right)\left(3n+1\right)}{4n^3+2n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^3+20n^2+7n}{4n^3+2n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(-3+\frac{20}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^3\left(4+\frac{2}{n^2}+\frac{6}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3+\frac{20}{n}+\frac{7}{n^2}}{4+\frac{2}{n^2}+\frac{6}{n^3}}=-\frac{3}{4}$$

Zadanie 5. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający: – rozwiązuje proste nierówności wymierne $\frac{x+1}{x+3} > 2$, $\frac{x+3}{x^2-16} < \frac{2x}{x^2-4x}$, $\frac{3x-2}{4x-7} \le \frac{1-3x}{5-4x}$ (R3.7).	1 2 0

Propozycja rozwiązania zadania

$$\frac{x-6}{36-x^2} \ge \frac{3x}{x^2-6x},\ x \in R - \{-6, 0, 6\}$$

$$\frac{x(x-6)+3x(6+x)}{x(6-x)(6+x)} \ge 0$$

$4x^2(x+3)(6-x)(6+x)\geq 0$

$x\in(-\infty,-6)\cup\langle -3,0)\cup(0,6)$

Liczby naturalne spełniające tę nierówność: 1, 2, 3, 4, 5

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$

Zasady oceniania

Rozwiązanie pełne (2 pkt)

Wyznaczenie dziedziny nierówności: $x\in R-\{-6,0,6\}$.

Rozwiązanie nierówności:

$$\frac{x-6}{36-x^2}\geq\frac{3x}{x^2-6x}$$

$$\frac{x(x-6)+3x(6+x)}{x(6-x)(6+x)}\geq 0$$

$4x^2(x+3)(6-x)(6+x)\geq 0$

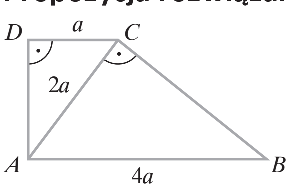
$x\in(-\infty,-6)\cup\langle -3,0)\cup(0,6)$

Wyznaczenie iloczynu wszystkich liczb naturalnych spełniających tę nierówność i obliczenie ich iloczynu: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$ oraz zakodowanie cyfr: 1, 2, 0.

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
I. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	7. Planimetria. Zdający: – rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów (7.3).

Propozycja rozwiązania zadania



W trójkącie ACD:

$|AB| = a$ i $|AC| = 2a$

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$ w skali $k = 2$, więc $|AB| = 4a$

$\sin\measuredangle ABC=\frac{2a}{4a}=\frac{1}{2}$, $\measuredangle ABC=30°$

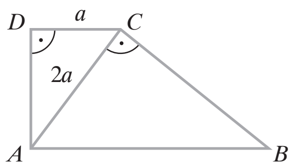
Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)

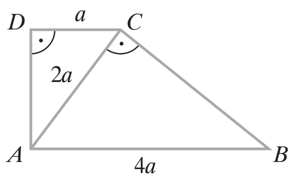
Zauważenie boków odpowiadających w trójkątach podobnych ACD i ABC i zapisanie: bokowi CD odpowiada bok AC, bokowi AD – bok BC, bokowi AC – bok AB.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (2 pkt)

Zaznaczenie na rysunku długości dwóch odcinków: $|AB| = a$ i $|AC| = 2a$ (wykorzystanie skali podobieństwa trójkątów ACD i ABC: $k = 2$).



Wyznaczenie długości boku AB: $|AB| = 4a$.



Rozwiązanie pełne (3 pkt)
Obliczenie sinusa kąta ABC i wyznaczenie miary kąta ABC.
$\sin\measuredangle ABC = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}$, $\measuredangle ABC = 30°$

Zadanie 7. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający: – używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$ (R2.1).

Propozycja rozwiązania zadania
Założenie: $a+b+c=0$ i $abc=2$.
Skoro $a+b+c=0$, to $a+b=-c$.
$a^3+b^3+c^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)+c^3=-c\left((-c)^2-3ab\right)+c^3=$
$=-c^3+3abc+c^3=3abc=3\cdot 2=6$, co kończy dowód.

Zasady oceniania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)
Zapisanie równania $a+b=-c$ i zastosowanie wzoru skróconego mnożenia a^3+b^3.
$a^3+b^3+c^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (2 pkt)
Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia $(a+b)^2$.
$a^3+b^3+c^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)+c^3$

Rozwiązanie pełne (3 pkt)
Zapisanie pełnego uzasadnienia.
Założenie: $a+b+c=0$ i $abc=2$.
Skoro $a+b+c=0$, to $a+b=-c$.
$a^3+b^3+c^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)+c^3=-c\left((-c)^2-3ab\right)+c^3=$
$=-c^3+3abc+c^3=3abc=3\cdot 2=6$, co kończy dowód.

Zadanie 8. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający: – stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (3.4).

Propozycja rozwiązania zadania

$W(x) = (x-1)\cdot P(x) + 2$ oraz $W(1) = 2$

$W(x) = (x-2)\cdot Q(x) + 5$ oraz $W(2) = 5$

$W(x) = (x-1)(x-2)\cdot S(x) + R(x)$, gdzie reszta jest postaci:

$R(x) = ax + b$ (st. $[R(x)] <$ st. $[(x-1)(x-2)]$

Dla $x = 1$ mamy $W(1) = (1-1)(1-2)\cdot S(1) + a + b$, czyli $a + b = 2$

Dla $x = 2$ mamy $W(2) = (2-1)(2-2)\cdot S(2) + 2a + b$, czyli $2a + b = 5$

$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=5 \end{cases}$, czyli $a = 3$ i $b = -1$

$R(x) = 3x - 1$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)
Zapisanie wielomianu $W(x)$.
$W(x) = (x-1)\cdot P(x) + 2$ oraz $W(x) = (x-2)\cdot Q(x) + 5$
albo
$W(1) = 2$ oraz $W(2) = 5$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)
Wyznaczenie reszty z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez iloczyn $(x-1)(x-2)$.
$W(x) = (x-1)(x-2)\cdot S(x) + R(x)$, gdzie reszta jest postaci:
$R(x) = ax + b$(st. $[R(x)] <$ st. $[[(x-1)(x-2)]]$

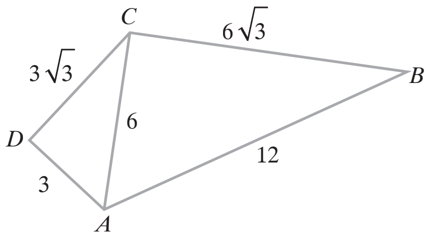
Pokonanie zasadniczych trudności zadania (3 pkt)
Wyznaczenie zależności pomiędzy współczynnikami liczbowymi reszty $R(x)$.
Dla $x = 1$ mamy $W(1) = (1-1)(1-2)\cdot S(1) + a + b$, czyli $a + b = 2$
Dla $x = 2$ mamy $W(2) = (2-1)(2-2)\cdot S(2) + 2a + b$, czyli $2a + b = 5$

Rozwiązanie pełne (4 pkt)
Obliczenie współczynników liczbowych reszty $R(x)$.
$\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=5 \end{cases}$, czyli $a = 3$ i $b = -1$
Wyznaczenie wielomianu $R(x)$: $R(x) = 3x - 1$

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający: – znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia cosinusów (R7.4).

Propozycja rozwiązania zadania



Trójkąt *ADC* jest prostokątny, ponieważ $3^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2=6^2$. Stąd $\cos\angle DAC=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,

czyli $\angle DAC=60°$.

Trójkąt *ACB* jest prostokątny, ponieważ $6^2+\left(6\sqrt{3}\right)^2=12^2$. Stąd $\cos\angle CAB=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$,

czyli $\angle CAB=60°$.

$\angle DAB=60°+60°=120°$

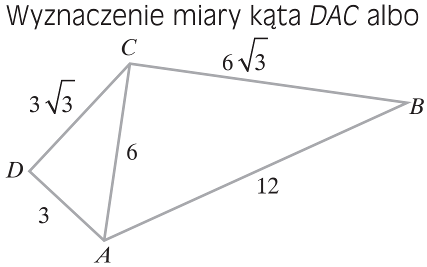
$|BD|^2=3^2+12^2-2\cdot 3\cdot 12\cdot\cos 120°$

$|BD|^2=153-72\cos(180°-60°)=153+72\cos 60°=189$

$|BD|=3\sqrt{21}$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)
Wyznaczenie miary kąta *DAC* albo wyznaczenie miary kąta *CAB*.



Trójkąt *ADC* jest prostokątny, ponieważ $3^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2=6^2$.

Trójkąt *ACB* jest prostokątny, ponieważ $6^2+\left(6\sqrt{3}\right)^2=12^2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)
Wyznaczenie miary kąta *BCD*.

$\sin\angle DCA=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, czyli $\angle DCA=30°$

$\angle ACB=90°$

Zatem $\measuredangle DCA = 30°$ i $\measuredangle ACB = 90°$
$\measuredangle DCB = 30° + 90° = 120°$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (3 pkt)
Zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta *DAB*.
Z twierdzenia cosinusów:
$|BD|^2 = 3^2 + 12^2 - 2 \cdot 3 \cdot 12 \cdot \cos 120°$

Rozwiązanie pełne (4 pkt)
Obliczenie długości przekątnej *DB*.
$|BD|^2 = 153 - 72\cos(180° - 60°) = 153 + 72\cos 60° = 189$
$|BD| = 3\sqrt{21}$

Zadanie 10. (0–2)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 2. oblicza pochodne funkcji wymiernych (R11.2).

Propozycja rozwiązania zadania
Obliczamy pochodną funkcji *f*.
$$f'(x) = \frac{-26x}{\left(x^2+1\right)^2}$$
Oblicz wartość $f'(-3)$ pochodnej tej funkcji dla argumentu -3.
$$f'(-3) = \frac{-26 \cdot (-3)}{\left((-3)^2+1\right)^2} = 0{,}78$$

Zasady oceniania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)
Obliczenie pochodnej funkcji *f*.
$$f'(x) = \frac{-26x}{\left(x^2+1\right)^2}$$
Rozwiązanie pełne (2 pkt)
Obliczenie wartości $f'(-3)$ pochodnej tej funkcji dla argumentu -3.
$$f'(-3) = \frac{-26 \cdot (-3)}{\left((-3)^2+1\right)^2} = 0{,}78$$

Zadanie 11. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: – wyznacza równanie prostej, która jest równoległa do prostej danej w postaci kierunkowej (8.3); – wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu (R8.3).

Propozycja rozwiązania zadania

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu $x^2+y^2-2x-8=0$: $S(1,0)$.

Obliczamy promień.

$r^2=1^2+0^2+8=9$, stąd $r=3$

Prostą równoległą do prostej $y=2x+5$ opisuje równanie $y=2x+b$. Zapisujemy równanie w postaci ogólnej $2x-y+b=0$.

Odległość środka okręgu S od prostej $2x-y+b=0$ wynosi 3.

Zatem:

$$\frac{|2\cdot 1-0+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3$$

$|2+b|=3\sqrt{5}$, stąd $b=-2+3\sqrt{5}$ lub $b=-2-3\sqrt{5}$

Równania prostych stycznych: $y=2x-2-3\sqrt{5}$ i $y=2x-2+3\sqrt{5}$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)

Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu $S(1,0)$ oraz zapisanie równania prostej, która jest równoległa do prostej danej w postaci kierunkowej $y=2x+b$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)

Zastosowanie wzoru na odległość punktu od prostej do wyznaczenia współczynnika b prostej $y=2x+b$.

Obliczamy promień:

$r^2=1^2+0^2+8=9$, stąd $r=3$

Zapisujemy równanie prostej $y=2x+b$ w postaci ogólnej $2x-y+b=0$.

Odległość środka okręgu S od prostej $2x-y+b=0$ wynosi 3.

Zatem:

$$\frac{|2\cdot 1-0+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3$$

$|2+b|=3\sqrt{5}$, stąd $b=-2+3\sqrt{5}$ lub $b=-2-3\sqrt{5}$

Rozwiązanie pełne (3 pkt)

Wyznaczenie równań prostych stycznych.

$y=2x-2-3\sqrt{5}$ i $y=2x-2+3\sqrt{5}$

Zadanie 12. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający: – rozwiązuje równania trygonometryczne (R6.6).

Propozycja rozwiązania zadania

$2\sin^3 x - \sin x\cos x - \sin x = 0$ i $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$\sin x(2\sin^2 x - \cos x - 1) = 0$

$\sin x(-2\cos^2 x - \cos x + 1) = 0$

$\sin x = 0$, stąd $x = 0$ lub $x = \pi$

$-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$, $t = \cos x$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$

$-2t^2 - t + 1 = 0$, stąd $t = \frac{1}{2}$ oraz $t = -1$

$\cos x = \frac{1}{2}$ lub $\cos x = -1$, stąd $x = \frac{\pi}{3}$ lub $x = \frac{5\pi}{3}$, lub $x = \pi$

Wszystkie rozwiązań równania w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = 0$ lub $x = \frac{\pi}{3}$, lub $x = \pi$, lub $x = \frac{5\pi}{3}$, lub $x = 2\pi$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)
Doprowadzenie równania do postaci równoważnej, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna tego samego kąta.

$2\sin^3 x - \sin x\cos x - \sin x = 0$

$\sin x(2\sin^2 x - \cos x - 1) = 0$

$\sin x(-2\cos^2 x - \cos x + 1) = 0$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)
Rozwiązanie równania $\sin x = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych albo w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$\sin x = 0$, stąd $x = 2k\pi$, $k \in C$

albo

$\sin x = 0$, stąd $x = 0$ lub $x = \pi$, lub $x = 2\pi$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (3 pkt)
Rozwiązanie równania $-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych albo w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ i podanie dwóch lub trzech rozwiązań.

$-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$, $t = \cos x$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$

$-2t^2 - t + 1 = 0$, stąd $t = \frac{1}{2}$ oraz $t = -1$

$\cos x = \frac{1}{2}$ lub $\cos x = -1$, stąd $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, lub$x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in C$

albo

$\cos x = \frac{1}{2}$ lub $\cos x = -1$, stąd $x = \frac{\pi}{3}$ lub $x = \pi$, lub $x = \frac{5\pi}{3}$

Rozwiązanie prawie pełne (4 pkt)
Rozwiązanie równania $\sin x = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych albo w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ i rozwiązanie równania $-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych albo w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

Rozwiązanie pełne (5 pkt)
Wyznaczenie wszystkich rozwiązań równania.
$x = \frac{\pi}{3}$ lub $x = 0$, lub $x = \pi$, lub $x = \frac{5\pi}{3}$, lub $x = 2\pi$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$

Zadanie 13. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający: – stosuje wzory Viète'a (R3.1).

Propozycja rozwiązania zadania

$f(x) = -x^2 + mx - m$

$\Delta = m^2 - 4m$

$\Delta > 0$, gdy $m \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

$(x_1 + 3x_2)(x_2 + 3x_1) = -1$

$3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 = -1$

$3(x_1^2 + x_2^2) + 10x_1x_2 = -1$

$3\left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right) + 10x_1x_2 = -1$

$3(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 = -1$, ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = m$, $x_1x_2 = m$

Zatem $3m^2 + 4m = -1$

$3m^2 + 4m + 1 = 0$, stąd $m_1 = -1$ oraz $m_2 = -\frac{1}{3}$

$m_1 = -1$ oraz $m_2 = -\frac{1}{3}$ oraz $m \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, stąd $m_1 = -1$, $m_2 = -\frac{1}{3}$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)
Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$ albo przekształcenie warunku w sposób równoważny.

$f(x) = -x^2 + mx - m$

$\Delta = m^2 - 4m$

$\Delta > 0$, gdy $m \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

albo

$(x_1 + 3x_2)(x_2 + 3x_1) = -1$

$3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 = -1$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)
Rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$ oraz zastosowanie wzorów Viète'a do przekształcenia warunku.

$3(x_1^2 + x_2^2) + 10x_1x_2 = -1$

$3\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)+7x_1x_2=4$

$3(x_1+x_2)^2+4x_1x_2=-1$, ze wzorów Viète'a: $x_1+x_2=m$, $x_1x_2=m$

Zatem $3m^2+4m=-1$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (3 pkt)
Rozwiązanie równania $3m^2+4m=-1$.
$3m^2+4m+1=0$

$m_1=-1$ oraz $m_2=-\frac{1}{3}$

Rozwiązanie pełne (4 pkt)
Wyznaczenie wartości parametru m dla określonych warunków.

$m_1=-1$ oraz $m_2=-\frac{1}{3}$, oraz $m\in(-\infty,0)\cup(4,\infty)$, stąd $m_1=-1$, $m_2=-\frac{1}{3}$

Zadanie 14. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający: – korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (R10.3).

Propozycja rozwiązania zadania

Przy oznaczeniach: A_1 – wylosowanie dwóch kul białych, A_2 – wylosowanie dwóch kul czarnych, A_3 – wylosowanie kuli białej i kuli czarnej, mamy:

$|A_1|=\frac{6\cdot 5}{2}=15$, $|A_2|=\frac{4\cdot 3}{2}=6$, $|A_3|=6\cdot 4=24$

$|\Omega|=\frac{10\cdot 9}{2}=45$

$P(A_1)=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$, $P(A_2)=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$, $P(A_3)=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$

Liczba zdarzeń elementarnych przy drugim losowaniu: $8\cdot 2=16$

Przy oznaczeniu B – wylosowanie dwóch kul czarnych mamy:

$P(B\mid A_1)=0$, $P(B\mid A_2)=\frac{2\cdot 2}{16}=\frac{1}{4}$, $P(B\mid A_3)=\frac{3\cdot 1}{16}=\frac{3}{16}$

$P(B)=P(B\mid A_1)\cdot P(A_1)+P(B\mid A_2)\cdot P(A_2)+P(B\mid A_3)\cdot P(A_3)$

$P(B)=0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{15}+\frac{3}{16}\cdot\frac{8}{15}=\frac{2}{15}$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)
Wyznaczenie liczby zdarzeń sprzyjających pierwszemu losowaniu (podanie dwóch wielkości).
Przy oznaczeniach: A_1 – wylosowanie dwóch kul białych, A_2 – wylosowanie dwóch kul czarnych,

A_3 – wylosowanie kuli białej i kuli czarnej, mamy:

$|A_1| = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$, $|A_2| = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$, $|A_3| = 6 \cdot 4 = 24$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)
Wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzeń sprzyjających zdarzeniom wylosowania dwóch kul z pierwszej urny (podanie dwóch wielkości).

Zapisanie liczby zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

$P(A_1) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$, $P(A_2) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$, $P(A_3) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (3 pkt)
Wyznaczenie liczby zdarzeń sprzyjających pierwszemu losowaniu i wyznaczenie prawdopodobieństwa tych zdarzeń (podanie wszystkich wielkości).

Rozwiązanie prawie pełne (4 pkt)
Wyznaczenie prawdopodobieństwa zdarzeń sprzyjających drugiemu losowaniu.
Zapisanie liczby zdarzeń elementarnych przy drugim losowaniu: $8 \cdot 2 = 16$
Przy oznaczeniu B – wylosowanie dwóch kul czarnych mamy:

$P(B \mid A_1) = 0$, $P(B \mid A_2) = \frac{2 \cdot 2}{16} = \frac{1}{4}$, $P(B \mid A_3) = \frac{3 \cdot 1}{16} = \frac{3}{16}$

Rozwiązanie pełne (5 pkt)
Zastosowanie twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.
Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania dwóch kul czarnych.

$P(B) = P(B \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(B \mid A_2) \cdot P(A_2) + P(B \mid A_3) \cdot P(A_3)$

$P(B) = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{15} + \frac{3}{16} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{15}$

Zadanie 15. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający: – bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.2). Równania i nierówności. Zdający: – rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych (R3.3).

Propozycja rozwiązania zadania

Przy oznaczeniach: a, b, c – brakujące liczby, mamy:

$a = \frac{4+b}{2}$ oraz $c^2 = 36b$

$$\begin{cases} 4 + a + b + c + 36 = 90 \\ a = \frac{4+b}{2} \\ c^2 = 36b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4+a+b+c+36=90 \\ a=2+\dfrac{c^2}{72} \\ b=\dfrac{c^2}{36} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+\dfrac{c^2}{72}+\dfrac{c^2}{36}+c=50 \\ a=2+\dfrac{c^2}{72} \\ b=\dfrac{c^2}{36} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-48 \\ a=34 \\ b=64 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} c=24 \\ a=10 \\ b=16 \end{cases}$$

Brakujące wyrazy ciągu: 34, 64, – 48 lub 10, 16, 24

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)
Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego i własności ciągu geometrycznego.
Zapisanie zależności wynikających z zastosowania własności ciągów arytmetycznego i geometrycznego.
Przy oznaczeniach: a, b, c – brakujące liczby, mamy:
$a=\dfrac{4+b}{2}$ oraz $c^2=36b$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)
Zapisanie układu równań prowadzącego do wyznaczenia brakujących wyrazów ciągów.

$$\begin{cases} 4+a+b+c+36=90 \\ a=\dfrac{4+b}{2} \\ c^2=36b \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania (3 pkt)
Rozwiązanie układu równań prowadzącego do wyznaczenia brakujących wyrazów ciągów (wyznaczenie jednej trójki liczb albo popełnienie jednego błędu rachunkowego).

$$\begin{cases} 4+a+b+c+36=90 \\ a=2+\dfrac{c^2}{72} \\ b=\dfrac{c^2}{36} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+\frac{c^2}{72}+\frac{c^2}{36}+c=50 \\ a=2+\frac{c^2}{72} \\ b=\frac{c^2}{36} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-48 \\ a=34 \\ b=64 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} c=24 \\ a=10 \\ b=16 \end{cases}$$

Rozwiązanie pełne (4 pkt)
Wyznaczenia brakujących wyrazów ciągów.
34, 64, – 48 lub 16, 24, 36

Zadanie 16. (0–7)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający: – stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).

Propozycja rozwiązania zadania
Przy oznaczeniu długości krawędzi podstawy graniastosłupa jako a, a jego wysokości jako H mamy: $H=3\sqrt{3}-2a$.

$V(a)=a^2\left(3\sqrt{3}-2a\right)$, $D_{V(a)}: a\in\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$V'(a)=-6a^2+6\sqrt{3}a$

Miejsca zerowe pochodnej funkcji: $a=0$, $a=\sqrt{3}$.

Funkcja $V(a)$ rośnie w $\left(0,\sqrt{3}\right)$ i maleje w $\left(\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Dla $a=\sqrt{3}$ funkcja V osiąga największą wartość.
Wymiary graniastosłupa: $a=H=\sqrt{3}$
$V=3\sqrt{3}$

Zasady oceniania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów:
Etap I polega na wyznaczeniu wysokości graniastosłupa za pomocą długości jego krawędzi podstawy (lub odwrotnie), zapisaniu objętości bryły jako funkcji jednej zmiennej i wyznaczeniu jej dziedziny. Za ten etap zdający otrzymuje 3 punkty.
Etap II polega na obliczeniu pochodnej funkcji, jej miejsc zerowych i zbadaniu z uzasadnieniem, gdzie funkcja osiąga wartość największą. Za ten etap zdający otrzymuje 3 punkty.
Etap III to podanie rozwiązania (objętości graniastosłupa). Za ten etap zdający otrzymuje 1 punkt.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania (1 pkt)
Oznaczenie długości krawędzi podstawy graniastosłupa jako a, a jego wysokości jako H i zapisanie: $H = 3\sqrt{3} - 2a$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp (2 pkt)
Zapisanie objętości bryły za pomocą zmiennej a.
$V(a) = a^2\left(3\sqrt{3} - 2a\right)$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania (3 pkt)
Zapisanie objętości bryły za pomocą zmiennej a oraz wyznaczenie dziedziny funkcji.
$V(a) = a^2\left(3\sqrt{3} - 2a\right)$, $D_{V(a)} : a \in \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania (4 pkt)
Poprawna metoda wyznaczenia pochodnej funkcji.

Rozwiązanie, w którym zostały pokonane zasadnicze trudności zadania (5 pkt)
Wyznaczenie pochodnej funkcji $V(a)$.
$V'(a) = -6a^2 + 6\sqrt{3}a$
Obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji.
$a = 0$, $a = \sqrt{3}$

Rozwiązanie prawie pełne (6 pkt)
Zbadanie znaku pochodnej i poprawne uzasadnienie, że dla $a = \sqrt{3}$ funkcja V osiąga największą wartość.
Funkcja $V(a)$ rośnie w $\left(0, \sqrt{3}\right)$ i maleje w $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Rozwiązanie pełne (7 pkt)
Podanie długości krawędzi graniastosłupa i obliczenie objętości bryły.
$a = \sqrt{3}$, $V = 3\sqrt{3}$