CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	EMAP-R0-100-2106, EMAP-R0-200-2106, EMAP-R0-300-2106, EMAP-R0-400-2106, EMAP-R0-700-2106, EMAP-R0-Q00-2106
Termin egzaminu:	2 czerwca 2021 r.
Data publikacji dokumentu:	21 czerwca 2021 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Odp.	D	D	B	D

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

Zadanie 5. (0–2)

Zasady oceniania
2 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna, niepełna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

5	3	2

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy podczas przekształcenia wyrażenia $\log_3 54$ lub $\frac{3\log_2 9+2}{\log_2 9}$ poprawnie zastosuje wzór na zamianę podstaw logarytmu lub logarytm iloczynu/ilorazu, lub logarytm potęgi, np.:

$$\log_3 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 3}, \quad \log_2 9 = 2\log_2 3, \quad \log_3 54 = \log_3 27 + \log_3 2$$

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przekształci wyrażenie $\log_3 54$ lub $\frac{3\log_2 9+2}{\log_2 9}$ lub oba te wyrażenia do takiej postaci, z której poprzez jednokrotne zastosowanie wzoru na zamianę podstaw logarytmu lub logarytm iloczynu/ilorazu, lub logarytm potęgi oraz ewentualne kilkukrotne przekształcenie wyrażenia wymiernego uzyskuje się tezę.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy, stosując poprawną metodę, przeprowadzi pełny dowód.

Uwaga:
Jeżeli zdający, przy rozpoczęciu przekształcania wyrażenia $\log_3 54$ lub $\frac{3\log_2 9+2}{\log_2 9}$, popełnia błąd rzeczowy (niepoprawnie zastosuje wzór na zamianę podstaw logarytmu lub logarytm ilorazu/iloczynu, lub logarytm potęgi), lecz w dalszej części rozwiązania każdorazowo stosuje te wzory poprawnie, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy wyrażenie $\log_3 54$, stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu:

$$\log_3 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 3}$$

Stosujemy wzór na logarytm iloczynu i otrzymujemy:

$$\frac{\log_2 54}{\log_2 3} = \frac{\log_2(27\cdot 2)}{\log_2 3} = \frac{\log_2 27 + \log_2 2}{\log_2 3}$$

Aby doprowadzić do uzyskania w mianowniku wyrażenia $\log_2 9$, mnożymy licznik i mianownik przez 2, a następnie korzystamy ze wzoru na logarytm potęgi:

$$\frac{2\cdot\log_2 27 + 2\cdot\log_2 2}{2\cdot\log_2 3} = \frac{\log_2 3^6 + 2}{\log_2 9} = \frac{3\log_2 9 + 2}{\log_2 9} = \frac{3c+2}{c}$$

To należało wykazać.

Zadanie 7. (0–3)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy:

- zapisze, że trójkąt BEC jest podobny do trójkąta BFH oraz zapisze związek między wysokościami tych trójkątów opuszczonymi na prostą AB (lub zapisze związek między polami tych trójkątów), np. : $h_{BEC} = 3h_{BFH}$ (lub $P_{EBC} = 9S$)

ALBO

- zapisze, że trójkąt ADG jest podobny do trójkąta AEC oraz zapisze związek między wysokościami tych trójkątów opuszczonymi na prostą AB (lub zapisze związek między polami tych trójkątów), np. : $h_{AEC} = 2h_{ADG}$ (lub $P_{AEC} = 4P_{ADG}$)

ALBO

- zapisze związek między polami trójkątów AEC i EBC, np.: $P_{AEC} = \frac{4}{3}P_{EBC}$

ALBO

- zapisze, że $P_{ABC} = 21S$ i $P_{EBC} = 9S$.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy:

- zapisze związki między polami trójkątów ADG i AEC oraz AEC i EBC, np.: $\frac{P_{AEC}}{P_{EBC}} = \frac{4}{3}$ i $P_{AEC} = 4P_{ADG}$

ALBO

- zapisze związki między polami trójkątów BEC i BFH oraz AEC i EBC, np.: $\frac{P_{AEC}}{P_{EBC}} = \frac{4}{3}$ i $P_{BEC} = 9P_{BFH}$

ALBO

- zapisze związki między polami trójkątów ADG i AEC oraz BEC i BFH, np.: $P_{AEC} = 4P_{ADG}$ i $P_{BEC} = 9P_{BFH}$

ALBO

- zapisze układ równań z polem p trapezu $DECG$ oraz polem q trójkąta ADG jako niewiadomymi, np.:

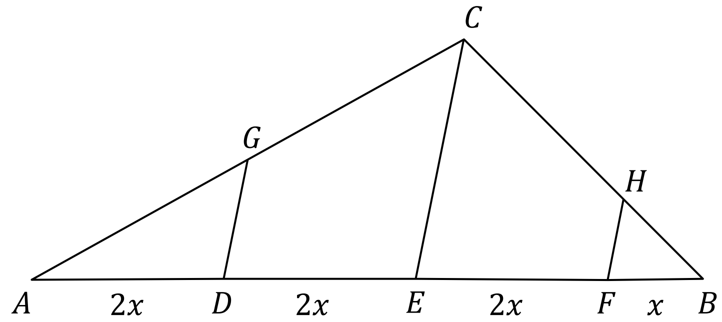
$$\begin{cases} p + q = 12S \\ \dfrac{p+q}{q} = 4 \end{cases}$$

Zdający otrzymuje .... **3 p.**
gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

Uwaga:
Jeśli zdający wprowadza do rozwiązania dodatkowe założenia, nie wynikające z treści zadania, to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył praw do innej punktacji.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Oznaczmy pole trójkąta FBH przez S, a długość odcinka FB przez x. Zgodnie z treścią zadania $|AD| = |DE| = |EF| = 2|FB| = 2x$.



Odcinki EC i FH są równoległe, więc trójkąt EBC jest podobny do trójkąta FBH na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów. Z twierdzenia o stosunku pól figur podobnych i warunków zadania otrzymujemy

$$\frac{P_{EBC}}{P_{FBH}} = \left(\frac{|EB|}{|FB|}\right)^2 = \left(\frac{3x}{x}\right)^2 = 9$$

więc

$$P_{EBC} = 9S$$

Trójkąty EBC i AEC mają wspólną wysokość h, poprowadzoną z wierzchołka C. Zatem

$$\frac{P_{AEC}}{P_{EBC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|AE|\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot|EB|\cdot h} = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$$

więc

$$P_{AEC} = \frac{4}{3}\cdot P_{EBC} = 12S$$

Odcinki DG i EC są równoległe, więc trójkąt ADG jest podobny do trójkąta AEC na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów. Z twierdzenia o stosunku pól figur podobnych i warunków zadania otrzymujemy

$$\frac{P_{ADG}}{P_{AEC}} = \left(\frac{|AD|}{|AE|}\right)^2 = \left(\frac{2x}{4x}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

więc

$$P_{ADG} = \frac{1}{4}\cdot P_{AEC} = 3S$$

To należało wykazać.

Sposób 2.
Oznaczmy przez h wysokość trójkąta BFH, natomiast przez a długość odcinka $|FB|$. Wtedy pole trójkąta ABC jest równe $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7a \cdot 3h = 21S$ oraz $P_{EBC} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3h = 9S$.
Odcinki DG i EC są równoległe, więc trójkąt ADG jest podobny do trójkąta AEC na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów w skali $k = 0{,}5$. Niech pole trapezu $DECG$ będzie równe p, natomiast pole trójkąta ADG będzie równe q.
Wtedy

$$\begin{cases} p + q = 12S \\ \dfrac{p+q}{q} = 4 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $p = 9S$ oraz $q = 3S$, co jest tezą twierdzenia.

Zadanie 8. (0–4)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy zapisze równanie w postaci, w której występują funkcje trygonometryczne tego samego kąta, np.: $2\cos^2 x - \cos x = 2\sin x \cos x - \sin x$.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy zapisze alternatywę równań $\cos x - \sin x = 0$ lub $2\cos x - 1 = 0$.

Zdający otrzymuje .... **3 p.**
gdy wyznaczy rozwiązania jednego z równań $\cos x = \frac{1}{2}$ lub $\cos x = \sin x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ lub w R.

Zdający otrzymuje .... **4 p.**
gdy wyznaczy rozwiązania obu równań $\cos x = \frac{1}{2}$ **oraz** $\cos x = \sin x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$:
$x = \frac{1}{3}\pi$ lub $x = \frac{5}{3}\pi$ lub $x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi$.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający podzieli równanie przez $(\cos x - \sin x)$ albo przez $(2\cos x - 1)$ bez stosownych założeń i nie rozważy przypadków, gdy to wyrażenie jest równe zero, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający przed uzyskaniem trygonometrycznych równań elementarnych popełni błędy rachunkowe i otrzyma równania elementarne, z których co najmniej jedno ma dwie serie rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równanie równoważnie i otrzymujemy kolejno:

$$2\cos^2 x - \cos x = 2\sin x\cos x - \sin x$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 2\sin x\cos x + \sin x = 0$$

$$\cos x\cdot(2\cos x - 1) - \sin x\cdot(2\cos x - 1) = 0$$

$$(2\cos x - 1)(\cos x - \sin x) = 0$$

Stąd otrzymujemy:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \cos x = \sin x$$

Rozwiązaniami pierwszego z tych równań w zbiorze $\langle 0, 2\pi\rangle$ są: $x = \frac{1}{3}\pi$ lub $x = \frac{5}{3}\pi$.

Rozwiązaniami równania $\cos x = \sin x$ w zbiorze $\langle 0, 2\pi\rangle$ są: $x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi$.

Zatem równanie $2\cos^2 x - \cos x = \sin(2x) - \sin x$ ma w zbiorze $\langle 0, 2\pi\rangle$ cztery rozwiązania: $x = \frac{1}{3}\pi$ lub $x = \frac{5}{3}\pi$ lub $x = \frac{1}{4}\pi$ lub $x = \frac{5}{4}\pi$.

Zadanie 9. (0–4)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy zapisze odległość punktu $P = (x_P, y_P)$ od jednej z prostych, np.:

$$\frac{|x_P - 2y_P|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \quad \text{lub} \quad \frac{|2x_P + y_P - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy wyznaczy odległość punktu $P = (x_P, y_P)$ od jednej z prostych w zależności od jednej zmiennej, np.

$$\frac{|x_P - 2(x_P + 4)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \quad \text{lub} \quad \frac{|2x_P + (x_P + 4) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \quad \text{lub}$$

$$\frac{|(y_P - 4) - 2y_P|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \quad \text{lub} \quad \frac{|2(y_P - 4) + y_P - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **3 p.**
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą, opisujące zależność między odległościami punktu $P = (x_P, y_P)$ od obu prostych, np.:

$$\frac{|x_P - 2(x_P + 4)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 2 \cdot \frac{|2x_P + (x_P + 4) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \quad \text{lub}$$

$$\frac{|(y_P - 4) - 2y_P|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 2 \cdot \frac{|2(y_P - 4) + y_P - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **4 p.**

gdy obliczy i zapisze współrzędne punktu P: $P = (-2, 2)$ oraz $P = \left(\frac{2}{5}, \frac{22}{5}\right)$.

Uwagi:

1. Jeśli zdający zapisuje równanie „odległości” i w tym równaniu pomija zupełnie symbol wartości bezwzględnej, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający sporządzi rysunek, zapisze współrzędne jednego z szukanych punktów $(-2, 2)$, obliczy odległości punktu $(-2, 2)$ od prostych k i l oraz zapisze, że odległość tego punktu od prostej k jest dwa razy większa niż odległość tego punktu od prostej l, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech $P = (x_P, y_P)$ będzie punktem leżącym na prostej o równaniu $y = x + 4$. Wtedy $y_P = x_P + 4$.

Odległość $d(P, k)$ punktu P od prostej k o równaniu $x - 2y = 0$ jest równa

$$d(P, k) = \frac{|x_P - 2(x_P + 4)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-x_P - 8|}{\sqrt{5}}$$

Odległość $d(P, l)$ punktu P od prostej l o równaniu $2x + y - 1 = 0$ jest równa

$$d(P, k) = \frac{|2x_P + (x_P + 4) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|3x_P + 3|}{\sqrt{5}}$$

Z treści zadania $d(P, k) = 2 \cdot d(P, l)$, więc

$$\frac{|-x_P - 8|}{\sqrt{5}} = 2 \cdot \frac{|3x_P + 3|}{\sqrt{5}}$$

Stąd otrzymujemy kolejno

$$|-x_P - 8| = 2 \cdot |3x_P + 3|$$

$$|-x_P - 8| = |6x_P + 6|$$

$$-x_P - 8 = 6x_P + 6 \quad \text{lub} \quad -(-x_P - 8) = 6x_P + 6$$

$$x_P = -2 \quad \text{lub} \quad x_P = \frac{2}{5}$$

Dla $x_P = -2$ otrzymujemy $P = (-2, 2)$. Dla $x_P = \frac{2}{5}$ otrzymujemy $P = \left(\frac{2}{5}, \frac{22}{5}\right)$.
Istnieją zatem dwa punkty spełniające warunki zadania: $(-2, 2)$ oraz $\left(\frac{2}{5}, \frac{22}{5}\right)$.

Zadanie 10. (0–4)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy:

- obliczy długości boków CF i CS: $|CF| = 2\sqrt{2}$, $|CS| = \sqrt{5}$

ALBO

- obliczy tylko długość boku $|FS|$: $|FS| = 3$.

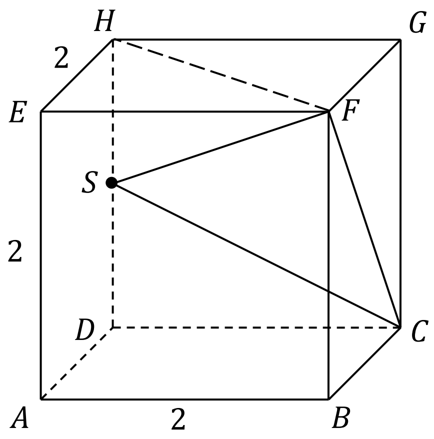
Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy obliczy długości trzech boków trójkąta CFS: $|CF| = 2\sqrt{2}$, $|CS| = \sqrt{5}$ oraz $|FS| = 3$.

Zdający otrzymuje .... **3 p.**
gdy zapisze zależność, wynikającą z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta CFS,
np. $\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos(\sphericalangle CFS)$.

Zdający otrzymuje .... **4 p.**
gdy wyznaczy miarę kąta CFS: $|\sphericalangle CFS| = 45°$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozwiązanie rozpoczniemy od obliczenia długości boków trójkąta CFS. Mamy oczywiście $|CF| = 2\sqrt{2}$ oraz $|CS| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.
Dorysujmy teraz odcinek FH.



Oczywiście $|\sphericalangle FHS| = 90°$, więc

$$|FS| = \sqrt{|FH|^2 + |HS|^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = 3$$

Trójkąt CFS ma zatem boki o następujących długościach: $|CF| = 2\sqrt{2}$, $|CS| = \sqrt{5}$ oraz $|FS| = 3$.
Najmniejszy kąt wewnętrzny trójkąta znajduje się naprzeciw najkrótszego boku, zatem jest nim kąt CFS.
Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta CFS wynika, że

$$|CS|^2 = |CF|^2 + |FS|^2 - 2 \cdot |CF| \cdot |FS| \cdot \cos(\measuredangle CFS)$$

Stąd otrzymujemy

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos(\measuredangle CFS)$$

$$5 = 8 + 9 - 12\sqrt{2} \cdot \cos(\measuredangle CFS)$$

$$\cos(\measuredangle CFS) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

więc najmniejszy kąt w trójkącie CFS ma miarę $45°$.

Zadanie 11. (0–4)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy:
- poprawnie poda liczbę możliwych rozmieszczeń wszystkich uczestników programu, np. $(n+3)!$

ALBO
- poprawnie poda liczbę możliwych rozmieszczeń, w których sportowcy siedzą obok siebie np. $(n+1) \cdot 3! \cdot n!$.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy poprawnie poda liczbę możliwych rozmieszczeń, w których sportowcy siedzą obok siebie, np. $(n+1) \cdot 3! \cdot n!$ lub innym rozumowaniem $3! \cdot (n+1)!$ oraz liczbę wszystkich rozmieszczeń $(n+3)!$.

Zdający otrzymuje .... **3 p.**
gdy zapisze równanie $\frac{6}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{15}$.

Zdający otrzymuje .... **4 p.**
gdy poprawnie obliczy liczbę aktorów: 7.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech n oznacza liczbę aktorów uczestniczących w programie ($n \in \mathbb{N}$), natomiast A – zdarzenie polegające na tym, że trójka sportowców będzie siedziała obok siebie przy losowym wyborze miejsc. Wtedy

$$P(A) = \frac{3! \cdot (n+1)!}{(n+3)!}$$

Stąd po uproszczeniu otrzymujemy

$$P(A) = \frac{6}{(n+2)(n+3)}$$

Z treści zadania otrzymujemy równanie

$$\frac{6}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{15}$$

co prowadzi do

$$(n+2)(n+3) = 90$$

$$n^2 + 5n - 84 = 0$$

$$(n-7)(n+12) = 0$$

Zatem $n = 7$, gdyż $n = -12$ przeczy założeniom. W tym programie bierze zatem udział 7 aktorów.

Zadanie 12. (0–5)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy:
- zapisze, że liczba 3 jest jednym z rozwiązań równania i liczba 3 musi być jednokrotnym pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $x^2+(m-1)x-6m^2+2m$

ALBO
- zapisze, że $\Delta=0$ i $x_0\neq 3$ (tj. dwukrotny pierwiastek trójmianu jest różny od 3)

ALBO
- rozwiąże równanie $\Delta=0$, otrzymując $m=\frac{1}{5}$.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy:
- rozwiąże równanie $\Delta=0$, otrzymując $m=\frac{1}{5}$ i sprawdzi, że dla $m=\frac{1}{5}$ trójmian $x^2+(m-1)x-6m^2+2m$ ma jeden pierwiastek podwójny różny od liczby 3

ALBO
- zapisze, że liczba 3 jest jednym z rozwiązań równania i wyznaczy pierwiastki trójmianu $x^2+(m-1)x-6m^2+2m$:

$$x_1=\frac{-m+1-|5m-1|}{2} \quad \text{i} \quad x_2=\frac{-m+1+|5m-1|}{2}$$

Zdający otrzymuje .... **3 p.**
gdy:
- zapisze, że liczba 3 jest jednym z rozwiązań równania, wyznaczy pierwiastki x_1 oraz x_2 trójmianu $x^2+(m-1)x-6m^2+2m$ i zapisze je bez użycia wartości bezwzględnej: $x_1=2m$ oraz $x_2=-3m+1$

ALBO
- zapisze równanie $3^2+(m-1)\cdot 3-6m^2+2m=0$.

Zdający otrzymuje .... **4 p.**
gdy:
- zapisze alternatywę $\left(m=\frac{1}{5}\right.$ i $\left.m\neq\frac{3}{2}\right)$ lub $\left(m\neq\frac{1}{5}\right.$ i $\left.m=\frac{3}{2}\right)$ lub $\left(m\neq\frac{1}{5}\right.$ i $\left.m=-\frac{2}{3}\right)$

ALBO
- rozwiąże równanie $3^2+(m-1)\cdot 3-6m^2+2m=0$.

Zdający otrzymuje .... **5 p.**
gdy zastosuje poprawną metodę i otrzyma poprawny wynik: $m=-\frac{2}{3}$ lub $m=\frac{1}{5}$ lub $m=\frac{3}{2}$.

Uwaga:
Jeśli zdający popełnia błąd, zapisując $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(5m-1)^2} = 5m - 1$ i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.
Jednym z rozwiązań równania jest liczba $x_3 = 3$. Jeśli podane równanie ma mieć dokładnie dwa rozwiązania, to trójmian kwadratowy $x^2 + (m-1)x - 6m^2 + 2m$ powinien mieć pierwiastek podwójny inny niż 3 albo dwa różne pierwiastki, z których jeden jest równy 3.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $x^2 + (m-1)x - 6m^2 + 2m$:

$$\Delta = (m-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6m^2 + 2m) = 25m^2 - 10m + 1 = (5m-1)^2$$

Zatem dla każdej liczby rzeczywistej m ten wyróżnik przyjmuje wartość nieujemną.
Pierwiastkami tego trójmianu są więc liczby

$$x_1 = \frac{-m + 1 - |5m-1|}{2} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-m + 1 + |5m-1|}{2}$$

Dla $m \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$ otrzymujemy

$$x_1 = \frac{-m + 1 + 5m - 1}{2} = 2m \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-m + 1 - 5m + 1}{2} = -3m + 1$$

Dla $m \in \left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$ otrzymujemy

$$x_1 = \frac{-m + 1 - 5m + 1}{2} = -3m + 1 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-m + 1 + 5m - 1}{2} = 2m$$

Zatem, z dokładnością do oznaczeń, dla każdego $m \in R$ zachodzi $x_1 = 2m$ oraz $x_2 = -3m + 1$.
Należy zatem rozpatrzeć trzy sytuacje:

$(\Delta = 0$ i $x_1 \neq 3)$ lub $(\Delta > 0$ i $x_1 = 3)$ lub $(\Delta > 0$ i $x_2 = 3)$.

Rozpatrując każdą z nich, otrzymujemy odpowiednio:

$\left(m = \frac{1}{5} \text{ i } m \neq \frac{3}{2}\right)$ lub $\left(m \neq \frac{1}{5} \text{ i } m = \frac{3}{2}\right)$ lub $\left(m \neq \frac{1}{5} \text{ i } m = -\frac{2}{3}\right)$

$$m = \frac{1}{5} \quad \text{lub} \quad m = \frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad m = -\frac{2}{3}$$

Zatem podane w treści zadania równanie ma dokładnie dwa rozwiązania dla $m \in \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right\}$.

Sposób 2.

Jednym z rozwiązań równania jest liczba $x_3 = 3$. Jeśli podane równanie ma mieć dokładnie dwa rozwiązania, to trójmian kwadratowy $x^2 + (m-1)x - 6m^2 + 2m$ powinien mieć pierwiastek podwójny inny niż 3 albo dwa różne pierwiastki, z których jeden jest równy 3.

Obliczamy wyróżnik trójmianu $x^2 + (m-1)x - 6m^2 + 2m$:

$$\Delta = (m-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6m^2 + 2m) = 25m^2 - 10m + 1 = (5m-1)^2$$

Dla $m = \frac{1}{5}$ trójmian ma dwukrotny pierwiastek $x_0 = \frac{-m+1}{2} = \frac{2}{5}$ różny od 3.

Sprawdzamy, dla jakich wartości m liczba 3 jest pierwiastkiem trójmianu $x^2 + (m-1)x - 6m^2 + 2m$:

$$3^2 + (m-1) \cdot 3 - 6m^2 + 2m = 0$$

$$-6m^2 + 5m + 6 = 0$$

$$m = \frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad m = -\frac{2}{3}$$

Ponieważ dla każdej z tych otrzymanych wartości $m = \frac{3}{2}$ oraz $m = -\frac{2}{3}$ wyróżnik Δ jest większy od zera, więc w obu przypadkach trójmian $x^2 + (m-1)x - 6m^2 + 2m$ ma dwa różne pierwiastki, z których jeden jest równy 3.

Zatem podane w treści zadania równanie ma dokładnie dwa rozwiązania dla $m \in \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right\}$.

Zadanie 13. (0–5)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- obliczy pochodną funkcji f: $f'(x) = \frac{2x^3-k}{x^2} =$ dla $x \neq 0$

ALBO

- zapisze równanie wynikające z faktu, że punkt styczności należy do wykresu funkcji f:
  $-x_0 = \frac{x_0^3+k}{x_0}$

ALBO

- skorzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej funkcji w punkcie i zapisze równanie: $f'(x_0) = -1$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy skorzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej funkcji w punkcie i zapisze równanie:
$\frac{2x_0^3-k}{x_0^2} = -1$.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy zapisze układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi x_0 oraz k prowadzący do wyznaczenia parametru k, np.: $-x_0 = \frac{x_0^3+k}{x_0}$ i $\frac{2x_0^3-k}{x_0^2} = -1$.

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy obliczy z układu równań $-x_0 = \frac{x_0^3+k}{x_0}$ i $\frac{2x_0^3-k}{x_0^2} = -1$ niewiadomą x_0: $x_0 = -\frac{2}{3}$.

Uwaga:
Wystarczy, że zdający rozwiąże równanie $3x_0^3 = -2x_0^2$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{2}{3}$, $x_0 = 0$.

Zdający otrzymuje .... 5 p.
gdy zastosuje poprawną metodę i uzyska poprawny wynik: $k = -\frac{4}{27}$.

Uwagi:

1 Jeśli zdający przy wyznaczaniu pochodnej popełnia błąd w potędze zmiennej lub traktuje parametr k jako zmienną, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za zapisanie warunku $-x_0 = \frac{x_0^3+k}{x_0}$ lub za zapisanie, że $f'(x_0) = -1$.

2. Jeśli zdający, obliczając pochodną funkcji f, zapisze $f'(x) = \frac{2x^3+k}{x^2}$ (tj. błędnie ustali znak przed współczynnikiem k), to błąd ten traktujemy jako błąd rachunkowy.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Niech punkt $P = (x_0, y_0)$, gdzie $x_0 \neq 0$, będzie punktem styczności prostej $y = -x$ do wykresu funkcji f. Wtedy $y_0 = -x_0$, więc

$$-x_0 = \frac{x_0^3 + k}{x_0}$$

Pochodna funkcji f jest równa

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x - (x^3 + k) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^3 - k}{x^2}$$

dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.

Z warunków zadania wynika, że współczynnik kierunkowy stycznej jest równy (-1); jest on wartością pochodnej dla x_0. Zatem $\frac{2x_0^3 - k}{x_0^2} = -1$. Otrzymujemy układ równań

$$-x_0 = \frac{x_0^3 + k}{x_0} \quad \text{i} \quad \frac{2x_0^3 - k}{x_0^2} = -1$$

Dla $x_0 \neq 0$ jest on równoważny układowi

$$x_0^3 + k = -x_0^2 \quad \text{i} \quad 2x_0^3 - k = -x_0^2$$

Stąd otrzymujemy równanie $3x_0^3 = -2x_0^2$.

Ponieważ $x_0 \neq 0$, więc dzieląc obie strony tego równania przez $3x_0^2$, otrzymujemy $x_0 = -\frac{2}{3}$.

Zatem $k = -x_0^3 - x_0^2 = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$.

Zadanie 14. (0–5)

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą (długością boku AB albo AD), wynikające z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkąta ABD, np.

$$|AB|^2 = (2|AB|)^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot |AB| \cdot 6 \cdot \cos(\sphericalangle ADB)$$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy długość boku AB lub AD: $|AB| = 4$, $|AD| = 8$.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy zastosuje twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu oraz twierdzenie Pitagorasa i zapisze układ równań z niewiadomymi $|BC|$ i $|CD|$: $\begin{cases} |CD| = |BC| + 4 \\ |BC|^2 + |CD|^2 = 36 \end{cases}$

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy nie odrzuci rozwiązania $|AB| = 3$, rozwiąże dwa równania:

$$|BC|^2 + (|BC| + 4)^2 = 36 \text{ oraz } |BC|^2 + (|BC| + 3)^2 = 36$$

i zapisze dwa dodatnie rozwiązania tych równań: $|BC| = -2 + \sqrt{14}$ oraz $|BC| = \frac{-3+3\sqrt{7}}{2}$.

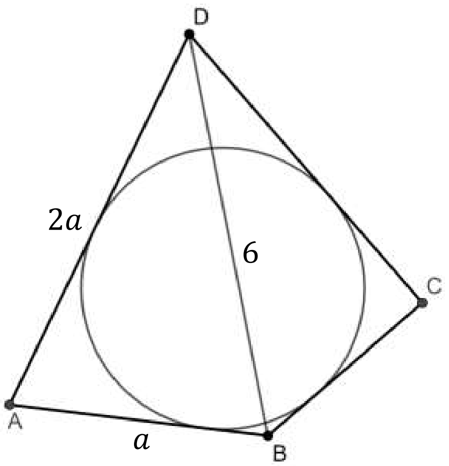
Zdający otrzymuje .... 5 p.
gdy zastosuje poprawną metodę i otrzyma poprawny wynik: $|BC| = -2 + \sqrt{14}$.

Uwagi:

1. Jeśli zdający zakłada błędnie, że $\cos(\sphericalangle BAD) = \frac{7}{8}$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
2. Jeśli zdający zakłada błędnie, że $|AB| = 2 \cdot |AD|$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
3. Jeśli zdający zapisze równanie z dwiema niewiadomymi, wynikające z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu oraz z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta BCD, np.: $|AB| + \sqrt{36 - |BC|^2} = |BC| + 2 \cdot |AB|$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy $a = |AB|$.



Do trójkąta ABD stosujemy twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$a^2 = (2a)^2 + 6^2 - 2 \cdot 2a \cdot 6 \cdot \cos(\sphericalangle ADB)$$

Ponieważ $\cos(\sphericalangle ADB) = \frac{7}{8}$, więc

$$a^2 = (2a)^2 + 6^2 - 2 \cdot 2a \cdot 6 \cdot \frac{7}{8}$$

$$a^2 - 7a + 12 = 0$$

$$a = 3 \quad \text{lub} \quad a = 4$$

i po uwzględnieniu warunku $|AB| > \sqrt{15}$ otrzymujemy $|AB| = 4$ oraz $|AD| = 8$.
Korzystamy z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu i otrzymujemy

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$$

$$4 + |CD| = |BC| + 8$$

$$|CD| = |BC| + 4$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym BCD i otrzymujemy kolejno:

$$|BC|^2 + (|BC| + 4)^2 = |BD|^2$$

$$|BC|^2 + (|BC| + 4)^2 = 36$$

$$|BC|^2 + 4|BC| - 10 = 0$$

$$|BC| = -2 - \sqrt{14} \quad \text{lub} \quad |BC| = -2 + \sqrt{14}$$

Ponieważ $-2 - \sqrt{14} < 0$, więc $|BC| = -2 + \sqrt{14}$.

Zadanie 15. (0–7)

Łącznie za zadanie zdający może otrzymać 7 punktów: 2 punkty za rozwiązanie podpunktu a), 1 punkt za rozwiązanie podpunktu b) oraz 4 punkty za rozwiązanie podpunktu c).

Zasady oceniania dla podpunktu a)
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:
- zapisze równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa oraz podanego obwodu tego trójkąta, np. $\left(4-(x+b)\right)^2 = x^2+b^2$

ALBO
- zapisze układ równań $x^2+y^2=c^2$ i $y=4-x-c$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy wykaże, że pole P trójkąta ABC jako funkcja zmiennej x wyraża się wzorem $P(x)=\frac{x(4-2x)}{4-x}$.

Zasady oceniania dla podpunktu b)
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze, że dziedziną funkcji P jest przedział liczbowy $(0,2)$.

Uwagi:
1. Punkt za wyznaczenie dziedziny funkcji zdający otrzymuje niezależnie od realizacji podpunktu a) zadania, pod warunkiem, że rozważa wyznaczoną przez siebie funkcję jednej zmiennej.

Zasady oceniania dla podpunktu c)
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy wyznaczy pochodną funkcji P: $P'(x)=\frac{2x^2-16x+16}{(4-x)^2}$, gdzie $x\in(0,2)$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy zastosuje warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji P i obliczy miejsca zerowe pochodnej P': $x=4-2\sqrt{2}$.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy zbada znak pochodnej funkcji P oraz wyznaczy (z uzasadnieniem) wartość zmiennej x, dla której funkcja P przyjmuje wartość największą, np.:

$P'(x)>0$ dla $x\in\left(0,4-2\sqrt{2}\right)$

$P'(x)<0$ dla $x\in\left(4-2\sqrt{2},2\right)$

Funkcja P jest rosnąca w przedziale $\left(0,\ 4-2\sqrt{2}\right]$ oraz malejąca w przedziale $\left[4-2\sqrt{2},2\right)$, więc w punkcie $x=4-2\sqrt{2}$ funkcja P osiąga największą wartość.

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy zapisze, że przy podanym obwodzie równym 4, największe pole równe $4\left(3-2\sqrt{2}\right)$ ma trójkąt o bokach $4-2\sqrt{2}$, $4-2\sqrt{2}$ i $4\sqrt{2}-4$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający wyznaczy pochodną funkcji P z błędem, ale wyznaczona pochodna jest funkcją wymierną postaci $\frac{ax^2+bx+c}{(4-x)^2}$, gdzie ax^2+bx+c jest trójmianem kwadratowym, mającym wyróżnik dodatni, to zdający może otrzymać punkty za obliczenie miejsc zerowych pochodnej i wyznaczenie argumentu, dla którego pole osiąga największą wartość, o ile konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy miejsca zerowe pochodnej lub uzasadni istnienie największej wartości rozważanej funkcji.
2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak.
3. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości x, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuacje, gdy zdający:
   a) opisuje, słownie lub graficznie (np. przy użyciu strzałek), monotoniczność funkcji P;
   b) zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja P ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość.
   Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (otrzymuje punkty za wyznaczenie pochodnej funkcji P oraz wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji P).
4. Punkt za wyznaczenie największej wartości funkcji P i długości boków trójkąta o największym polu zdający otrzymuje wtedy, gdy otrzymał punkt za poprawne uzasadnienie, że funkcja P osiąga wartość największą w punkcie $x=4-2\sqrt{2}$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

a) i b)

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $b=|BC|$, $c=|AB|$.
Z warunków zadania $x+b+c=4$, więc $c=4-(x+b)$.
Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ABC i otrzymujemy

$$c^2=x^2+b^2$$

$$[4-(x+b)]^2=x^2+b^2$$

$$b(4-x)=8-4x$$

$$b=\frac{8-4x}{4-x}\,,\quad \text{gdzie } \frac{8-4x}{4-x}>0 \text{ i } 0<x<4$$

Wyznaczamy pole tego trójkąta, jako funkcję długości x jego przyprostokątnej AC:

$$P = \frac{1}{2} \cdot x \cdot b = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{8-4x}{4-x} = \frac{x(4-2x)}{4-x}$$

gdzie $\frac{8-4x}{4-x} > 0$ i $0 < x < 4$.

Wyznaczamy dziedzinę funkcji P:

$$\frac{8-4x}{4-x} > 0 \text{ i } 0 < x < 4$$

$$0 < x < 2$$

Obliczamy pochodną funkcji P:

$$P'(x) = \frac{(4x-2x^2)' \cdot (4-x) - (4x-2x^2) \cdot (4-x)'}{(4-x)^2} = \frac{2x^2-16x+16}{(4-x)^2}$$

dla $x \in (0,2)$.

Obliczamy miejsce zerowe funkcji P':

$$\frac{2x^2-16x+16}{(4-x)^2} = 0$$

$$2x^2-16x+16 = 0$$

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16 = 8 \cdot 16$$

$$x = \frac{16+8\sqrt{2}}{4} = 4+2\sqrt{2} \notin (0,2) \quad \text{lub} \quad x = \frac{16-8\sqrt{2}}{4} = 4-2\sqrt{2} \in (0,2)$$

Badamy monotoniczność funkcji P:

$P'(x) > 0$ dla $x \in \left(0, 4-2\sqrt{2}\right)$

$P'(x) < 0$ dla $x \in \left(4-2\sqrt{2}, 2\right)$

Zatem

funkcja P jest rosnąca w przedziale $\left(0,\ 4-2\sqrt{2}\right]$,

funkcja P jest malejąca w przedziale $\left[4-2\sqrt{2}, 2\right)$.

Stąd w punkcie $x = 4-2\sqrt{2}$ funkcja P osiąga największą wartość.

c)

Gdy $x = 4-2\sqrt{2}$, to wtedy $b = \frac{8-4x}{4-x} = \frac{4(2\sqrt{2}-2)}{2\sqrt{2}} = 4-2\sqrt{2}$.

Zatem $c = x\sqrt{2} = 4\sqrt{2}-4$ i $P\left(4-2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \left(4-2\sqrt{2}\right)^2 = 4(3-2\sqrt{2})$.

Spośród rozważanych trójkątów największe pole ma trójkąt o bokach $4-2\sqrt{2}$, $4-2\sqrt{2}$ oraz $4\sqrt{2}-4$. Pole tego trójkąta jest równe $4(3-2\sqrt{2})$.