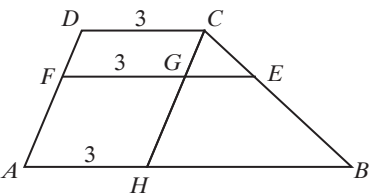
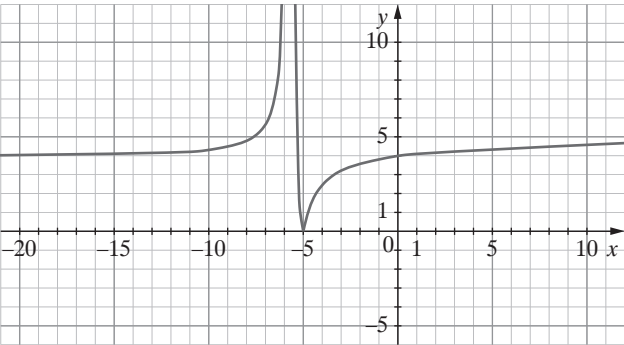


KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI  
Próbna Matura z OPERONEM  
**Matematyka**  
**Poziom rozszerzony**

Listopad 2020

Zadania zamknięte

Za każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
1.	D	$\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3} + 4} \cdot \frac{\sqrt[3]{3} + 2}{\sqrt[3]{3} + 2} = \frac{3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{18}}{11}$
2.	B	 $\frac{ CE }{ EG } = \frac{ CB }{ BH } \Rightarrow \frac{x}{ EG } = \frac{3x}{5} \Rightarrow  EG  = \frac{5}{3},  EF  = 4\frac{2}{3}$
3.	B	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ (\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n) \cdot \frac{(\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n)}{(\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n)} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{(\sqrt{4n^2 + 3n} + 2n)} = \frac{3}{4}$
4.	C	$\left  \frac{-4x - 17}{x + 5} \right  = \left  \frac{3}{x + 5} - 4 \right  \Rightarrow m \in (0, 4) \cup (4, +\infty)$ 

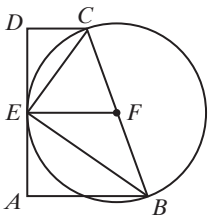
Zadania otwarte – kodowane

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania	Liczba punktów
5.	2 8 3	$1 = \log_{ab} ab = \log_{ab} a + \log_{ab} b = 4 + \log_{ab} b \Rightarrow \log_{ab} b = -3$ $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{3} \log_{ab} a - \frac{1}{2} \log_{ab} b = \frac{17}{6} = 2,8(3)$	2

## Zadania otwarte

Uwagi ogólne.

- Jeżeli zdający rozwiąże bezbłędnie zadanie inną metodą, nieopisaną w schemacie, ale merytorycznie poprawną, otrzymuje za to rozwiązanie maksymalną liczbę punktów.
- Za błąd rachunkowy zdający traci 1 punkt, jeżeli błąd ten nie spowodował znacznego ułatwienia lub utrudnienia zadania (wówczas należy potraktować go tak, jakby był błędem rzeczowym).
- Jeżeli zdający popełni błąd merytoryczny, otrzymuje punkty tylko za tę część zadania, którą rozwiązał do momentu popełnienia tego błędu, dalsza część nie jest oceniana (więc jeżeli zostanie on popełniony na początku, zdający otrzymuje za zadanie 0 punktów).
- Jeżeli zdający źle przepisze dane liczbowe z zadania, ale nie spowoduje to zmiany sensu zadania bądź nie ułatwi rozwiązania, wówczas za całe zadanie traci 1 punkt.
- Jeżeli zdający prawidłowo rozwiąże zadanie, ale podczas zapisywania odpowiedzi źle przepisze rozwiązanie, należy potraktować to jako błąd nieuwagi, za który zdający nie traci punktu.
- Jeżeli punkt ma być przyznany za zapisanie układu kilku równań, to równania te nie muszą być zapisane jedno pod drugim i połączone klamrą, wystarczy, że będą zapisane (w różnych miejscach).

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
6.	<b>Postęp:</b> Obliczenie pochodnej funkcji: $f'(x) = \frac{-20}{(4-3x)^2}$ , $x \neq \frac{4}{3}$ (zapis $x \neq \frac{4}{3}$ nie jest wymagany)	1
	<b>Pokonanie zasadniczych trudności:</b> Obliczenie $x_0$ oraz $f'(x_0)$ : $x_0 = 2$ , $f'(x_0) = f'(2) = -5$	2
	<b>Rozwiązanie bezbłędne:</b> Równanie stycznej: $y = -5x + 13$	3
7.	<b>Postęp:</b> Zapis nierówności w postaci: $\frac{(n-2)(n-1)n}{6} \leq n-1$	1
	<b>Pokonanie zasadniczych trudności:</b> Rozwiązanie nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych: $n \in (-\infty, 1-\sqrt{7}) \cup (1, 1+\sqrt{7})$	2
	<b>Rozwiązanie bezbłędne:</b> Uwzględnienie dziedziny nierówności $n \geq 30$ dla $n \in \mathbb{N}$ i podanie odpowiedzi:	3
8.	<b>Postęp:</b>  Zdający zauważy, że $ \angle BEC  = 90^\circ$ oraz $\triangle BEF$ i $\triangle CEF$ są równoramienne.	1
	<b>Pokonanie zasadniczych trudności:</b> Zdający zauważy kąty naprzemianległe w trapezach $ABFE$ i $CDEF$ .	2

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	<p><b>Rozwiązanie bezbłędne:</b> Zdający zauważy, że <math>\angle ABE</math> i <math>\angle CDE</math> są podobne na podstawie cechy kąt-kąt, stąd <math>\frac{a}{h} = \frac{h}{b}</math>, i poprawnie sformułuje wniosek.</p>	3
9.	<p><b>Postęp:</b> Opis zdarzeń, np.: A – wylosowano piłeczkę z liczbą pierwszą za drugim razem B – wylosowano piłeczkę z liczbą nieparzystą za pierwszym razem A   B – druga wylosowana piłka oznaczona jest liczbą pierwszą, jeżeli wiadomo, że pierwsza była oznaczona liczbą nieparzystą</p>	1
	<p><b>Istotny postęp:</b> Obliczenie mocy zbioru: <math>\overline{A \cap B} = 6 \cdot 10 + 9 \cdot 9 = 141</math> lub <math>\overline{B} = 15 \cdot 29 = 435</math></p>	2
	<p><b>Pokonanie zasadniczych trudności:</b> Obliczenie mocy zbiorów: <math>\overline{A \cap B} = 6 \cdot 10 + 9 \cdot 9 = 141</math> i <math>\overline{B} = 15 \cdot 29 = 435</math></p>	3
	<p><b>Rozwiązanie bezbłędne:</b> Obliczenie prawdopodobieństwa: <math>P(A B) = \frac{47}{145}</math></p>	4
10.	<p><b>Postęp:</b> Skorzystanie z twierdzenia sinusów w <math>\triangle BCD</math>: <math>\frac{ CD }{\sin 60^\circ} = \frac{3x}{\sin \alpha}</math>, gdzie <math> BD  = 3x</math>, <math> \angle BCD  = \alpha</math></p>	1
	<p><b>Istotny postęp:</b> Skorzystanie z twierdzenia cosinusów w <math>\triangle BCD</math>: <math> CD ^2 = 9x^2 + 16x^2 - 24x^2 \cos \alpha</math></p>	2
	<p><b>Pokonanie zasadniczych trudności:</b> Obliczenie długości CD: <math> CD  = \sqrt{13}x</math></p>	3
	<p><b>Rozwiązanie bezbłędne:</b> Obliczenie sinusa danego kąta: <math>\sin \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}</math></p>	4
11.	<p><b>Postęp:</b> Przekształcenie równania do postaci: <math>4\sin^2 x \cos^2 x + 1 = 7\sin^2 x</math></p>	1
	<p><b>Istotny postęp:</b> Przekształcenie równania do postaci: <math>-4\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 = 0</math> (Zdający może zastosować podstawienie, ale nie musi.)</p>	2
	<p><b>Pokonanie zasadniczych trudności:</b> Rozwiązanie uwzględniające dziedzinę: <math>\sin^2 x = \frac{1}{4}</math> lub <math>\sin^2 x = -1</math> – sprzeczność</p>	3
	<p><b>Rozwiązanie bezbłędne:</b> <math>x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{5\pi}{6}, \pm \frac{7\pi}{6}, \pm \frac{11\pi}{6} \right\}</math></p>	4

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
12.	<p>Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów:                      Etap I polega na doprowadzeniu równania do postaci równania wielomianowego stopnia trzeciego, zauważeniu, że liczba <math>-1</math> jest pierwiastkiem tego wielomianu oraz zapisanie równania po podzieleniu przez dwumian <math>(x + 1)</math>, za ten etap zdający może otrzymać 2 punkty.                      Etap II polega na zbadaniu warunku podanego w zadaniu. Za ten etap zdający może otrzymać 3 pkt.                      Etap III to podanie rozwiązania. Za ten etap zdający otrzymuje 1 pkt.</p>	
	<p><b>Etap I</b>                      Zdający zauważy, że pierwiastkiem równania:  <math>x^3 + 5x^2 + mx + m - 4 = 0</math> jest liczba <math>-1</math>                      Zapisanie równania: <math>(x + 1)(x^2 + 4x + m - 4) = 0</math>                      Za każdą część tego etapu zdający otrzymuje po 1 punkcie.</p>	2
	<p><b>Etap II</b>                      Rozpatrzenie warunków:  <math>\Delta &gt; 0 \Rightarrow m &lt; 8</math>  <math>x \neq -1 \Rightarrow m \neq 7</math>  <math>x \neq 0 \Rightarrow m \neq 4</math>                      Po 1 pkt zdający otrzymuje za rozpatrzenie każdego w warunków.</p>	3
	<p><b>Etap III</b>                      Wyznaczenie szukanej wartości parametru <math>m</math> z uwzględnieniem wszystkich warunków:  <math>m \in (-\infty, 8) - \{4, 7\}</math></p>	1
13.	<p><b>Postęp:</b>                      Zapis jednego z równań (<math>a</math> – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, <math>r</math> – różnica tego ciągu): <math>a_{13} = 5a_3 + 1</math> lub <math>(a + 6r)^2 = a(a + 102r)</math></p>	1
	<p><b>Istotny postęp:</b>                      Zapis układu równań z dwiema niewiadomymi:  <math display="block">\begin{cases} a_{13} = 5a_3 + 1 \\ (a + 6r)^2 = a(a + 102r) \end{cases}</math></p>	2
	<p><b>Pokonanie zasadniczych trudności:</b>                      Rozwiązanie układu: <math>a = 1, r = 2,5</math></p>	3
	<p><b>Rozwiązanie bezbłędne:</b>                      Podanie odpowiedzi: <math>q = 16</math></p>	4
14.	<p><b>Postęp:</b>                      Zdający zauważy, że pierwsza współrzędna środka okręgu wynosi <math>-r</math> i zapisze:  <math>(x + r)^2 + (y - b)^2 = r^2</math></p>	1
	<p><b>Istotny postęp:</b>                      Zapisanie układu równań: <math display="block">\begin{cases} (r - 2)^2 + b^2 = r^2 \\ r = \frac{-4r + 3b + 33}{5} \end{cases}</math></p>	2
	<p><b>Pokonanie zasadniczych trudności:</b>                      Doprowadzenie do równania z jedną zmienną:  <math>\frac{5}{4}b^2 + 5 =  -b^2 + 3b + 29 </math></p>	3
	<p><b>Rozwiązanie prawie pełne:</b>                      Rozwiązanie układu równań: <math display="block">\begin{cases} b = -\frac{8}{3} \\ r = \frac{25}{9} \end{cases} \wedge \begin{cases} b = 4 \\ r = 5 \end{cases}</math>                      Dwa punkty są przyznawane za rozpatrzenie dwóch przypadków przy wartości bezwzględnej, w przypadku braku jednego z nich zdający może otrzymać za całe zadanie maks. 4 pkt.</p>	5

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	<p><b>Rozwiązanie bezbłędne:</b>                      Podanie odpowiedzi: <math>\left(x + \frac{25}{9}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{625}{81}</math>                      lub: <math>(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 25</math></p>	6
15.	<p>Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów:                      Etap I polega na wyznaczeniu długości boków, wysokości i kwadratu promienia dwóch powstałych stożków, zapisaniu objętości bryły jako funkcji jednej zmiennej i wyznaczeniu jej dziedziny. Za ten etap zdający otrzymuje 3 pkt.                      Etap II polega na obliczeniu pochodnej funkcji, jej miejsc zerowych i zbadaniu z uzasadnieniem, gdzie funkcja osiąga wartość największą. Za ten etap zdający otrzymuje 3 pkt.                      Etap III to podanie rozwiązania (długości boków trójkąta). Za ten etap zdający otrzymuje 1 pkt.</p>	
	<p><b>Etap I</b>                      (oznaczenie długości wysokości jednego ze stożków jako <math>x</math>, a jego tworzącej jako <math>\frac{1}{2}L - x</math>)                      Zapisanie: <math>r^2 = \frac{1}{4}L^2 - Lx</math>                      Zapisanie objętości bryły za pomocą jednej zmiennej: <math>V(x) = \frac{2}{3}\pi x \left(\frac{1}{4}L^2 - Lx\right)</math>                      Wyznaczenie dziedziny funkcji na podstawie własności trójkąta prostokątnego <math>x &lt; \frac{1}{2}L - x</math>:  <math>x \in \left(0; \frac{1}{4}L\right)</math>                      Za każdą część tego etapu zdający otrzymuje po 1 pkt.</p>	3
	<p><b>Etap II</b>                      Wyznaczenie pochodnej funkcji <math>V(x)</math>: <math>V'(x) = -\frac{4}{3}L\pi x + \frac{1}{6}L^2\pi</math>                      Obliczenie miejsc zerowych funkcji pochodnej: <math>x = \frac{1}{8}L</math>                      Zbadanie znaku pochodnej i prawidłowe uzasadnienie, że dla <math>x = \frac{1}{8}L</math> funkcja <math>V</math> osiąga największą wartość:                      funkcja <math>V(x)</math> rośnie w <math>\left(0; \frac{1}{8}L\right)</math> i maleje w <math>\left(\frac{1}{8}L; \frac{1}{4}L\right)</math>                      Za każdą część tego etapu zdający otrzymuje po 1 pkt.</p>	3
	<p><b>Etap III</b>                      Podanie długości boków trójkąta: <math>\frac{1}{4}L, \frac{3}{8}L, \frac{3}{8}L</math></p>	1

## Gięda maturalna - serwis do nauki on-line

### TWÓJ KOD DOSTĘPU

GRMRLA21HE2

- 1 Zaloguj się na [giędamaturalna.pl](http://giędamaturalna.pl)
- 2 Wpisz swój kod
- 3 Odblokuj czasowy dostęp do bazy dodatkowych zadań i arkuszy z matematyki – p. rozsz. (masz dostęp do 31.01.2022 r.)



## ZDAJ MATURE

się na sprawdzoną pomoc

Nie wiesz, od czego zacząć przygotowania do matury?  
Skorzystaj ze sprawdzonej pomocy!

PAKIETY **-15%** SPRAWDŹ