

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	<b>Zasady oceniania rozwiązań zadań</b>
<i>Egzamin:</i>	<b>Egzamin maturalny</b>
<i>Przedmiot:</i>	<b>Matematyka</b>
<i>Poziom:</i>	<b>Poziom rozszerzony</b>
<i>Formy arkusza:</i>	MMA-R1_1P-202, MMA-R1_2P-202, MMA-R1_3P-202, MMA-R1_4P-202, MMA-R1_5P-202, MMA-R1_6P-202, MMA-R1_7P-202, MMA-R1_QP-202
<i>Termin egzaminu:</i>	Termin główny – czerwiec 2020 r.
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	3 sierpnia 2020 r.

Warszawa 2020

**Zadanie 1. (0–1)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R3.4).	<b>B</b>

**Zadanie 2. (0–1)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$ , $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów (R5.2).	<b>C</b>

**Zadanie 3. (0–1)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź
III. Modelowanie matematyczne	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzenia mi do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).	<b>A</b>

**Zadanie 4. (0–1)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$ (R2.1).	<b>B</b>

**Zadanie 5. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź			
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów (R7.5).	<table border="1"> <tr> <td style="padding: 5px;">9</td> <td style="padding: 5px;">5</td> <td style="padding: 5px;">5</td> </tr> </table>	9	5	5
9	5	5			

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.*

**Zadanie 6. (0–3)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną (R1.1). 4. Funkcje. Zdający szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu (R4.4).

**Zasady oceniania i sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1p.**

Zdający naszkicuje wykres funkcji  $f$  określonej wzorem:

- $f(x) = |x - 5|$

**albo**

- $f(x) = |x - 5| + 4$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2p.**

Zdający zapisze układ nierówności

- $0 < (a - 1)^2 - 4 < 5$  **oraz** rozwiąże poprawnie jedną z nierówności tego układu

**albo**

- $4 < (a - 1)^2 < 9$  **oraz** rozwiąże poprawnie jedną z nierówności tego układu

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3p.**

Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że  $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$ .

### Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1p.**

Zdający zapisze, że podane równanie ma dwa rozwiązania dodatnie, gdy spełniona jest nierówność

$$0 < |x-5| < 5$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2p.**

Zdający zapisze układ nierówności  $0 < (a-1)^2 - 4 < 5$  oraz rozwiąże poprawnie jedną z dwóch nierówności tego układu i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3p.**

Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że  $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$ .

### Zasady oceniania III sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1p.**

Zdający:

- zapisze, że podane równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2 - 4 > 0,$$

albo

- zapisze podane równanie w postaci alternatywy równań

$$x-5 = (a-1)^2 - 4 \quad \text{lub} \quad x-5 = -(a-1)^2 + 4$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2p.**

Zdający:

- zapisze, że podane równanie ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2 - 4 > 0$$

i

- zapisze podane równanie w postaci alternatywy równań

$$x-5 = (a-1)^2 - 4 \quad \text{lub} \quad x-5 = -(a-1)^2 + 4$$

i

- rozwiąże poprawnie przynajmniej jedną z trzech nierówności:

$$(a-1)^2 - 4 > 0, \quad (a-1)^2 + 1 > 0, \quad 9 - (a-1)^2 > 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3p.**

Zdający zapisze, że  $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$ .

**Zasady oceniania IV sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1p.**

Zdający

- zapisze warunek istnienia rozwiązań rzeczywistych równania  $|x-5|=(a-1)^2-4$ :

$$(a-1)^2-4 \geq 0$$

albo

- zdający zapisze układ nierówności:

$$(-10)^2-4\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right) > 0 \quad \text{i} \quad \frac{-(-10)}{1} > 0 \quad \text{i} \quad 25-\left((a-1)^2-4\right)^2 > 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2p.**

Zdający zapisze układ nierówności

$$(a-1)^2-4 \geq 0 \quad \text{i} \quad (-10)^2-4\left(25-\left((a-1)^2-4\right)^2\right) > 0 \quad \text{i} \quad \frac{-(-10)}{1} > 0 \quad \text{i} \quad 25-\left((a-1)^2-4\right)^2 > 0$$

i poprawnie rozwiąże drugą lub czwartą z nich i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne..... 3p.**Zdający rozwiąże układ nierówności i zapisze, że  $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$ .**Zasady oceniania V sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1p.**

Zdający zastosuje definicję wartości bezwzględnej i zapisze równanie w każdym z dwóch przypadków:

$$\text{gdy } x-5 \geq 0, \text{ to } x-5 = (a-1)^2-4,$$

$$\text{gdy } x-5 < 0, \text{ to } 5-x = (a-1)^2-4$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2p.**Zdający zapisze warunki na to, żeby rozwiązaniem równania była liczba dodatnia w każdym z dwóch rozpatrywanych przypadków i wyznaczy wszystkie wartości parametru  $a$ , dla których rozwiązaniem równania jest liczba dodatnia w jednym z tych przypadków:

- gdy  $x-5 \geq 0$ , to  $(a-1)^2+1 > 0$  i  $(a-1)^2+1 \geq 5$ , skąd  $a \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

albo

- gdy  $x-5 < 0$ , to  $9-(a-1)^2 > 0$  i  $9-(a-1)^2 < 5$ , skąd  $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne..... 3p.**

Zdający wyznaczy wszystkie wartości parametru  $a$ , dla których równanie  $|x-5|=(a-1)^2-4$  ma dwa rozwiązania dodatnie:  $a \in (-2,-1) \cup (3,4)$ .

**Uwaga**

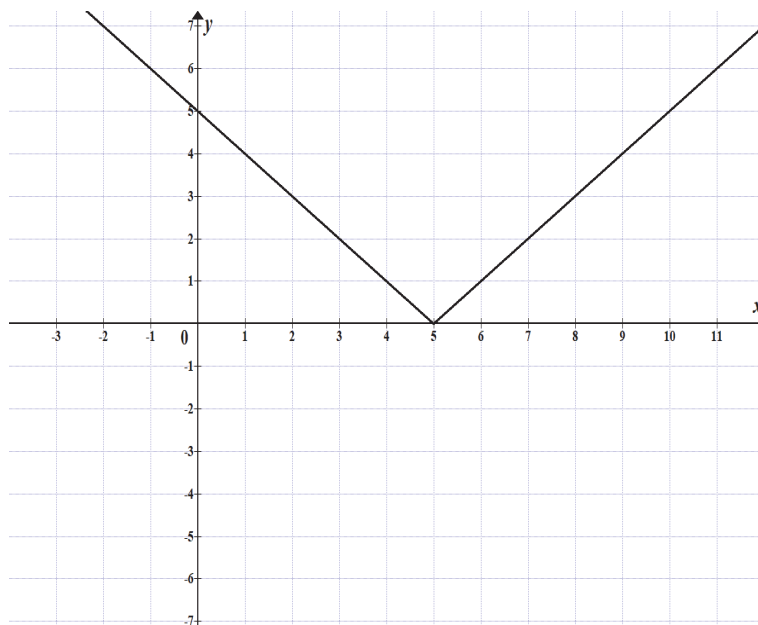
Jeżeli zdający rozpatrzy oba przypadki, ale w pierwszym przypadku nie skomentuje, że nierówność  $(a-1)^2+1>0$  jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $a$ , to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie.

**Uwagi**

1. Jeśli zdający rozwiązuje zadanie sposobem II lub III zapisze nierówność  $(a-1)^2-4 \geq 0$  i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, otrzymując w odpowiedzi zbiór  $(-2,-1) \cup (3,4)$ , to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie I sposobem i naszkicowany wykres zawiera usterki, ale dalsze rozumowanie jest prawidłowe, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji  $f(x)=|x-5|+4$ , błędnie przesunie wykres funkcji  $y=|x-5|$  o 4 jednostki w dół i konsekwentnie przeprowadzi rozumowanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji  $f(x)=|x-5|+4$ , zamieni miejscami współrzędne wektora przesunięcia, otrzyma wykres funkcji, dla której istnieją dwa rozwiązania dodatnie równania  $f(x)=(a-1)^2$  i konsekwentnie przeprowadzi rozumowanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
5. Jeżeli zdający, sporządzając wykres funkcji  $f(x)=|x-5|$ , błędnie przesunie wykres funkcji  $y=|x|$ , i otrzyma wykres funkcji  $g$  takiej, że nie istnieją dwa dodatnie rozwiązania równania  $g(x)=(a-1)^2-4$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe rozwiązania****I sposób**

Rozważmy funkcję  $f$  określoną wzorem  $f(x) = |x - 5|$  i naskicujmy jej wykres.



Wnioskujemy stąd, że podane równanie ma dwa pierwiastki dodatnie, jeśli spełniona jest nierówność

$$0 < (a-1)^2 - 4 < 5, \text{ czyli nierówność } 4 < (a-1)^2 < 9.$$

Stąd otrzymujemy, że  $2 < |a-1| < 3$ , zatem

$$(a-1) \in (-3, -2) \cup (2, 3).$$

Ostatecznie  $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$ .

**II sposób** („podstawianie”)

Równanie  $|x-5| = (a-1)^2 - 4$  ma dwa dodatnie rozwiązania rzeczywiste, gdy prawdziwa jest nierówność

$$0 < |x-5| < 5.$$

Ponieważ  $|x-5| = (a-1)^2 - 4$ , więc prawdziwa jest nierówność

$$0 < (a-1)^2 - 4 < 5$$

Nierówność ta jest równoważna koniunkcji nierówności

$$(a-3)(a+1) > 0 \quad \text{i} \quad (a+2)(a-4) < 0,$$

skąd otrzymujemy

$$a \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \quad \text{i} \quad a \in (-2, 4).$$

Zatem dla  $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$  równanie  $|x-5| = (a-1)^2 - 4$  ma dwa rozwiązania dodatnie.

### III sposób

Równanie  $|x-5|=(a-1)^2-4$  ma dwa rozwiązania, gdy spełniona jest nierówność

$$(a-1)^2-4 > 0.$$

Nierówność ta jest równoważna nierówności  $(a-3)(a+1) > 0$ , skąd otrzymujemy

$$a < -1 \text{ lub } a > 3. \quad (1)$$

Równanie  $|x-5|=(a-1)^2-4$  jest równoważne alternatywie równań:

$$x-5=(a-1)^2-4 \quad \text{lub} \quad x-5=-(a-1)^2+4$$

$$x=(a-1)^2+1 \quad \text{lub} \quad x=-(a-1)^2+9$$

Rozwiązanie pierwszego z równań jest liczbą dodatnią, dla każdej liczby rzeczywistej  $a$ .  
Zatem, aby równanie miało dwa dodatnie rozwiązania musi być spełniony warunek:

$$-(a-1)^2+9 > 0.$$

Stąd otrzymujemy  $(3+a-1)(3-a+1) > 0$ , czyli  $(a+2)(4-a) > 0$ , a zatem

$$-2 < a < 4. \quad (2)$$

Uwzględniając (1) i (2) otrzymujemy  $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$ .

### IV sposób

Ponieważ lewa strona równania  $|x-5|=(a-1)^2-4$  jest nieujemna, więc równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(a-1)^2-4 \geq 0,$$

$$(a-1-2)(a-1+2) \geq 0,$$

$$(a-3)(a+1) \geq 0,$$

$$a \leq -1 \quad \text{lub} \quad a \geq 3.$$

Podnosząc obie strony równania  $|x-5|=(a-1)^2-4$  do kwadratu, otrzymujemy równanie równoważne

$$|x-5|^2 = \left( (a-1)^2 - 4 \right)^2,$$

$$(x-5)^2 = \left( (a-1)^2 - 4 \right)^2,$$

$$x^2 - 10x + 25 - \left( (a-1)^2 - 4 \right)^2 = 0.$$

Równanie to ma dwa dodatnie rozwiązania rzeczywiste  $x_1, x_2$ , gdy spełnione są jednocześnie trzy warunki

$$\Delta > 0 \quad \text{i} \quad x_1 + x_2 > 0 \quad \text{i} \quad x_1 x_2 > 0.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy

$$(-10)^2 - 4 \left( 25 - \left( (a-1)^2 - 4 \right)^2 \right) > 0 \quad \text{i} \quad \frac{-(-10)}{1} > 0 \quad \text{i} \quad 25 - \left( (a-1)^2 - 4 \right)^2 > 0,$$

Druga z tych nierówności jest prawdziwa dla każdej wartości rzeczywistej  $a$ .

Rozwiązujemy pierwszą z tych nierówności

$$100 - 4 \left( 25 - \left( (a-1)^2 - 4 \right)^2 \right) > 0,$$

$$25 - \left( 25 - \left( (a-1)^2 - 4 \right)^2 \right) > 0,$$

$$\left( (a-1)^2 - 4 \right)^2 > 0,$$

$$(a-1)^2 - 4 \neq 0,$$

$$(a-1-2)(a-1+2) \neq 0,$$

$$(a-3)(a+1) \neq 0,$$

$$a \neq 3 \quad \text{i} \quad a \neq -1.$$

Rozwiązujemy trzecią z nierówności

$$25 - \left( (a-1)^2 - 4 \right)^2 > 0,$$

$$\left( 5 - \left( (a-1)^2 - 4 \right) \right) \left( 5 + \left( (a-1)^2 - 4 \right) \right) > 0,$$

$$\left( 9 - (a-1)^2 \right) \left( (a-1)^2 + 1 \right) > 0,$$

Ponieważ  $(a-1)^2 + 1 > 0$  dla każdej wartości  $a$ , więc

$$9 - (a-1)^2 > 0,$$

$$(3 - (a-1))(3 + (a-1)) > 0,$$

$$(4 - a)(2 + a) > 0,$$

$$-2 < a < 4.$$

W rezultacie otrzymujemy

$$(a \leq -1 \text{ lub } a \geq 3) \text{ i } a \neq 3 \text{ i } a \neq -1 \text{ i } -2 < a < 4.$$

Stąd  $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$ .

### **V sposób**

Rozważmy dwa przypadki.

1. Gdy  $x-5 \geq 0$ , czyli  $x \geq 5$ , to wtedy  $|x-5| = x-5$ , a równanie ma postać

$$x-5 = (a-1)^2 - 4. \text{ Stąd } x = (a-1)^2 + 1. \text{ Rozwiązanie to jest dodatnie dla każdej wartości}$$

rzeczywistej  $a$ . Ponieważ  $x \geq 5$ , więc  $(a-1)^2 + 1 \geq 5$ , czyli  $(a-1)^2 \geq 4$ , skąd  $|a-1| \geq 2$ ,

a więc  $a \leq -1$  lub  $a \geq 3$ . W tym przypadku otrzymujemy

$$a \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty).$$

2. Gdy  $x-5 < 0$ , czyli  $x < 5$ , to wtedy  $|x-5| = 5-x$ , a równanie ma postać

$$5-x = (a-1)^2 - 4. \text{ Stąd } x = 9 - (a-1)^2. \text{ Rozwiązanie to jest dodatnie, gdy}$$

$9 - (a-1)^2 > 0$ , czyli  $(a-1)^2 < 9$ , skąd  $|a-1| < 3$ , a więc  $-2 < a < 4$ . Rozwiązanie to jest

mniejsze od 5, gdy  $9 - (a-1)^2 < 5$ , czyli  $(a-1)^2 > 4$ , skąd  $|a-1| > 2$ , a więc  $a < -1$  lub  $a > 3$ . Zatem w tym przypadku otrzymujemy  $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$ .

W rezultacie rozpatrzonych przypadków otrzymujemy

$$a \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \text{ i } a \in (-2, -1) \cup (3, 4),$$

a więc  $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$ .

### Zadanie 7. (0–3)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów (7.3).

#### Zasady oceniania I i II sposobu

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1p.**

Zdający:

- skorzysta z podobieństwa trójkątów i zapisze, np.:  $|AD| = 3|KP|$  lub

$$|CP| = x \text{ i } |DP| = 2x$$

albo

- skorzysta z twierdzenia o odcinkach stycznych i zapisze, np.:  $|KM| = |KP|$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2p.**

Zdający:

- skorzysta z podobieństwa trójkątów  $CPK$  i  $CMD$  i zapisze poprawne równanie

$$\text{pozwalające obliczyć długość odcinka } PK: \frac{|PK|}{2} = \frac{2x}{3x}$$

albo

- skorzysta z podobieństwa trójkątów  $ADM$  i  $ACD$  i zapisze poprawne równanie z jedną

$$\text{niewiadomą, np. } \frac{4-t}{3t} = \frac{3t}{6}, \text{ gdzie } t = |KM| = |KP|$$

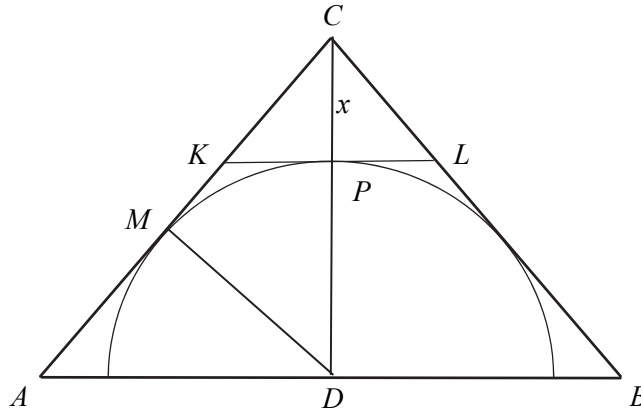
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne..... 3p.**

Zdający rozwiąże powyższe równanie i uzasadni, że  $|AM| : |MC| = 4 : 5$ .

**Przykładowe rozwiązanie****I sposób**

Najpierw uzupełnimy rysunek.



Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnosimy, że odcinek  $KL$  jest równoległy do odcinka  $AB$ .

Oznaczmy środek odcinka  $KL$  przez  $P$  i niech  $|CP| = x$ .

Trójkąty  $CKP$  i  $CAD$  są podobne (cecha  $KKK$ ) w skali  $1:3$ . Wtedy  $|PD| = 2x$  i  $|MD| = 2x$ .

Trójkąty  $CPK$  i  $CMD$  są podobne (cecha  $KKK$ ). Stąd  $\frac{|PK|}{|CK|} = \frac{|MD|}{|CD|}$ , czyli  $\frac{|PK|}{2} = \frac{2x}{3x}$ .

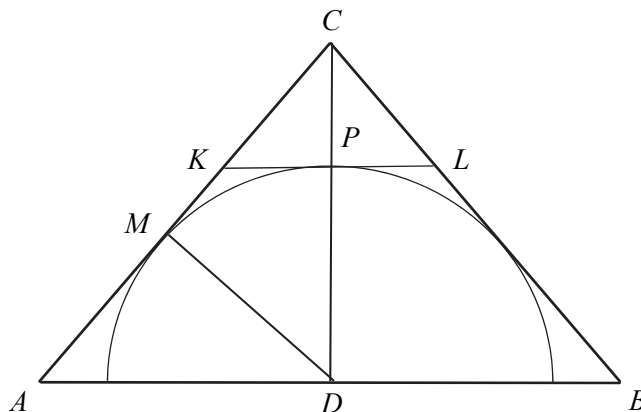
Stąd  $|PK| = \frac{4}{3}$ , więc  $|AM| = \frac{8}{3}$  oraz  $|MC| = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$ .

Zatem  $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{5}$ .

**To kończy dowód.**

**II sposób**

Najpierw uzupełnimy rysunek.



Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnosimy, że odcinek  $KL$  jest równoległy do odcinka  $AB$ .

Niech punkt  $P$  będzie środkiem odcinka  $KL$ .

Zauważamy, że  $|KM| = |KP|$ , z twierdzenia o równości odcinków stycznych, łączących punkt leżący poza okręgiem z punktami styczności.

Niech  $|KM| = |KP| = t$ . Wtedy  $|AD| = 3t$  i  $|AM| = 4 - t$ . Trójkąt  $ADM$  jest podobny do trójkąta  $ACD$ , na mocy cechy (ką, ką, ką); są to trójkąty prostokątne, a kąt  $MAD$  jest wspólny dla obu trójkątów.

Możemy zatem zapisać równość:  $\frac{|AM|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AC|}$ , czyli  $\frac{4-t}{3t} = \frac{3t}{6}$ , skąd otrzymujemy równanie

$$9t^2 + 6t - 24 = 0.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania:  $t = -2, t = \frac{4}{3}$ . Odrzucamy ujemne rozwiązanie tego równania.

Zatem  $t = \frac{4}{3}$ . Ostatecznie  $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4 - \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{5}$ .

**To kończy dowód.**

**Zadanie 8. (0–3)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).

**Zasady oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1p.**

Zdający zapisze równanie  $(a+1)^2 = (2b+1)^2$   
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2p.**

Zdający zapisze wniosek  $a = 2b$  (bez uzasadnienia lub z niepełnym uzasadnieniem)  
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne..... 3p.**

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

**Zasady oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1p.**

Zdający zapisze równanie  $(a - 2b)(a + 2b) = -2(a - 2b)$   
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2p.**

Zdający zapisze wniosek  $a = 2b$  (bez uzasadnienia lub z niepełnym uzasadnieniem) i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne..... 3p.**

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

**Zasady oceniania III sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1p.**

Zdający obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego  $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$  np. zmiennej  $a$ ,  $\Delta = (4b + 2)^2$  i zapisze, że jest on nieujemny dla każdej wartości  $b$  albo, że jest on dodatni dla każdej wartości  $b > 0$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2p.**

Zdający obliczy pierwiastki trójmianu  $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$ :  $a = -2 - 2b$  lub  $a = 2b$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne..... 3p.**

Zdający zapisze pełne uzasadnienie.

**Uwaga**

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość równania jedynie dla wybranych wartości  $a$  i  $b$ , to otrzymuje **0 punktów**.

**Przykładowe rozwiązania****I sposób**

Zapisujemy równanie równoważne równaniu z założenia:  $a^2 + 2a + 1 = 4b^2 + 4b + 1$ . Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia i zapisujemy to równanie w postaci  $(a + 1)^2 = (2b + 1)^2$ . Oba wyrażenia w nawiasach są dodatnie, zatem równość kwadratów jest równoważna równości tych wyrażen, stąd  $a + 1 = 2b + 1$  i dalej,  $a = 2b$ .

**To kończy dowód.**

**II sposób**

Przekształcamy założenie równoważnie:

$$\begin{aligned} a^2 - 4b^2 &= 4b - 2a \\ (a - 2b)(a + 2b) &= -2(a - 2b) \\ (a - 2b)(a + 2b + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Liczby  $a$  i  $b$  są dodatnie, zatem  $a + 2b + 2 \neq 0$ . Stąd  $a - 2b = 0$ , czyli  $a = 2b$ .

**To kończy dowód.**

**III sposób**

Wyrażenie  $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$  traktujemy jako trójmian kwadratowy jednej zmiennej np.  $a$ .

Wyróżnik trójmianu kwadratowego  $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b$  jest równy:  $\Delta = (4b + 2)^2$ .

Ten wyróżnik jest nieujemny dla każdej rzeczywistej wartości  $b$ .

Obliczamy pierwiastki tego trójmianu

$$a = -2 - 2b \text{ lub } a = 2b.$$

Ponieważ  $b > 0$ , więc liczba  $-2 - 2b < 0$ , co jest sprzeczne z założeniem, że  $a > 0$ .

Zatem  $a = 2b$ .

**To kończy dowód.**

**Zadanie 9. (0–4)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.6).

**Zasady oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1p.**

Zdający doprowadzi równanie do postaci równoważnej, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna tego samego kąta, np.:  $3 - 6 \sin^2 x + 10 - 10 \sin^2 x = 24 \sin x - 3$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2p.**

Zdający rozwiąże równanie kwadratowe  $2t^2 + 3t - 2 = 0$ :  $t = -2$  oraz  $t = \frac{1}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- zapisze, że równanie  $\sin x = -2$  nie ma rozwiązań i poda co najmniej jedną serię rozwiązań równania  $\sin x = \frac{1}{2}$  w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą}$$

albo

- zapisze, że równanie  $\sin x = -2$  nie ma rozwiązań i poda jedno rozwiązanie równania  $\sin x = \frac{1}{2}$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

**Rozwiązanie pełne..... 4 p.**

Zdający wyznaczy oba rozwiązania równania:  $x_1 = \frac{\pi}{6}$  oraz  $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ .

### Uwagi

1. Akceptujemy przybliżone rozwiązania elementarnych równań trygonometrycznych.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie obydwa rozwiązania równania  $\sin x = \frac{1}{2}$  należące do przedziału  $(0, 2\pi)$  i nie zapisze komentarza dotyczącego równania  $\sin x = -2$ , to otrzymuje **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający przed uzyskaniem trygonometrycznych równań elementarnych popełni błędy rachunkowe i otrzyma równania elementarne, z których co najmniej jedno ma dwie serie rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający przed uzyskaniem elementarnych równań trygonometrycznych popełni błąd polegający na niepoprawnym zastosowaniu wzoru na cosinus kąta podwojonego lub błąd polegający na podstawieniu w miejsce  $\sin x$  wyrażenia  $\sqrt{1 - \cos^2 x}$ , ale otrzyma co najmniej jedno równanie typu  $\sin x = a$ , gdzie  $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ , i konsekwentnie to równanie rozwiąże, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**. Jeżeli jednak zdający otrzyma co najmniej jedno równanie typu  $\sin x = a$ , gdzie  $a \in \{-1, 0, 1\}$ , i to równanie konsekwentnie rozwiąże, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający zapisze równanie  $\sin x = \frac{2}{3} \cos^2 x$ , równoważne równaniu  $3 \cos 2x + 10 \cos^2 x = 24 \sin x - 3$ , a następnie rozwiąże równanie  $\frac{4}{9} \cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0$ , otrzymując 4 rozwiązania tego równania należące do przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = \frac{5}{6}\pi$ ,  $x = \frac{7}{6}\pi$ ,  $x = \frac{11}{6}\pi$  i nie odrzuci „obcych” rozwiązań:  $x = \frac{7}{6}\pi$ ,  $x = \frac{11}{6}\pi$ , to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

### Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy dane równanie w sposób równoważny:

$$\begin{aligned} 3 \cos 2x + 10 \cos^2 x &= 24 \sin x - 3, \\ 3(1 - 2 \sin^2 x) + 10(1 - \sin^2 x) &= 24 \sin x - 3, \\ 3 - 6 \sin^2 x + 10 - 10 \sin^2 x &= 24 \sin x - 3, \\ 16 - 16 \sin^2 x &= 24 \sin x, \\ 16 \sin^2 x + 24 \sin x - 16 &= 0 \\ 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Niech  $t = \sin x$ . Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$\begin{aligned} 2t^2 + 3t - 2 &= 0, \\ \Delta = 3^2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 &= 9 + 16 = 25, \\ \sqrt{\Delta} &= 5, \end{aligned}$$

$$t_1 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2,$$

$$t_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Równanie  $\sin x = -2$  jest sprzeczne, a równanie  $\sin x = \frac{1}{2}$  ma w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  dwa

rozwiązania:  $x_1 = \frac{\pi}{6}$  oraz  $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ .

### Zadanie 10. (0–5)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3). Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ -początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).

#### Zasady oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1p.**

Zdający

- wykorzysta wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego lub własność ciągu geometrycznego i zapisze np.:

$$a_2 = a_1q \text{ i } a_3 = a_1q^2$$

**lub**

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4}$$

**lub**

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

**albo**

- wykorzysta wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego lub własność ciągu arytmetycznego i zapisze np.:

$$\circ (a_2 = a_3 + r \text{ i } a_1 = a_3 + 3r) \text{ lub } (b_2 = a_3 + r \text{ i } b_4 = a_3 + 3r) \text{ lub } (b_2 = b_1 + r \text{ i } b_4 = b_1 + 3r)$$

**lub**

$$\circ a_1 - a_2 = 2(a_2 - a_3) \text{ lub } b_4 - b_2 = 2(b_2 - b_1)$$

**lub**

$$\circ b_3 = \frac{b_4 + b_2}{2} \text{ i } b_2 = \frac{b_1 + b_3}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2p.**

Zdający

- zapisze układ równań, z którego można otrzymać równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$\circ a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4} \text{ i } a_1 = a_1q^2 + 3(a_1q - a_1q^2)$$

lub

$$\circ \quad a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4} \quad \text{i} \quad a_1q = \frac{\frac{a_1+a_1q}{2} + a_1q^2}{2}$$

albo

- zapisze równanie pozwalające wyznaczyć związek między  $a_3$  i  $r$ , np.:

$$(a_3 + r)^2 = (a_3 + 3r) \cdot a_3$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3p.**

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:  $2q^2 - 3q + 1 = 0$

albo

- zapisze  $r = a_3$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4p.**

Zdający

- rozwiąże równanie z jedną niewiadomą, np.  $2q^2 - 3q + 1 = 0$ :  $q = 1$  lub  $q = \frac{1}{2}$

albo

- obliczy trzeci wyraz ciągu geometrycznego  $(a_n)$ :  $a_3 = \frac{3}{4}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne..... 5 p.**

Zdający obliczy pierwszy wyraz ciągu geometrycznego  $a_1 = 3$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający rozwiąże równanie z jedną niewiadomą, np.  $2q^2 - 3q + 1 = 0$ :  $q = 1$  lub  $q = \frac{1}{2}$  oraz obliczy dwie wartości  $a_1$ :  $a_1 = 3$ ,  $a_1 = \frac{7}{4}$  i nie odrzuci  $a_1 = \frac{7}{4}$ , to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeśli zdający stosuje poprawną strategię rozwiązania zadania, a jedynymi błędami w rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje maksymalnie **4 punkty**.
3. Jeśli zdający błędnie stosuje wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego (np. zapisuje  $a_3 = a_1q^3$ ) lub ciągu arytmetycznego i korzysta z tego w rozwiązaniu, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeśli zdający odgadnie iloraz ciągu geometrycznego, a następnie obliczy na tej podstawie pierwszy wyraz tego ciągu, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.
5. Jeśli zdający zamienia (myli) własności ciągu geometrycznego z własnościami ciągu arytmetycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
6. Jeśli zdający zapisuje tylko odpowiedź  $a_1 = 3$ , to otrzymuje **0 punktów**.
7. Akceptujemy sytuacje, w których zdający dzieli obie strony zbudowanych przez siebie równań przez  $a_1$  albo przez  $r$ , albo też przez  $q-1$  bez zapisania jakiegokolwiek komentarza.

## Przykładowe rozwiązania

### I sposób

Sumując wyrazy ciągu geometrycznego otrzymujemy równość

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4}. \quad (1)$$

Niech  $(b_n)$  będzie rosnącym ciągiem arytmetycznym.

Zatem  $b_1 = a_1q^2$ ,  $b_2 = a_1q$ ,  $b_4 = a_1$ , więc różnica tego ciągu  $r = a_1q - a_1q^2$  oraz  $b_4 = b_1 + 3r$ , czyli  $a_1 = a_1q^2 + 3(a_1q - a_1q^2)$ .

Stąd wynika, że  $a_1 = 3a_1q - 2a_1q^2$  i  $a_1(2q^2 - 3q + 1) = 0$ .

Ponieważ z równości (1) wynika, że  $a_1 \neq 0$ , więc  $2q^2 - 3q + 1 = 0$ . Zatem  $q = 1$  lub  $q = \frac{1}{2}$ .

Dla  $q = 1$  ciąg  $(a_n)$  jest stały. Stąd ciąg  $(b_n)$  też jest stały. Zatem tylko dla  $q = \frac{1}{2}$  ciąg  $(b_n)$

może być ciągiem rosnącym. Otrzymujemy wtedy  $r = \frac{1}{4}a_1$ . Z równości (1) otrzymujemy

$$a_1 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_1 = \frac{21}{4}, \text{ a stąd wynika, że } a_1 = 3.$$

### II sposób

W ciągu arytmetycznym  $b_1 = a_3$ ,  $b_2 = a_3 + r$ ,  $b_4 = a_3 + 3r$ , gdzie  $r > 0$ .

Ponieważ ciąg  $(a_3 + 3r, a_3 + r, a_3)$  jest ciągiem geometrycznym, więc zachodzi równość

$$(a_3 + r)^2 = (a_3 + 3r) \cdot a_3,$$

skąd wynika, że  $a_3^2 + 2a_3r + r^2 = a_3^2 + 3a_3r$ ,

a zatem  $r^2 = a_3r$ .

Ponieważ z założenia  $r > 0$ , więc  $r = a_3$ . Podana suma trzech wyrazów jest zatem równa

$$4a_3 + 2a_3 + a_3 = \frac{21}{4}.$$

Otrzymujemy zatem  $a_3 = \frac{3}{4}$ . Wtedy  $a_1 = b_4 = 4a_3 = 3$ .

### III sposób

Z danych w treści zadania wynikają równości:

$$b_1 = a_1q^2, \quad b_2 = a_1q, \quad b_4 = a_1.$$

Ponieważ  $(b_n)$  jest ciągiem arytmetycznym, więc możemy zapisać równości

$$b_3 = \frac{b_4 + b_2}{2} = \frac{a_1 + a_1q}{2}$$

oraz

$$b_2 = \frac{b_3 + b_1}{2} = \frac{\frac{a_1 + a_1q}{2} + a_1q^2}{2} = a_1q$$

Rozwiążemy równanie

$$\frac{\frac{a_1 + a_1q}{2} + a_1q^2}{2} = a_1q$$

Ponieważ  $a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4}$ , więc możemy założyć, że  $a_1 \neq 0$ . Powyższe równanie jest zatem równoważne równaniu

$$\frac{\frac{1+q}{2} + q^2}{2} = q, \text{ czyli równaniu } 1 + q + 2q^2 = 4q.$$

Równanie kwadratowe  $2q^2 - 3q + 1 = 0$  ma dwa rozwiązania:  $q = 1$  oraz  $q = \frac{1}{2}$ .

Jeśli  $q = 1$ , to obydwa ciągi są ciągami stałymi. Zatem tylko dla  $q = \frac{1}{2}$  ciąg  $(b_n)$  może być ciągiem rosnącym.

Z równości  $a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{21}{4}$  otrzymujemy równanie  $\frac{7}{4}a_1 = \frac{21}{4}$ , czyli  $a_1 = 3$ .

### Zadanie 11. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.1).

### Zasady oceniania I i II sposobu

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części.

**Pierwsza** z nich polega na:

- rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in R \setminus \{8\}$

albo

- sprawdzeniu, że dla każdej obliczonej wartości parametru  $m$  równanie  $x^2 - (3m + 2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$  ma dwa rozwiązania rzeczywiste.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Druga** część polega na wyznaczeniu tych wartości parametru  $m$ , dla których jest spełniony warunek  $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$ . Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugą część rozwiązania:

**1 punkt** zdający otrzymuje za:

- obliczenie dwóch pierwiastków trójmianu  $x^2 - (3m + 2)x + 2m^2 + 7m - 15$ :

$$x_1 = m + 5 \text{ oraz } x_2 = 2m - 3.$$

albo

- przekształcenie wyrażenia  $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2$  do postaci:  $2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2$  lub równoważnej, ale zawierającej jedynie zmienne  $x_1 + x_2$  oraz  $x_1 \cdot x_2$ .

**2 punkty** zdający otrzymuje za:

- zapisanie równania  $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$  w postaci równania z jedną niewiadomą  $m$ , np.:

$$2(m+5)^2 + 5(m+5)(2m-3) + 2(2m-3)^2 = 2$$

**albo**

- zapisanie równania  $2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 2$  w postaci równania z jedną niewiadomą  $m$ ,

$$\text{np.: } 2(3m+2)^2 + 2m^2 + 7m - 15 = 2.$$

**3 punkty** zdający otrzymuje za rozwiązanie równania  $20m^2 + 31m - 9 = 0$ :

$$m_1 = -\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2 = \frac{1}{4}.$$

### Uwagi

1. Jeżeli zdający zamienia wzory Viète'a przy przekształcaniu lewej strony równania  $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$ , to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozpatruje warunek  $\Delta \geq 0$  i nie sprawdzi, że dla każdej z otrzymanych wartości parametru  $m$  równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający przekształci warunek  $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$ , otrzyma  $2(x_1 + x_2)^2 + 3x_1x_2 = 2$  i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający wykorzystuje niepoprawny wzór „kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń”, przekształci warunek  $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$  do postaci  $2(x_1 + x_2)^2 + 5x_1x_2 = 2$ , i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający rozpatrując równość  $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$  zmieni liczbę po prawej stronie i zapisze równanie, wynikające ze wzorów Viete'a, w postaci  $2(3m+2) + 2m^2 + 7m - 15 = 0$ , pomijając wykładnik 2 potęgi o podstawie  $(3m+2)$ , to za drugą część rozwiązania zadania może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

### Przykładowe rozwiązanie

#### I sposób

1. Równanie ma dwa różne rozwiązania, gdy wyróżnik trójmianu jest dodatni:  $\Delta > 0$ .

Obliczamy wyróżnik trójmianu:

$$\Delta = (-(3m+2))^2 - 4(2m^2 + 7m - 15) = m^2 - 16m + 64 = (m-8)^2.$$

$$(m-8)^2 > 0, \text{ gdy } m \neq 8.$$

Stąd wynika, że trójmian ma następujące pierwiastki:  $x_1 = m+5$  oraz  $x_2 = 2m-3$ .

Mamy zatem rozwiązać równanie

$$2(m+5)^2 + 5(m+5)(2m-3) + 2(2m-3)^2 = 2.$$

To równanie doprowadzamy do postaci równoważnej:

$$20m^2 + 31m - 9 = 0.$$

Ma ono dwa rozwiązania:  $m_1 = -\frac{9}{5}$  oraz  $m_2 = \frac{1}{4}$

Każde z otrzymanych rozwiązań jest różne od 8.

Warunki zadania spełniają dwie wartości parametru  $m$ :  $m_1 = -\frac{9}{5}$  oraz  $m_2 = \frac{1}{4}$ .

### **II sposób**

Przekształcamy równość  $2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2$  w sposób równoważny:

$$2(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1x_2 = 2,$$

$$2((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) + 5x_1x_2 = 2,$$

$$2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 2.$$

Ze wzorów Viète'a wynika, że

$$x_1 + x_2 = 3m + 2 \text{ oraz } x_1x_2 = 2m^2 + 7m - 15,$$

o ile pierwiastki  $x_1$  i  $x_2$  trójmianu istnieją.

Mamy zatem rozwiązać równanie

$$2(3m + 2)^2 + 2m^2 + 7m - 15 = 2.$$

To równanie doprowadzamy do postaci równoważnej

$$20m^2 + 31m - 9 = 0.$$

Ma ono dwa rozwiązania:

$$m_1 = -\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2 = \frac{1}{4}.$$

Pozostaje sprawdzić, czy dla tych wartości  $m$  dany trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki. Możemy, tak jak w sposobie pierwszym, obliczyć wyróżnik i przekonać się, że jest on nieujemny. Możemy także podstawić znalezione wartości parametru  $m$  do danego trójmianu i przekonać się, że otrzymane trójmiany mają dwa różne pierwiastki.

Po podstawieniu  $m = -\frac{9}{5}$  otrzymamy trójmian:

$$x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{528}{25}.$$

Po podstawieniu  $m = \frac{1}{4}$  otrzymamy trójmian:

$$x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{105}{8}.$$

Oba trójmiany mają dwa różne pierwiastki. Można się o tym przekonać, obliczając wyróżniki lub zauważając, że oba trójmiany mają dodatni współczynnik przy  $x^2$  i ujemny wyraz wolny.

Warunki zadania spełniają dwie wartości parametru  $m$ :

$$m_1 = -\frac{9}{5} \text{ oraz } m_2 = \frac{1}{4}.$$

**Zadanie 12. (0–5)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.) (R7.3). 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności (R8.5).

**Zasady oceniania I, II, III, IV i V sposobu rozwiązania**

Rozwiązanie składa się z dwóch etapów.

**Pierwszy etap** polega na wyznaczeniu współrzędnych środka danego okręgu. Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Drugi etap** polega na wyznaczeniu równania/układu równań prowadzących do wyznaczenia współrzędnych środka jednokładności oraz współrzędnych środka obrazu danego okręgu w tej jednokładności.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **4 punkty**.

**Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania**

Zdający otrzymuje 1 punkt, gdy

- zapisze współrzędne środka:  $P = (4, 3)$

lub

- zapisze równanie okręgu  $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$  w postaci  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$ .

**Podział punktów za drugi etap rozwiązania**

Zdający otrzymuje

**1 punkt**, gdy

- obliczy i zapisze współrzędne punktów  $K$  i  $L$ :  $K = (3, 7)$  i  $L = (8, 2)$

albo

- obliczy odległość punktu  $P$  od prostej o równaniu  $x + y - 10 = 0$ :  $d = |SP| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

albo

- zapisze równanie prostej przechodzącej przez punkt  $P = (4, 3)$  prostopadłej do prostej  $x + y - 10 = 0$ :  $x - y - 1 = 0$

albo

- poda tylko promień obrazu okręgu:  $R = 3\sqrt{17}$ ,

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje

**2 punkty**, gdy

- zapisze współrzędne środka jednokładności:  $S = \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right)$

albo

- zapisze  $P' = (x, x-1)$  i zapisze  $|SP'| = 3 \cdot |SP| = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje

**3 punkty**, gdy

- zapisze równanie, wynikające z równości  $\vec{SP'} = -3 \cdot \vec{SP}$ , prowadzące do wyznaczenia współrzędnych środka  $P' = (a, b)$  okręgu, będącego obrazem punktu  $P = (4, 3)$  w jednokładności:

$$\left[ a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = -3 \cdot \left[ 4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

albo

- wykona poprawne podstawienie do odpowiedniego wzoru w zestawie *Wybranych wzorów matematycznych* i zapisze:

$$a = -3 \cdot 4 + (1 - (-3)) \cdot \frac{11}{2} \quad \text{oraz} \quad b = -3 \cdot 3 + (1 - (-3)) \cdot \frac{9}{2}$$

albo

- zapisze równanie, wynikające z równości  $\vec{PP'} = -4 \cdot \vec{SP}$ , prowadzące do wyznaczenia współrzędnych środka  $P' = (a, b)$  okręgu, będącego obrazem punktu  $P = (4, 3)$  w tej jednokładności:

$$[a - 4, b - 3] = -4 \cdot \left[ 4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

albo

- zapisze równanie  $\sqrt{(a-4)^2 + (a-1-3)^2} = 6\sqrt{2}$

albo

- zapisze równanie  $\frac{|a+a-1-10|}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje

**4 punkty**, gdy zapisze równanie szukanego okręgu

$$(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153.$$

**Uwagi:**

1. Jeśli zdający realizuje poprawną strategię rozwiązania zadania, a jedynymi błędami w rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to za takie rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
2. Jeśli zdający zakłada błędnie, że środkiem jednokładności jest środek danego okręgu, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za drugą część rozwiązania.
3. Jeśli zdający podczas obliczania współrzędnych punktów  $K$ ,  $L$  lub  $S$  popełnia błąd polegający na zamianie współrzędnych i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
4. Jeśli zdający stosuje błędne równanie  $\vec{SP} = -3 \cdot \vec{SP'}$  i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za drugą część rozwiązania.

5. Jeśli zdający zakłada błędnie, że trójkąt  $KLP$  jest trójkątem prostokątnym i w rozwiązaniu stosuje tę własność, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za drugą część rozwiązania.
6. Jeżeli zdający narysuje w układzie współrzędnych dany okrąg i daną prostą, a następnie wyznaczy graficznie obraz środka  $P'$  danego okręgu w jednokładności o środku  $S$  i skali  $k = -3$  oraz zapisze równanie tego otrzymanego okręgu, to może otrzymać **4 punkty** za drugą część rozwiązania.

### Przykładowe rozwiązanie

#### I sposób

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$ .

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt  $P = (4, 3)$ , a promień okręgu jest równy  $r = \sqrt{17}$ .

Obliczamy współrzędne punktów  $K$  i  $L$  rozwiązując układ równań: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (10-x)^2 - 8x - 6(10-x) + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 11x + 24 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$$

Zatem  $K = (3, 7)$  i  $L = (8, 2)$ . Środek cięciwy  $KL$ , który jest środkiem jednokładności to punkt

$$S = \left( \frac{11}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku  $S$  i skali  $k = -3$  jest okrąg o promieniu

$R = 3\sqrt{17}$  oraz środka  $P' = (a, b)$  takim, że  $\vec{SP'} = -3 \cdot \vec{SP}$ . Otrzymujemy równość:

$$\left[ a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = -3 \cdot \left[ 4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

Zatem

$$\left[ a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = \left[ \frac{9}{2}, \frac{9}{2} \right],$$

a stąd  $a = 10$  i  $b = 9$ .

Szukany okrąg ma równanie  $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$ .

#### **Uwaga.**

Zdający może z równania prostej wyznaczyć  $x = 10 - y$  i wtedy otrzyma 
$$\begin{cases} 2y^2 - 18y + 28 = 0 \\ x = 10 - y \end{cases}$$
.

**II sposób**

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$ .

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt  $P = (4, 3)$ , a promień okręgu jest równy  $r = \sqrt{17}$ .

Obliczamy współrzędne punktów  $K$  i  $L$  rozwiązując układ równań: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (10-x)^2 - 8x - 6(10-x) + 8 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 11x + 24 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$$

Zatem  $K = (3, 7)$  i  $L = (8, 2)$ . Środek cięciwy  $KL$ , który jest środkiem jednokładności to punkt

$$S = \left( \frac{11}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku  $S$  i skali  $k = -3$  jest okrąg o promieniu  $R = 3\sqrt{17}$  oraz środka  $P' = (a, b)$  takim, że  $\vec{PP'} = -4 \cdot \vec{SP}$ . Otrzymujemy zatem równość:

$$[a-4, b-3] = -4 \cdot \left[ 4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

Zatem

$$[a-4, b-3] = [6, 6],$$

a stąd  $a = 10$  i  $b = 9$ .

Szukany okrąg ma równanie  $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$ .

**III sposób**

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$ .

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt  $P = (4, 3)$ , a promień okręgu jest równy  $r = \sqrt{17}$ .

Wyznaczamy równanie prostej  $l$  przechodzącej przez punkt  $P = (4, 3)$  i prostopadłej do danej prostej  $x + y - 10 = 0$ . Prosta  $l$  ma zatem równanie  $x - y - 1 = 0$ . Środek jednokładności  $S$  jest punktem wspólnym obu tych prostych, więc jego współrzędne obliczamy rozwiązując układ

$$\text{równań: } \begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Stąd } S = \left( \frac{11}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku  $S$  i skali  $k = -3$  jest okrąg o promieniu  $R = 3\sqrt{17}$  oraz środka  $P' = (a, b)$  takim, że  $\vec{SP'} = -3 \cdot \vec{SP}$ . Otrzymujemy zatem równość:

$$\left[ a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = -3 \cdot \left[ 4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2} \right]$$

Zatem

$$\left[ a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2} \right] = \left[ \frac{9}{2}, \frac{9}{2} \right],$$

a stąd  $a = 10$  i  $b = 9$ .

Szukany okrąg ma równanie  $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$ .

#### **IV sposób**

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$ .

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt  $P = (4, 3)$ , a promień okręgu jest równy  $r = \sqrt{17}$ .

Obliczamy odległość  $d$  punktu  $P$  od danej prostej o równaniu  $x + y - 10 = 0$ .

$$d = \frac{|1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku  $S$  i skali  $k = -3$  jest okrąg o promieniu  $R = 3\sqrt{17}$  oraz środku  $P' = (a, b)$ .

Zauważamy, że  $|PP'| = 4 \cdot d$ , zatem  $|PP'| = 6\sqrt{2}$ . Wyznaczamy równanie prostej  $l$  przechodzącej przez punkt  $P = (4, 3)$  i prostopadłej do danej prostej  $x + y - 10 = 0$ . Prosta  $l$  ma zatem równanie  $x - y - 1 = 0$ . Ponieważ punkt  $P' = (a, b)$  leży na tej prostej prostopadłej, więc  $P' = (a, a-1)$ . Stąd otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-4)^2 + (a-1-3)^2} &= 6\sqrt{2} \\ (a-4)^2 + (a-4)^2 &= 36 \cdot 2 \\ (a-10)(a+2) &= 0, \end{aligned}$$

skąd  $a = 10$  lub  $a = -2$ .

Ponieważ skala jednokładności  $k = -3$ , więc jednokładność jest odwrotna. Zatem  $a = -2$  nie spełnia warunków zadania. Stąd  $P' = (10, 9)$ .

Szukany okrąg ma równanie  $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$ .

#### **V sposób**

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu oraz obliczamy promień tego okręgu, doprowadzając równanie okręgu do postaci  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$ .

Stąd odczytujemy, że środkiem okręgu jest punkt  $P = (4, 3)$ , a promień okręgu jest równy  $r = \sqrt{17}$ .

Obliczamy odległość  $d$  punktu  $P$  od danej prostej o równaniu  $x + y - 10 = 0$ :

$$d = \frac{|1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Obrazem danego okręgu w jednokładności o środku  $S$  i skali  $k = -3$  jest okrąg o promieniu  $R = 3\sqrt{17}$  oraz środku  $P' = (a, b)$ .

Wyznaczamy równanie prostej  $l$  przechodzącej przez punkt  $P = (4, 3)$  i prostopadłej do danej prostej  $x + y - 10 = 0$ . Prosta  $l$  ma zatem równanie  $x - y - 1 = 0$ . Ponieważ punkt  $P' = (a, b)$  leży na tej prostej prostopadłej, więc  $P' = (a, a - 1)$ .

Skala jednokładności  $k = -3$ , więc  $|SP'| = |-3| \cdot d = 3 \cdot d$ , zatem  $|SP'| = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ .

Obliczamy odległość punktu  $P' = (a, a - 1)$  od danej prostej o równaniu  $x + y - 10 = 0$

$$|SP'| = \frac{|a + a - 1 - 10|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2a - 11|}{\sqrt{2}} = \frac{|2a - 11|\sqrt{2}}{2}.$$

Otrzymujemy równanie

$$\frac{|2a - 11|\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$|2a - 11| = 9$$

Jednokładność jest odwrotna, zatem  $a = 10$ . Stąd  $P' = (10, 9)$ .

Szukany okrąg ma równanie:  $(x - 10)^2 + (y - 9)^2 = 153$ .

### Zadanie 13. (0–4)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).

#### Zasady oceniania i sposobu rozwiązania

Rozwiązanie składa się z następujących części.

Pierwsza polega na wyróżnieniu trzech przypadków i dodaniu – w końcowej fazie rozwiązania – otrzymanych trzech wyników.

Druga część polega na zapisaniu liczby rozważanych w każdym przypadku liczb i obliczeniu liczby tych liczb.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- poprawnie wskaże trzy przypadki

**albo**

- pominie jeden z przypadków, ale zapisze liczbę liczb rozważanych w jednym przypadku, np.:  $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2$  lub  $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot 8^2$  lub  $7 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki oraz zapisze liczbę liczb rozważanych w jednym przypadku lub pominie jeden przypadek, zapisze liczbę liczb w dwóch wskazanych przez siebie przypadkach.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki i zapisze liczbę liczb rozważanych w dwóch przypadkach.

**Rozwiązanie pełne..... 4 p.**

Zdający poprawnie wskaże trzy przypadki i poprawnie obliczy liczbę rozważanych liczb: 12960.

**Uwagi**

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb siedmiocyfrowych bez użycia symbolu Newtona oraz symbolu silni.
2. Jeśli zdający w każdym z trzech rozpatrywanych przypadków poprawnie zapisze jedynie liczbę sposobów rozmieszczenia:
  - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry 2**lub**
  - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2**lub**
  - cyfry 2 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2,to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

**Zasady oceniania II sposobu rozwiązania**

Rozwiązanie składa się z dwóch części.

Pierwsza polega na obliczeniu liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru  $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$  oraz liczby tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0.

Druga część polega na obliczeniu liczby szukanych liczb.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1p.**

Zdający zapisze, że

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru  $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$  liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

**albo**

- wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru  $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$  jest  $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2$

**albo**

- wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie jedna cyfra ze zbioru  $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$  jest  $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej dopełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze, że

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru  $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$  liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

**oraz**

wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru

$$\{0,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ jest } \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2$$

**albo**

- liczbę wszystkich szukanych liczb można obliczyć, odejmując od liczby wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru  $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$  liczbę tych spośród nich, których pierwszą cyfrą jest 0 lub z rozwiązania wynika, że zdający w ten sposób ustala liczbę szukanych liczb

**oraz**

wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra

$$\text{ze zbioru } \{0,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ jest } \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$$

i na tym zakończy lub dalej dopełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający zapisze, że

wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1,

dokładnie dwie cyfry 2, dokładnie dwie cyfry ze zbioru  $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$  jest  $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2$ **oraz**

wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru

$$\{0,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ jest } \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$$

i na tym zakończy lub dalej dopełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający poprawnie obliczy liczbę rozważanych liczb: 12960.

### Uwagi

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb siedmiocyfrowych bez użycia symbolu Newtona oraz symbolu silni.
2. Jeśli zdający, obliczając liczbę wszystkich szukanych liczb metodą opisaną w II sposobie rozwiązania, poprawnie zapisze jedynie liczbę sposobów rozmieszczenia w całej I części rozwiązania:
  - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry 2  
lub
  - cyfry 1 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2  
lub
  - cyfry 2 oraz liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry innej niż 1 i 2,to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Rozważamy trzy przypadki.

- I. Pierwszą cyfrą rozpatrywanej liczby jest 1. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie dwie cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru  $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ . Takich liczb istnieje

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2 = 15 \cdot 6 \cdot 64 = 5760.$$

- II. Pierwszą cyfrą rozpatrywanej jest 2. Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru  $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ . Takich liczb istnieje

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot 8^2 = 20 \cdot 3 \cdot 64 = 3840.$$

- III. Pierwsza cyfra rozpatrywanej liczby jest różna od 1 i od 2. Pierwsza cyfra jest też różna od 0. Zatem na pierwszym miejscu stoi jedna z siedmiu cyfr ze zbioru  $\{3,4,5,6,7,8,9\}$ . Wtedy na następnych sześciu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru  $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ . Takich liczb istnieje

$$7 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8 = 7 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 8 = 3360.$$

Łącznie istnieje zatem  $5760+3840+3360=12960$  rozważanych liczb.

Istnieje 12960 siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

#### II sposób

Zliczamy wszystkie „liczby” siedmiocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru  $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ . Wtedy na siedmiu miejscach znajdują się dokładnie trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru  $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ .

Takich „liczb” jest

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2 = 35 \cdot 6 \cdot 64 = 13440.$$

Następnie zliczamy wszystkie „liczby” siedmiocyfrowe, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru  $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ .

Takich „liczb” jest

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8 = 20 \cdot 3 \cdot 8 = 480.$$

Jest zatem  $13440 - 480 = 12960$  rozważanych liczb.

#### Zadanie 14. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6). 7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (R9.1).

#### Zasady oceniania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprawdzie niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1p.**

Zdający:

- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez  $ABCD$  lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze  $|AB| + |CD| = 10 + 16$

albo

- obliczy wysokość trapezu  $ABCD: h = |CE| = 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2p.**

Zdający:

- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez  $ABCD$  lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze  $|AB| + |CD| = 10 + 16$  i obliczy wysokość trapezu  $ABCD: h = |CE| = 8$

albo

- obliczy wysokość trapezu  $ABCD: h = |CE| = 8$  i wysokość tego ostrosłupa  $H = 18$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym dokonano istotnego postępu, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania..... 3p.**

Zdający:

- zapisze, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trapez  $ABCD$  lub z rozwiązania wynika, że zdający tę własność stosuje, np.: zapisze  $|AB| + |CD| = 10 + 16$  oraz obliczy wysokość tego ostrosłupa  $H = 18$

albo

- obliczy pole podstawy tego ostrosłupa:  $P_{ABCD} = 104$

i na tym zakończy lub dalej dopełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 4p.**

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa  $H = 18$  i pole jego podstawy:  $P_{ABCD} = 104$

i na tym zakończy lub dalej dopełni błędy.

**Rozwiązanie zadania do końca z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozumowania (np. błędy rachunkowe, błędy w przepisaniu, itp.) ..... 5p.**

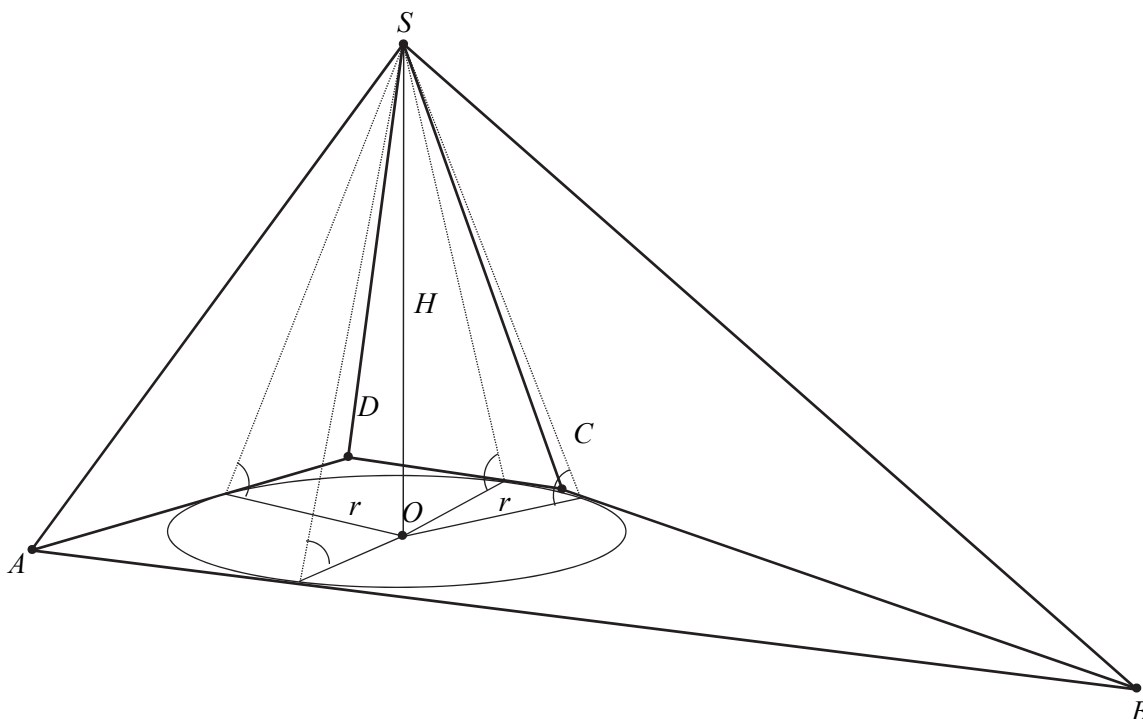
**Rozwiązanie pełne..... 6p.**

Zdający obliczy objętość ostrosłupa:  $V = 624$ .

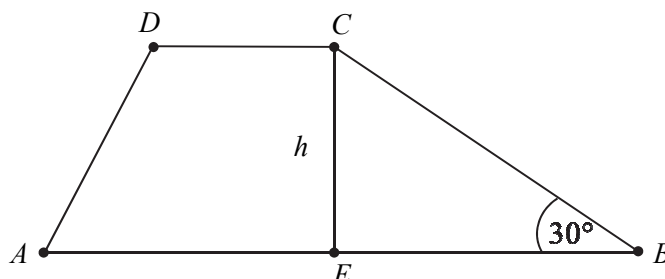
**Uwagi**

1. Jeżeli zdający we wzorze na objętość ostrosłupa pominie czynnik  $\frac{1}{3}$ , to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
2. Jeżeli zdający dopełni błąd polegający na niepoprawnym zastosowaniu definicji funkcji tangens, np.: przyjmie, że jest to stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający dopełni błąd polegający na tym, że niepoprawnie ustali związki między długościami boków trójkąta prostokątnego o kątach ostrych  $30^\circ$  i  $60^\circ$ , np. przyjmie, że wysokość trapezu to  $8\sqrt{3}$ , to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **4 punkty**.
4. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że trapez  $ABCD$  jest równoramienny lub przyjmie, że podstawy tego trapezu mają długości 16 i 10, to za całe rozwiązanie może trzymać co najwyżej **1 punkt**.

**Przykładowe rozwiązanie**



Ponieważ w tym ostrosłupie wszystkie ściany boczne nachylone są do podstawy pod tym samym kątem, więc spodek  $O$  wysokości  $H$  ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w wielokąt będący podstawą ostrosłupa. Niech  $r$  oznacza promień okręgu wpisanego w podstawę,  $h$  – wysokość trapezu  $ABCD$ ,  $H$  natomiast niech oznacza wysokość ostrosłupa.



Ponieważ w trapez można wpisać okrąg, więc spełniony jest warunek:  $|AB| + |CD| = 26$ . Korzystając z własności trójkąta prostokątnego  $EBC$  o kątach  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ , otrzymujemy:

$$h = |CE| = 8, \text{ a stąd wynika, że } r = 4.$$

Ponieważ  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{2}$ , więc  $\frac{9}{2} = \frac{H}{r}$  i stąd obliczamy  $H = 18$ .

Objętość tego ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_{ABCD} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot h \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{26}{2} \cdot 8 \cdot 18 = 624.$$

### Zadanie 15. (0–7)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).

### Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Pierwszy etap** składa się z trzech części:

- przyjęcia jednego z wymiarów ekranu (długość, szerokość) za zmienną  $x$  i obliczenie drugiego wymiaru  $y$ :  $y = \frac{6000}{x}$ .
- wyrażenia pola powierzchni całego ekranu z obramowaniem jako funkcji jednej zmiennej  $x$ :

$$P(x) = 6x + \frac{60000}{x} + 6060$$

- wyznaczenia dziedziny funkcji  $P$ :  $(2\sqrt{1501} - 2, +\infty)$ .

Za poprawne wykonanie każdej z tych części zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednie kroki też były wykonane poprawnie.

**Drugi etap** składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji  $P$  lub funkcji  $f(x) = 6x + \frac{60000}{x}$  określonej np. dla  $x > 0$ :  $f'(x) = 6 - \frac{60000}{x^2} = \frac{6x^2 - 60000}{x^2} = \frac{6(x^2 - 10000)}{x^2}$ .
- obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji  $f$ :  $x = 100$
- zbadanie znaku pochodnej funkcji  $f$ : jeśli  $0 < x < 100$ , to  $f'(x) < 0$  oraz jeśli  $x > 100$ , to  $f'(x) > 0$  i uzasadnienie, że dla  $x = 100$  funkcja  $P$  przyjmuje wartość najmniejszą, na przykład: w przedziale  $(2\sqrt{1501} - 2, 100)$  funkcja  $P$  jest malejąca, w przedziale  $(100, +\infty)$  funkcja  $P$  jest rosnąca, więc najmniejszą wartość funkcja  $P$  przyjmuje dla  $x = 100$ .

Za poprawne wykonanie każdego z tych kroków zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednie kroki też były wykonane poprawnie.

Trzeci etap polega na obliczeniu obu wymiarów ekranu:  $x = 100$  oraz  $y = 60$ .

Za poprawne wykonanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Ten sposób rozwiązania składa się z następujących czterech kroków:

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... **1p.**

Jeżeli zdający przyjmie oznaczenia (na przykład  $x$  i  $y$ ) na długość i szerokość ekranu, zapisze pole powierzchni całego ekranu z obramowaniem

$$P = (x + 10)(y + 6)$$

#### Uwaga

Zdający, gdy przyjmie oznaczenia (na przykład  $x$  i  $y$ ) na długość i szerokość ekranu, zapisze równość

$$P = 6060 + 6x + 10y$$

to otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... **3 p.**

Zdający zapisze nierówność między średnimi:

$$\frac{6x + 10y}{2} \geq \sqrt{6x \cdot 10y}.$$

#### Uwaga

Jeżeli zdający zapisze, że  $x$  i  $y$  są liczbami dodatnimi, a więc wolno skorzystać z nierówności między średnimi i zapisze nierówność między średnimi:

$$\frac{6x + 10y}{2} \geq \sqrt{6x \cdot 10y}, \text{ to otrzymuje } \mathbf{4 \text{ punkty}}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... **5 p.**

Zdający wykaże nierówność  $P \geq 7260$ .

**Rozwiązanie prawie pełne** ..... **6 p.**

Zdający znajdzie wartości  $x = 100$  mm,  $y = 60$  mm.

**Rozwiązanie pełne..... 7 p.**

Zdający wyciągnie wniosek, że dla  $x = 100$  i  $y = 60$  smartfon ma najmniejszą powierzchnię.

### Zasady oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Pierwszy etap** składa się z trzech części:

- przyjęcia jednego z wymiarów całego smartfona (długość, szerokość) za zmienną  $x$  i obliczenie drugiego wymiaru całego smartfona  $y: y = \frac{6000}{x-10} + 6$ .
- wyrażenia pola powierzchni całego ekranu z obramowaniem jako funkcji jednej zmiennej  $x$ :

$$P(x) = x \left( \frac{6000}{x-10} + 6 \right) = \frac{6000x}{x-10} + 6x.$$

- wyznaczenia dziedziny funkcji  $P: (2\sqrt{1501} + 8, +\infty)$ .

Za poprawne wykonanie każdego z tych etapów zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednie kroki też były wykonane poprawnie.

**Drugi etap** składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji  $P$  lub funkcji  $f(x) = \frac{6000x}{x-10} + 6x$  określonej np. dla  $x > 0$ :

$$f'(x) = \frac{6000(x-10) - 6000x}{(x-10)^2} + 6 = \frac{6((x-10)^2 - 10000)}{(x-10)^2} = \frac{6(x-110)(x+90)}{(x-10)^2}.$$

- obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji  $f: x = 110$
- zbadanie znaku pochodnej funkcji  $f$ : jeśli  $0 < x < 110$ , to  $f'(x) < 0$  oraz jeśli  $x > 110$ , to  $f'(x) > 0$  i uzasadnienie, że dla  $x = 110$  funkcja  $P$  przyjmuje wartość najmniejszą, na przykład: w przedziale  $(2\sqrt{1501} + 8, 110)$  funkcja  $P$  jest malejąca, w przedziale  $(110, +\infty)$  funkcja  $P$  jest rosnąca, więc najmniejszą wartość funkcja  $P$  przyjmuje dla  $x = 110$ .

Za poprawne wykonanie każdego z tych etapów zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednie kroki też były wykonane poprawnie.

Trzeci etap polega na obliczeniu obu wymiarów ekranu:  $x = 100$  oraz  $y = 60$ .

Za poprawne wykonanie trzeciego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Uwagi

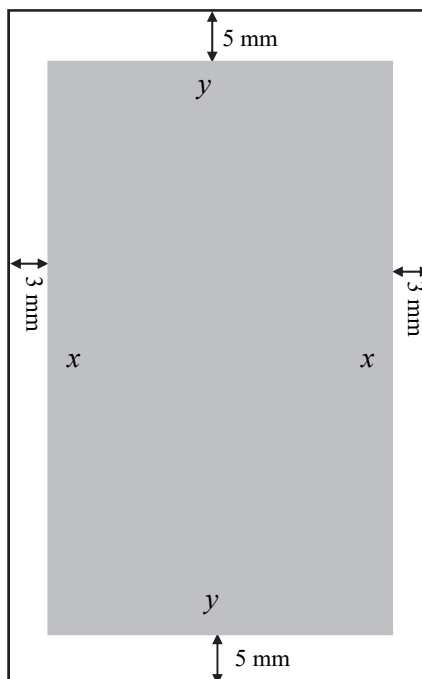
- Jeżeli zdający rozpatruje funkcję  $P$  przy założeniu, że  $x+10 > y+6 > 0$ , obliczy wymiary ekranu 100 mm i 60 mm oraz obliczy wymiary smartfona 110 mm i 66 mm, i sprawdzi, że wymiary ekranu spełniają założenie  $x+10 > y+6$ , to może otrzymać **7 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji  $P$ , ale z rozwiązania wynika, że rozważa funkcję  $P$  na zbiorze, w którym co najmniej jeden z wymiarów ekranu przyjmuje wartości ujemne, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
3. Jeżeli zdający przyjmuje błędnie, że powierzchnia smartfona jest równa  $60 \text{ cm}^2$  i bada powierzchnię ekranu smartfona jako funkcję jednej zmiennej, to **nie otrzymuje 1 punktu za 1. część I etapu** rozwiązania, a w konsekwencji może otrzymać co najwyżej **6 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający nie ujednotli jednostek, ale przeprowadzi pełne rozumowanie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (3 punkty wyłącznie za II etap rozwiązania).
5. Jeżeli zdający popełni błąd w zamianie  $60 \text{ cm}^2$  zapisując  $600 \text{ mm}^2$  i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
6. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak.
7. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości  $x$ , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający:
  - a) opisuje słownie lub graficznie (np. przy użyciu strzałek), monotoniczność funkcji  $P$ ; lub
  - b) zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $x$  funkcja  $P$  ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość.Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
8. Jeżeli zdający przyjmie, że dziedziną funkcji  $P$  jest przedział  $(0, +\infty)$ , to może otrzymać **1 punkt za 3. część II etapu**, o ile otrzymane miejsce zerowe pochodnej należy do właściwej dziedziny funkcji  $P$ .
9. Jeżeli zdający rozpatruje inną wielkość niż pole, np. bada obwód, to za całe rozwiązanie zadania może otrzymać co najwyżej **1 punkt za 1. część I etapu**.

## Przykładowe rozwiązania

I sposób

Oznaczmy długości boków ekranu smartfona literami  $x$  i  $y$  ( $x > y$ ) tak jak na rysunku:



Wtedy powierzchnia ekranu jest równa (w  $\text{mm}^2$ ):

$$xy = 6000,$$

skąd wynika, że

$$y = \frac{6000}{x}.$$

Powierzchnia całego smartfona (tj. ekranu z obramowaniem) jest równa

$$P = (x+10)(y+6) = xy + 6x + 10y + 60 = 6000 + 6x + 10y + 60 = 6x + \frac{60000}{x} + 6060.$$

Ponieważ  $x+10 > y+6 > 0$ , to  $x+4 > \frac{6000}{x}$ . Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &> 6000, \\ x^2 + 4x + 4 &> 6004, \\ (x+2)^2 &> 6004, \\ |x+2| &> 2\sqrt{1501}, \\ x &> 2\sqrt{1501} - 2. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy funkcję  $P$  zmiennej  $x$  określoną wzorem

$$P(x) = 6x + \frac{60000}{x} + 6060 \text{ dla } x \in (2\sqrt{1501} - 2, +\infty).$$

Obliczamy pochodną funkcji  $P$ :

$$P'(x) = 6 - \frac{60000}{x^2} = \frac{6(x^2 - 10000)}{x^2} \text{ dla } x \in (2\sqrt{1501} - 2, +\infty).$$

Miejszem zerowym pochodnej funkcji  $P$  jest  $x = 100$ , gdyż

$$2\sqrt{1501} - 2 < 2\sqrt{1521} - 2 = 2 \cdot 39 - 2 = 76 < 100.$$

Ponadto  $P'(x) < 0$  dla  $x \in (2\sqrt{1501} - 2, 100)$  oraz  $P'(x) > 0$  dla  $x \in (100, +\infty)$ .

Zatem w przedziale  $(2\sqrt{1501} - 2, 100)$  funkcja  $P$  jest malejąca, a w przedziale  $(100, +\infty)$

funkcja  $P$  jest rosnąca.

Stąd wynika, że funkcja  $P$  dla  $x = 100$  przyjmuje najmniejszą wartość. Wtedy  $y = 60$ .

Poszukiwanymi wymiarami ekranu smartfona są:  $x = 100$  mm,  $y = 60$  mm.

## **II sposób**

Tak jak w sposobie pierwszym obliczamy w milimetrach kwadratowych powierzchnię ekranu:

$$P = 6060 + 6x + 10y.$$

Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\frac{6x + 10y}{2} \geq \sqrt{6x \cdot 10y} = \sqrt{60xy} = \sqrt{60 \cdot 6000} = \sqrt{6^2 \cdot 10000} = 6 \cdot 100 = 600.$$

Stąd wynika, że

$$P = 6060 + 6x + 10y \geq 6060 + 1200 = 7260.$$

W nierówności między średnimi równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby występujące w tych średnich są równe.

Niech  $6x = 10y$ , czyli  $6x = 10 \cdot \frac{6000}{x}$ .

Stąd otrzymujemy równanie:  $x^2 = 10000$ .

Jedynym dodatnim rozwiązaniem tego równania jest  $x = 100$ .

Wtedy  $y = 60$ . Ponieważ  $P \geq 7260$  oraz dla  $x = 100$  i  $y = 60$  mamy

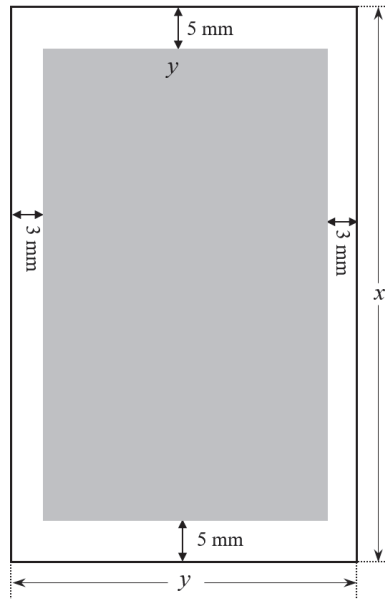
$$P = 110 \cdot 66 = 7260,$$

więc ekran z obramowaniem ma najmniejszą powierzchnię dla  $x = 100$  i  $y = 60$ .

Poszukiwanymi wymiarami ekranu są:  $x = 100$  mm,  $y = 60$  mm.

**III sposób**

Oznaczmy długości boków całego smartfona przez  $x$  i  $y$  ( $x > y$ ) tak jak na rysunku:



Wtedy powierzchnia ekranu jest równa (w  $\text{mm}^2$ ):

$$(x-10)(y-6) = 6000$$

skąd wynika, że

$$y = \frac{6000}{x-10} + 6.$$

Powierzchnia całego smartfona (tj. ekranu z obramowaniem) jest równa

$$P = x \left( \frac{6000}{x-10} + 6 \right) = \frac{6000x}{x-10} + 6x.$$

Ponieważ  $x > y > 6$  i  $x > 10$ , to  $x > \frac{6000}{x-10} + 6$ . Stąd otrzymujemy kolejno:

$$x^2 - 10x > 6000 + 6x - 60,$$

$$x^2 - 16x + 64 > 6004,$$

$$(x-8)^2 > 6004,$$

$$|x-8| > 2\sqrt{1501},$$

$$x > 2\sqrt{1501} + 8.$$

Otrzymaliśmy funkcję  $P$  zmiennej  $x$  określoną wzorem

$$P(x) = \frac{6000x}{x-10} + 6x \quad \text{dla } x \in (2\sqrt{1501} + 8, +\infty).$$

Obliczamy pochodną funkcji  $P$ :

$$P'(x) = \frac{6000(x-10) - 6000x}{(x-10)^2} + 6 = \frac{6((x-10)^2 - 10000)}{(x-10)^2} = \frac{6(x-110)(x+90)}{(x-10)^2}$$

dla  $x \in (2\sqrt{1501} + 8, +\infty)$ .

Miejszem zerowym pochodnej funkcji  $P$  jest  $x = 110$ , bo  
 $2\sqrt{1501} + 8 < 2\sqrt{1521} + 8 = 2 \cdot 39 + 8 = 86 < 110$ .

Ponadto  $P'(x) < 0$  dla  $x \in (2\sqrt{1501} + 8, 110)$  oraz  $P'(x) > 0$  dla  $x \in (110, +\infty)$ .

Zatem w przedziale  $(2\sqrt{1501} + 8, 110)$  funkcja  $P$  jest malejąca, a w przedziale  $(110, +\infty)$

funkcja  $P$  jest rosnąca.

Stąd wynika, że funkcja  $P$  dla  $x = 110$  przyjmuje najmniejszą wartość.

Wtedy  $y = \frac{6000}{110-10} + 6 = 66$ .

Poszukiwanymi wymiarami ekranu smartfona są:  $x = 100$  mm,  $y = 60$  mm.