PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
Z NOWĄ ERĄ 2018/2019

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający: P6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym; R2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.	**D**

Zadanie 2. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	R1.1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną […].	**D**

Zadanie 3. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5. Ciągi. Zdający: P4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę wyrazów ciągu geometrycznego; R1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym.	**C**

Zadanie 4. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R6. Trygonometria. Zdający: 2) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, kosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach […]; 3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych.	**C**

Zadanie 5. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	R5.2. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.	**101**

Uwaga. Zdający otrzymuje 2 punkty wyłącznie po udzieleniu poprawnej odpowiedzi. Nie przyznaje się punktów za cząstkowe elementy rozwiązania.

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 6. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający: 3) rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias; 4) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany. R3.4. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian.

Przykładowe rozwiązania

<u>Sposób I</u>
Jeśli
$x^4 + px^2 + q = (x^2 + 6x + 5)(x^2 + bx + c) = x^4 + (6 + b)x^3 + (5 + 6b + c)x^2 + (5b + 6c)x + 5c$
dla każdego $x \in R$, to współczynniki po obu stronach równości przy tych samych potęgach x są równe, czyli $6 + b = 0$, $5 + 6b + c = p$, $5b + 6c = 0$ i $5c = q$. Wobec tego $b = -6$, $c = 5$, $p = -26$ i $q = 25$.

<u>Sposób II</u>
Zachodzi równość $x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5)$. Ponieważ wielomian $x^4 + px^2 + q$ ma być podzielny przez $x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5)$, więc liczby –1 i –5 muszą być jego pierwiastkami, czyli $0 = (-1)^4 + p(-1)^2 + q = p + q + 1$ oraz $0 = (-5)^4 + p(-5)^2 + q = 25p + q + 625$. Mnożąc pierwsze równanie przez 25 i odejmując wynik od drugiego, otrzymujemy $0 = -24q + 600$, więc $0 = -q + 25$, czyli $q = 25$, zatem $0 = p + 25 + 1$, czyli $p = -26$.

<u>Sposób III</u>
Dzielimy wielomian $x^4 + px^2 + q$ przez trójmian $x^2 + 6x + 5$ a następnie resztę przyrównujemy do wielomianu zerowego. Otrzymujemy układ równań: $30 - 6(p + 31) = 0$ i $q - 5(p + 31) = 0$, z którego otrzymujemy $p = -26$ i $q = 25$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

- gdy zapisze warunek wynikający z podzielności wielomianów, np. $x^4 + px^2 + q = (x^2 + 6x + 5)(x^2 + bx + c)$

albo

- rozłoży trójmian $x^2 + 6x + 5$ do postaci iloczynowej $(x + 1)(x + 5)$ i stwierdzi, że liczby –5 oraz –1 są pierwiastkami wielomianu $x^4 + px^2 + q$

albo

- wykona dzielenie wielomianu $x^4 + px^2 + q$ przez trójmian $x^2 + 6x + 5$, a następnie przyrówna resztę do wielomianu zerowego.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

gdy obliczy p i q (–26 i 25).

Zadanie 7. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	R10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Przykładowe rozwiązanie

W żadnej z poszukiwanych permutacji na sąsiednich miejscach nie mogą występować liczby nieparzyste, ponieważ ich iloczyn jest liczbą nieparzystą. A zatem wśród dwóch sąsiednich elementów takiej permutacji zawsze występuje liczba parzysta. Wśród liczb $\{1, ..., 31\}$ znajduje się 16 liczb nieparzystych i 15 liczb parzystych. Między każdymi dwoma liczbami nieparzystymi musi znaleźć się liczba parzysta, więc liczby muszą wystąpić w kolejności: nieparzysta, parzysta, nieparzysta, parzysta itd.
Wyznaczamy liczbę poszukiwanych permutacji. Na miejscach nieparzystych tej permutacji liczby można ustawić na $16!$ sposobów (liczba permutacji 16 elementowego zbioru liczb nieparzystych $\{1, 3, ..., 31\}$). Dla każdego układu liczb nieparzystych dobrać można niezależnie ustawienie liczb na parzystych miejscach. Możliwości takiego ustawienia jest $15!$. A zatem liczba poszukiwanych permutacji wynosi $16! \cdot 15!$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 pkt**

gdy zauważy, że w każdej z szukanych permutacji liczby parzyste i nieparzyste występują naprzemiennie, począwszy od nieparzystych.

Zdający otrzymuje .... **2 pkt**

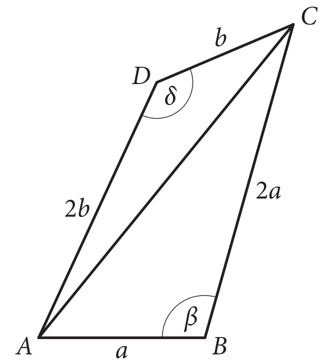
gdy zauważy, że liczby nieparzyste można dowolnie przestawiać, więc można je ustawić na $16!$ sposobów, a liczby parzyste na $15!$ sposobów, a następnie zapisze wynik w postaci $16! \cdot 15!$ lub $15! \cdot 16!$.

Zadanie 8. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający: P4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi; R5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia kosinusów.

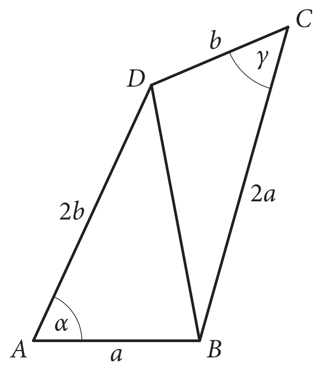
Przykładowe rozwiązania

Sposób I



Niech $\beta = \sphericalangle ABC$, zaś $\delta = \sphericalangle CDA$. Wówczas pole czworokąta $ABCD$ wyraża się, jako suma pól trójkątów ABC oraz CDA, wzorem $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a \cdot \sin(\beta) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot 2b \cdot \sin(\delta) = a^2 \sin(\beta) + b^2 \sin(\delta)$. A zatem z założenia występującego w treści zadania mamy równość $a^2 \sin(\beta) + b^2 \sin(\delta) = a^2 + b^2$. Skoro jednak dla każdego $x \in R$ zachodzi nierówność $\sin(x) \leqslant 1$, to musimy mieć $\sin(\beta) = \sin(\delta) = 1$. Argumentami są tu miary kątów wewnętrznych czworokąta, a zatem $\beta = \delta = 90^\circ$. Trójkąty ABC oraz CDA są więc prostokątne. Z twierdzenia Pitagorasa dostajemy zatem równości postaci $a^2 + (2a)^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 = |CD|^2 + |DA|^2 = b^2 + (2b)^2$, co po uproszczeniu daje $a = b$. Ponieważ pary przeciwległych boków czworokąta mają równe długości, więc jest on równoległobokiem, w którym jest kąt prosty. Wobec tego wszystkie jego kąty są proste, więc jest to prostokąt.

Sposób II



Niech $\alpha = \sphericalangle DAB$ oraz $\gamma = \sphericalangle BCD$. Wówczas pole czworokąta $ABCD$ wyraża się, jako suma pól trójkątów ABD i BCD, wzorem $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 2b \cdot \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = ab(\sin(\alpha) + \sin(\gamma))$. Skoro dla każdego $x \in R$ zachodzi nierówność $\sin(x) \leqslant 1$, to w szczególności $\sin(\alpha) \leqslant 1$ oraz $\sin(\gamma) \leqslant 1$. Dostajemy zatem nierówność postaci $2ab \geqslant ab(\sin(\alpha) + \sin(\gamma))$. Korzystając dalej z nierówności $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$, prawdziwej dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y, która wynika z nierówności $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geqslant 0$, dostajemy $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Z założenia pole czworokąta $ABCD$ równe jest jednak $a^2 + b^2$. Ostatecznie więc dostajemy $a^2 + b^2 \geqslant 2ab \geqslant ab(\sin(\alpha) + \sin(\gamma)) = a^2 + b^2$. Skrajne wyrazy powyższego ciągu nierówności są równe, zatem wszystkie te nierówności są równościami. W szczególności $a^2 + b^2 = 2ab$ oraz $2ab = ab(\sin(\alpha) + \sin(\gamma))$. Pierwszą równość zapisać można równoważnie w postaci $(a - b)^2 = 0$, co implikuje, że $a = b$. A zatem czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Skoro zaś $ab > 0$, to druga równość implikuje $2 = \sin(\alpha) + \sin(\gamma)$. Korzystamy raz jeszcze z nierówności $\sin(\alpha) \leqslant 1$ oraz $\sin(\gamma) \leqslant 1$, co daje nam $\sin(\alpha) = \sin(\gamma) = 1$.
Argumentami są tu miary kątów wewnętrznych czworokąta, zatem $\alpha = \gamma = 90^\circ$. Równoległobok $ABCD$ ma więc kąt prosty. Wobec tego wszystkie jego kąty są proste, więc jest to prostokąt.

Alternatywne zakończenie dowodu
Zdający dostrzega, że $2ab = ab(\sin\alpha + \sin\gamma)$ i wnioskuje stąd, że $\alpha = \gamma = 90^\circ$. Następnie postępuje analogicznie jak w pierwszym rozwiązaniu: na mocy twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów DAB i BCD stwierdza, że $a = b$ i stąd wyprowadza wniosek, że rozważany czworokąt jest prostokątem.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **1 pkt**

Zdający zapisze pole czworokąta $ABCD$ jako sumę pól trójkątów ABC oraz CDA i ułożył równanie $a^2\sin(\beta) = b^2\sin(\delta) = a^2 + b^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

- Zdający stwierdzi, że kąty β oraz δ są równe 90° na podstawie własności funkcji trygonometrycznych

albo

- stwierdzi, że $2ab = ab(\sin\alpha + \sin\gamma)$ i wywnioskuje, że $\alpha = \gamma = 90^\circ$

albo

- stwierdzi, że $a^2 + b^2 = 2ab$ i wywnioskuje stąd, że $a = b$.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

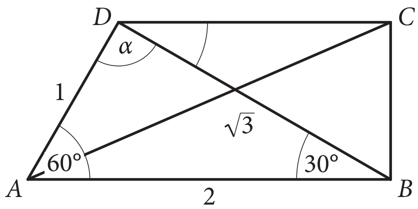
Zdający wywnioskuje, że rozważany czworokąt jest prostokątem.

Zadanie 9. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	R7.5. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia kosinusów.

Przykładowe rozwiązania

Sposób I



Niech $\sphericalangle ADB = \alpha$. Z twierdzenia sinusów wynika, że $\frac{\sqrt{3}}{\sin(60^\circ)} = \frac{|BD|}{\sin(60^\circ)} = \frac{|BA|}{\sin(\alpha)} = \frac{2}{\sin(\alpha)}$. Wnioskujemy stąd, że $\sin(\alpha) = \frac{2\sin(60^\circ)}{\sqrt{3}} = 1$, więc $\alpha = 90^\circ$. Skoro kąt ADB jest prosty, to kąt ABD ma miarę 30°, więc $|\sphericalangle CBD| = 60^\circ$ oraz $|\sphericalangle BDC| = 30^\circ$.

Na mocy twierdzenia Pitagorasa $|AD| = \sqrt{|AB|^2 - |BD|^2} = 1$.

Mamy też $|BC| = |BD| \cdot \sin(\sphericalangle BDC) = \sqrt{3} \cdot \sin(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równość:

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}$. Wobec tego $|AC| = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

Sposób II

Z twierdzenia kosinusów wynika, że

$3 = |BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2 - 2|AD||AB|\cos(60^\circ) = |AD|^2 + 4 - 2|AD| = (|AD| - 1)^2 + 3$,

więc $(|AD| - 1)^2 = 0$, czyli $|AD| = 1$.

Stąd wynika, że $|BC| = |AD|\sin(\sphericalangle BAD) = 1 \cdot \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|^2 = \frac{3}{4} + 4 = \frac{19}{4}$, zatem $|AC| = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

Sposób III

Z twierdzenia kosinusów wynika, że

$3 = |BD|^2 = |AD|^2 + |AB|^2 - 2|AD||AB|\cos(60^\circ) = |AD|^2 + 4 - 2|AD| = (|AD| - 1)^2 + 3$,

więc $(|AD| - 1)^2 = 0$, czyli $|AD| = 1$. Stąd wynika, że

$|CD| = |AB| - |AD|\cos(\sphericalangle BAD) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Kąt ADC ma miarę 120°, bo suma miar kątów $BAD = 60^\circ$ i ADC jest równa 180°. Z twierdzenia kosinusów wynika, że

$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2|AD| \cdot |CD|\cos(\sphericalangle ADC) = 1 + \frac{9}{4} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos(120^\circ) = \frac{19}{4}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **1 pkt**

- Zdający zastosuje twierdzenie sinusów dla trójkąta ADB: $\frac{\sqrt{3}}{\sin(60^\circ)} = \frac{2}{\sin(\alpha)}$

albo

- wyznaczy z twierdzenia kosinusów długość $|AD| = 1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

- Zdający wyznaczy miary kątów ADB, ABD oraz BDC

albo

- znajdzie długość odcinka BC, korzystając z definicji sinusa

albo

- znajdzie długość odcinka CD, odejmując od $|AB|$ liczbę $|AD|\cos(60^\circ)$.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający wyznaczył długość przekątnej AC: $|AC| = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

Zadanie 10. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Przykładowe rozwiązania

Niech a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 będzie piątką liczb wylosowanych bez zwracania ze zbioru $\{1, ..., 100\}$, przy czym zakładamy, że $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Jeśli liczby te są kolejnymi wyrazami ściśle rosnącego ciągu geometrycznego o ilorazie q, to jest jasne, że

$$1 \leqslant a_1 < a_2 = a_1q < a_3 = a_1q^2 < a_4 = a_1q^3 < a_5 = a_1q^4 \leqslant 100.$$

Interesuje nas tylko przypadek, gdy q jest liczbą całkowitą większą od 1, a więc skoro $4^4 > 100$, to musi zachodzić nierówność $2 \leqslant q \leqslant 3$. Wykazaliśmy, że ilorazem ciągu geometrycznego a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 może być liczba 2 lub liczba 3, a zatem kolejne jego wyrazy to $a_1, 2a_1, 4a_1, 8a_1, 16a_1$ lub $a_1, 3a_1, 9a_1, 27a_1, 81a_1$. W pierwszym przypadku z nierówności $16a_1 \leqslant 100$ wynika, że $a_1 \leqslant 6$, więc istnieje 6 możliwych do wylosowania piątek liczb, które ustawione w odpowiedniej kolejności tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = 2$. W drugim przypadku $a_1 = 1$, ponieważ $81a_1 \leqslant 100$, a zatem jest jedna możliwa do wylosowania piątka liczb, które ustawione w odpowiedniej kolejności tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = 3$.

Sposobów wylosowania (bez zwracania) pięciu liczb spośród stu jest $\binom{100}{5}$. W siedmiu przypadkach, jak wykazaliśmy, można wylosowane liczby ustawić w taki sposób, by utworzyły ściśle rosnący ciąg geometryczny o całkowitym ilorazie. Szukane prawdopodobieństwo jest równe zatem $\frac{7}{\binom{100}{5}} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} = \frac{1}{5 \cdot 33 \cdot 7 \cdot 97 \cdot 96} = \frac{1}{10755360}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **1 pkt**

Zdający zauważy i uzasadni to, że ilorazem wylosowanego ciągu geometrycznego może być jedynie 2 lub 3.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **2 pkt**

Zdający zauważy, że pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego o ilorazie 3 może być wyłącznie liczba 1, a jeśli ilorazem ciągu geometrycznego jest liczba 2, to pierwszym wyrazem ciągu może być jedna z liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Rozwiązanie pełne .... **3 pkt**

Zdający stwierdzi, że jest siedem ciągów geometrycznych spełniających warunki zadania, zaś wszystkich możliwych do wylosowania ciągów jest $\binom{100}{5}$. Na tej podstawie wyznaczy prawdopodobieństwo w postaci ilorazu $\frac{7}{\binom{100}{5}}$ lub równoważnego.

Uwagi:

1) W zadaniu można rozpatrywać piątki uporządkowane lub zbiory pięcioelementowe; nie wpływa to na wynik, a na opis rozwiązania – nieznacznie.
2) Można to zadanie rozwiązać wypisując ciągi spełniające warunki zadania, bez przeprowadzonego rozumowania.
3) Wynik w postaci $\frac{7 \cdot 5!}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}$ lub $\frac{7}{\binom{100}{5}}$ jest akceptowalny – zdający nie musi wykonać mnożenia liczb w liczniku, tym bardziej w mianowniku.

Zadanie 11. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	6. Trygonometria. Zdający: P4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: […] $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$; R5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; R6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin 2x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.

Przykładowe rozwiązania

Zapisujemy założenia dotyczące miar kątów α, β, γ.
Ponieważ są to kąty w trójkącie, więc miara każdego z nich należy do przedziału $(0°, 180°)$ oraz $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Ponadto, aby istniały tangensy α i β, muszą być spełnione warunki $\alpha \neq 90°$, $\beta \neq 90°$.

Sposób I

Mnożymy obie strony równości przez $\sin^2\beta \cdot \operatorname{tg}\beta \neq 0$ i otrzymujemy równość $\operatorname{tg}\beta \sin^2\alpha = \operatorname{tg}\alpha \sin^2\beta$.

Następnie przedstawiamy $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$ odpowiednio w postaci $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ i $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$. Otrzymujemy:

$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} \cdot \sin^2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \sin^2\beta$, czyli równoważnie $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} \cdot \sin^2\alpha - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \sin^2\beta = 0$

Wyłączamy przed nawias wspólny czynnik:

$\sin\alpha \cdot \sin\beta\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = 0$

Ponieważ $\sin\alpha \cdot \sin\beta \neq 0$, więc $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$.

Stąd, po pomnożeniu obu stron równości przez $\cos\alpha \cdot \cos\beta \neq 0$, otrzymujemy

$\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\beta\cos\beta = 0$

$\sin 2\alpha = \sin 2\beta$

Powyższa równość zachodzi albo dla równych kątów $(2\alpha = 2\beta)$, albo dla kątów, których suma jest równa $180°\,(2\alpha = 180° - 2\beta)$, stąd $\alpha = \beta$ lub $2\alpha + 2\beta = 180°$, czyli $\alpha + \beta = 90°$, a to z kolei oznacza, że $\gamma = 90°\,(\alpha+\beta+\gamma = 180°)$.

Co należało udowodnić.

Sposób II

Po zapisaniu założeń dotyczących miar kątów α, β, γ zapisujemy daną równość w postaci:

$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} : \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$, skąd $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}$

Następnie dzielimy obie strony otrzymanej równości przez $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \neq 0$ i otrzymujemy $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$,

co jest równoważne równości $\sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta\cos\beta$. Dalej jak w sposobie I.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ... 1 pkt

Zdający zapisze równość $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$ w postaci $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} \cdot \sin^2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \sin^2\beta$ lub

$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}$, wraz z założeniami $\alpha, \beta, \gamma \in (0°, 180°)$ i $\alpha \neq 90°$, $\beta \neq 90°$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający przekształci wyjściową równość do postaci $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający zapisze przynajmniej jedną zależność między kątami: $\alpha = \beta$ lub $\alpha + \beta = 90°\,(2\alpha = 180° - 2\beta)$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze pełny wniosek: $\alpha = \beta$ lub $\gamma = 90°$.

Uwaga

Jeżeli zdający nie zapisze założeń $\alpha, \beta, \gamma \in (0°, 180°)$ i $\alpha \neq 90°$, $\beta \neq 90°$ na żadnym z etapów rozwiązywania zadania, ale poprawnie wykona wszystkie przekształcenia, to za rozwiązanie otrzymuje **2 pkt**.

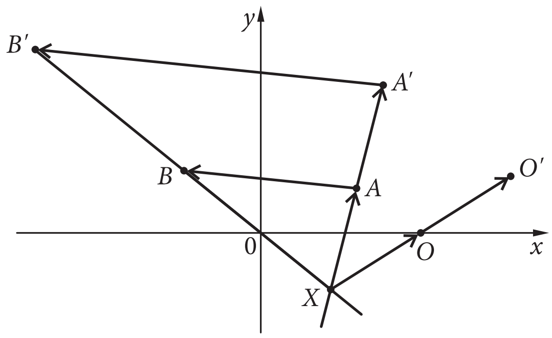
Zadanie 12. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	R7. Planimetria. Zdający: 3) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności […]; 4) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności. R8.5. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu […].

Przykładowe rozwiązania

Sposób I

Zauważmy, że środek X jednokładności f leży na przecięciu prostych AA' oraz BB'.



Wyznaczamy równania tych prostych. Pierwsze z nich to $y = 4x - 10$, a drugie: $y = -x$. Proste te przecinają się w punkcie $X = (2, -2)$. Obliczamy skalę jednokładności.
Mamy $\overrightarrow{XA'} = [2,8] = 2[1,4] = 2\overrightarrow{XA}$. Z definicji jednokładności wynika, że skalą f jest 2. Szukany środek okręgu, którego obrazem przy f jest okrąg o równaniu $(x-8)^2 + (y-2)^2 = 4$, oznaczamy przez $O = (x_0, y_0)$. Środkiem okręgu o równaniu $(x-8)^2 + (y-2)^2 = 4$ jest $O' = (8,2)$. Skalą jednokładności jest 2, więc mamy $2\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{XO'} = [6,4]$, czyli $\overrightarrow{XO} = [3,2]$.
Zatem $O = (2, -2) + [3, 2] = (5, 0)$.
Okrąg o równaniu $(x-8)^2 + (y-2)^2 = 4$ ma promień równy 2, zatem szukany okrąg ma promień równy 1 (figury te są podobne, a skala podobieństwa to 2). Ma on zatem równanie $(x-5)^2 + y^2 = 1$.

Sposób II

Wyznaczamy wektory $\overrightarrow{AB} = [-6,1]$ oraz $\overrightarrow{A'B'} = [-12,2]$. W rozwiązaniu tym korzystamy z faktu, że jeśli k jest skalą jednokładności f, to dla każdych punktów P, Q oraz ich obrazów $P' = f(P)$, $Q' = f(Q)$ w jednokładności f, zachodzi równość wektorów $k \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$. Skoro $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$, to $k = 2$.
(Skalę można wyznaczyć także bezpośrednio z definicji jednokładności o środku X: $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB}$ oraz $\overrightarrow{XA'} + \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{XB'}$. Ale z definicji jednokładności $\overrightarrow{XA'} = k \cdot \overrightarrow{XA}$ oraz $\overrightarrow{XB'} = k \cdot \overrightarrow{XB}$. Co więcej, rachunki wyżej dają $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$. A zatem $\overrightarrow{XA} + 2\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{XB}$. Napisane na początku równanie pomnożone przez k daje nam $k \cdot \overrightarrow{XA} + k \cdot \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{XB}$, zatem $k = 2$).
Szukany środek okręgu, którego obrazem przy f jest okrąg o równaniu $(x-8)^2 + (y-2)^2 = 4$ oznaczamy przez $O = (x_0, y_0)$. Środek okręgu o równaniu $(x-8)^2 + (y-2)^2 = 4$ oznaczamy jako O'. Jest to punkt $(8, 2)$. Zgodnie z wyznaczoną skalą jednokładności mamy $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{A'O'} = [4,-4]$ (ponownie korzystamy tu z zapisanej wyżej własności skali jednokładności). Zatem $\overrightarrow{AO} = [2,2]$ i $O = (5, 0)$. Okrąg o równaniu $(x-8)^2 + (y-2)^2 = 4$ ma promień równy 2, a zatem szukany okrąg ma promień równy 1 (figury te są podobne, a skala podobieństwa to 2). Szukany okrąg ma równanie $(x-5)^2 + y^2 = 1$.

Sposób III

Korzystamy ze wzorów na jednokładność w układzie współrzędnych: jednokładność o środku w punkcie $O(x_0, y_0)$ i skali $s \neq 0$ przekształca punkt $A = (x, y)$ na punkt $A' = (sx + (1 - s)x_0, sy + (1 - s)y_0)$. Podstawiamy współrzędne punktów i ich obrazów i otrzymujemy układ równań. Rozwiązujemy ten układ i wyznaczamy środek i skalę jednokładności. Kolejne użycie wzorów do obliczonej jednokładności pozwala na wyznaczenie środka okręgu, gdyż obrazem okręgu w jednokładności jest okrąg.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ... 1 pkt

- Zdający stwierdzi, że środek jednokładności znajduje się na przecięciu prostych przechodzących odpowiednio przez pary punktów A, A' oraz B, B', a następnie wyznaczy równania tych prostych

albo

- wyznaczy wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ oraz skalę jednokładności

albo

- podstawi współrzędne punktów do równań analitycznych na jednokładność, otrzymując układ równań.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ... 2 pkt

- Zdający wyznaczy punkt przecięcia prostych przechodzących odpowiednio przez pary punktów A, A' oraz B, B', czyli $X = (2, 2)$ oraz, z definicji, skalę jednokładności

albo

- wyznaczy środek $O' = (8, 2)$ i promień $r = 2$ okręgu $(x - 8)^2 + (y - 2)^2 = 4$, a następnie, znając skalę jednokładności f i warunki łączące wektory $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{A'O}$, wyznaczy środek $O = (5, 0)$ szukanego okręgu

albo

- rozwiąże układ równań, wyznaczając przekształcenie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ... 3 pkt

Zdający obliczy jeden z parametrów szukanego okręgu: środek lub promień.

Rozwiązanie pełne ... 4 pkt

Zdający wyznaczy równanie szukanego okręgu $(x - 5)^2 + y^2 = 1$.

Zadanie 13. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R1.4. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych. R3.2. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z parametrem. P4.14. Funkcje. Zdający szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw.

Przykładowe rozwiązanie

Dziedziną równania $(1-m)9^x + 4 \cdot 3^x = m + 2$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Podstawiamy $y = 3^x$. Wtedy wyjściowe równanie można zapisać w postaci $(m-1)y^2 - 4y + m + 2 = 0$. Funkcja wykładnicza $f(x) = 3^x$ jest różnowartościowa, zatem dla każdego m nowe równanie ma tyle samo dodatnich rozwiązań, co wyjściowe rzeczywistych.
Dla $m = 1$ równanie przybiera postać $4y = 3$, więc ma dokładnie jedno rozwiązanie równe $y = \frac{3}{4}$. Jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest więc w tym przypadku $x = \log_3\left(\frac{3}{4}\right)$.
Niech $m \neq 1$. Wówczas $(m-1)y^2 - 4y + m + 2 = 0$ jest równaniem kwadratowym zmiennej y i ma ono dwa różne pierwiastki rzeczywiste, gdy $0 < \Delta = 16 - 4(m-1)(m+2) = -4(m^2 + m - 6) = -4(m-2)(m+3)$, więc gdy $-3 < m < 2$. Ponieważ jednak $y > 0$, więc obydwa rozwiązania muszą być dodatnie. Z wzorów Viète’a wynika, że iloczynem tych pierwiastków jest liczba $\frac{m+2}{m-1}$, a ich sumą – liczba $\frac{4}{m-1}$. Obie te liczby muszą być dodatnie. Mamy więc $m - 1 > 0$.
Uwzględniając warunek $-3 < m < 2$, uzyskany przy rozpatrywaniu wyróżnika, widzimy, że równanie $(1-m)9^x + 4 \cdot 3^x = m + 2$ dwa różne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $1 < m < 2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ... 1 pkt

Zdający rozpatrzy przypadek $m = 1$ lub zaproponuje podstawienie $y = 3^x$, sprowadzające wyjściowe równanie do równania postaci $(m-1)y^2 - 4y + m + 2 = 0$.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 pkt

Zdający stwierdzi, że równanie $(m-1)y^2 - 4y + m + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki tylko w przypadku, gdy $m \neq 1$ i wyróżnik jest dodatni. Wyznaczy ograniczenia związane z liczbą m, wynikające z tego warunku: $-3 < m < 2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający stwierdzi, że obydwa pierwiastki muszą być dodatnie i wypisze, na podstawie wzorów Viète’a, warunki:
$\frac{m+2}{m-1} > 0$ oraz $\frac{4}{m-1} > 0$, które dodatkowo musi spełniać parametr m.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 pkt

Zdający rozwiąże nierówności przedstawione w powyższym punkcie, uzyskując warunek $m > 1$. Nie uwzględni jednak warunku $-3 < m < 2$. W przypadku, gdy zdający doprowadzi poprawnie rozumowanie dotyczące przypadku $m \neq 1$ do końca, ale nie uwzględni warunku $m = 1$, również dostaje 4 punkty.

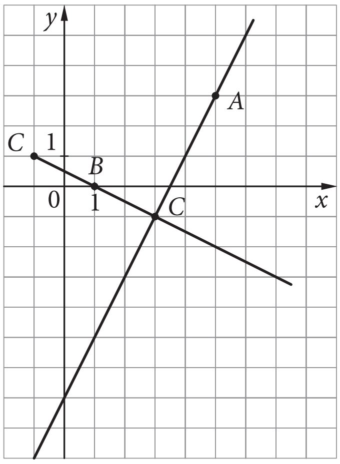
Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający rozwiąże nierówności wynikające z wypisanych warunków i uwzględniając wcześniejsze ograniczenia wynikające ze znaku wyróżnika uzyskuje odpowiedź: $m \in (1, 2)$. Uwzględni przy tym w dyskusji przypadek $m = 1$. Jeśli w rozwiązaniu nie powołuje się wprost na różnowartościowość funkcji wykładniczej, nie traci za to punktów.

Zadanie 14. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: P3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; R4) oblicza odległość punktu od prostej.

Przykładowe rozwiązanie



Na początku sprawdzamy, przez który wierzchołek trójkąta ABC przechodzi wysokość trójkąta, czyli prosta $y = 2x - 7$. Prosta ta nie jest prostopadła do prostej AB, której współczynnikiem kierunkowym jest liczba $\frac{3-0}{5-1} = \frac{3}{5} \neq -\frac{1}{2}$, wobec tego nie zawiera ona wysokości poprowadzonej z punktu C. $0 \neq 2 \cdot 1 - 7$, więc punkt B nie leży na prostej $y = 2x - 7$, a $3 = 2 \cdot 5 - 7$, więc punkt A leży na prostej $y = 2x - 7$, więc zawiera ona wysokość poprowadzoną z punktu A.
Prosta zawierająca punkty B, C, opisana równaniem $y = ax + b$, jest zatem prostopadła do prostej $y = 2x - 7$. W szczególności $a = -\frac{1}{2}$. Po wstawieniu współrzędnych punktu B do równania $y = -\frac{1}{2}x + b$ otrzymujemy $b = \frac{1}{2}$. Wysokość h poprowadzona z punktu A do prostej BC to odległość punktu A od prostej $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Równanie ogólne tej prostej to $\frac{1}{2}x + y - \frac{1}{2} = 0$. Zatem wysokość $h = \frac{\left|\frac{1}{2} \cdot 5 + 3 - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{\frac{1}{2}^2 + 1}} = 2\sqrt{5}$.

Skoro pole trójkąta ABC równe jest $\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h = 5$, to $|BC| = \sqrt{5}$. Szukamy zatem punktów o współrzędnych (x, y) leżących na prostej BC odległych od punktu B o $\sqrt{5}$. Współrzędne (x, y) punktu C spełniają zatem warunki $\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{5}$ oraz $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Z nich wynika równanie kwadratowe $5 = (x-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2 = (x-1)^2 + \frac{1}{4}(-x+1)^2 = \frac{5}{4}(x-1)^2$, czyli $4 = (x-1)^2$.

Jego rozwiązaniami są liczby $x = -1$ oraz $x = 3$.

Z równania $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ wynika, że $C = (3, -1)$ lub $C = (-1, 1)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ... 1 pkt

Zdający sprawdzi, że punkt A leży na prostej $y = 2x - 7$ oraz że prosta ta jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty B, C.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 pkt

Zdający wyznaczy równanie prostej zawierającej bok BC: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający wyznaczy odległość punktu A od prostej $(2\sqrt{5})$ oraz, korzystając ze wzoru na pole trójkąta, wyznaczy $|BC| = \sqrt{5}$.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 pkt**

W oparciu o warunki dotyczące punktu $C = (x, y)$ zdający wypisze warunki $\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{5}$ oraz $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ i uzyska odpowiednie równanie kwadratowe zmiennej x lub y.

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**

Zdający rozwiąże uzyskane równanie i uzyska możliwe współrzędne punktu C: $(3, -1)$ oraz $(-1, 1)$.

Zadanie 15. (0–6)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	P4. Funkcje. Zdający: 3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości […]); 13) szkicuje wykres funkcji $f(x) = a/x$ dla danego a, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. R11. Rachunek różniczkowy. Zdający: 2) oblicza pochodne funkcji wymiernych; 3) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej.

Przykładowe rozwiązanie

a)

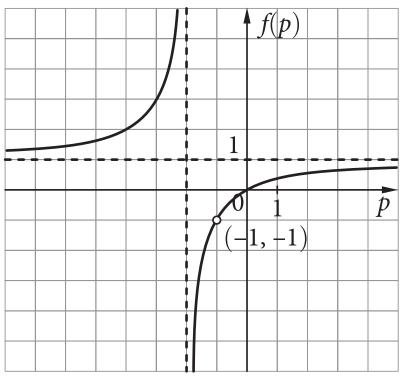
Rozwiązujemy układ równań, np. metodą przeciwnych współczynników. Otrzymujemy: $m = \frac{p}{p+1}$ i $n = \frac{p+2}{p+1}$, gdzie $p \neq -1$. Zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(m_0, n_0) = \left(\frac{p}{p+1}, \frac{p+2}{p+1}\right)$, $p \neq -1$.

Wyznaczamy wzór funkcji f: $f(p) = \frac{p}{p+1} : \frac{p+2}{p+1} = \frac{p}{p+2}$ i podajemy jej dziedzinę: $D = \mathrm{R} \setminus \{-2, -1\}$.

Aby wyznaczyć zbiór wartości funkcji f, przekształcamy jej wzór:

$$f(p) = \frac{p}{p+2} = \frac{(p+2)-2}{p+2} = \frac{-2}{p+2} + 1, \ p \in D.$$

Prosta $y = 1$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f, zatem liczba 1 nie należy do zbioru wartości funkcji f. Ponieważ $-1 \notin D$, więc rozpatrując funkcję $g(x) = \frac{x}{x+2}$, której dziedziną jest zbiór $\mathrm{R} \setminus \{-2\}$, stwierdzamy, że do zbioru wartości funkcji f nie należy liczba $g(-1) = -1$.
Można też wykorzystać wykres funkcji f i zauważyć, że do wykresu nie należy punkt $(-1, -1)$.



Zatem $f(D) = \mathrm{R} \setminus \{-1, 1\}$.

b)

Sposób I

Wyznaczamy funkcję pochodną funkcji f:

$$f'(p) = \left(\frac{p}{p+2}\right)' = \frac{1(p+2) - 1 \cdot p}{(p+2)^2} = \frac{2}{(p+2)^2} \qquad p \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}.$$

Obliczamy wartość pochodnej dla $p = -3$:

$f'(-3) = \frac{2}{(-3+2)^2} = 2$

Obliczamy rzędną punktu P: $f(-3) = \frac{-3}{-3+2} = 3$

Zatem $P = (-3, 3)$.

Wyznaczamy równanie stycznej do wykresu f w punkcie P:

$y = f'(-3)(p+3) + 3$

$y = 2(p+3) + 3$

$y = 2p + 9$

Sposób II

Wyznaczamy rzędną punktu P: $f(-3) = 3$, czyli $P = (-3, 3)$.

Zapisujemy równanie stycznej s do wykresu f w postaci: $y = ap + b$. Ponieważ $P \in s$, więc $3 = -3a + b$, skąd $b = 3a + 3$.

Zatem równanie stycznej można zapisać: $y = ap + (3a + 3)$.

Prosta styczna do wykresu funkcji f w punkcie P ma z wykresem dokładnie jeden punkt wspólny (jako styczna do jednej z gałęzi hiperboli).

Stąd układ równań:

$\begin{cases} y = \frac{p}{p+2} \\ y = ap + (3a+3) \end{cases}$, gdzie $p \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Rozwiązujemy układ równań i w wyniku otrzymujemy równanie

$ap^2 + (5a+2)p + (6a+6) = 0$.

Ponieważ $a \neq 0$ (prosta o równaniu $y = b$ nie może być styczną do hiperboli), więc otrzymujemy równanie kwadratowe, które musi mieć jedno rozwiązanie, a zatem $\Delta = 0$.

$\Delta = (5a+2)^2 - 4a(6a+6) = 25a^2 + 20a + 4 - 24a^2 - 24a = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$

$(a-2)^2 = 0$, skąd $a = 2$.

Zatem równanie stycznej ma postać: $y = 2p + 3 \cdot 2 + 3$, czyli $y = 2p + 9$.

Odpowiedź:

a) $f(p) = \frac{p}{p+2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

b) $y = 2p + 9$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów:

a) Pierwszy etap składa się z czterech części:

– rozwiązanie układu równań: $m_0 = \frac{p}{p+1}$ i $n_0 = \frac{p+2}{p+1}$

– zapisanie wzoru funkcji $f(p) = \frac{p}{p+2}$ i podanie jej dziedziny $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$

– przekształcenie wzoru funkcji f do postaci $f(p) = \frac{-2}{p+2} + 1$ LUB sporządzenie wykresu funkcji

– uzasadnienie, że $-1 \notin D$ i podanie zbioru wartości funkcji $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z tych części zdający otrzymuje **1 punkt.**

b) Drugi etap składa się z dwóch części:

<u>**Sposób I**</u>

– wyznaczenie wzoru funkcji pochodnej $f'(p)=\frac{2}{(p+2)^2}$, $p \in \mathrm{R} \setminus \{-2, -1\}$, i obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej $f'(-3)=3$

– obliczenie drugiej współrzędnej punktu styczności $f(-3)=3$ i wyznaczenie równania stycznej do wykresu funkcji f: $y=2p+9$.

<u>**Sposób II**</u>

– zapisanie równania stycznej w postaci $y=ap+(3a+3)$ oraz zauważenie, że układ równań $\begin{cases} y=\frac{p}{p+2} \\ y=ap+(3a+3) \end{cases}$, gdzie $p \in \mathrm{R} \setminus \{-2, -1\}$, musi mieć jedno rozwiązanie

– rozwiązanie układu i obliczenie $a=2$ oraz wyznaczenie równania stycznej f: $y=2p+9$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt.**

Uwagi

1) Jeżeli zdający nie uwzględni we wzorze funkcji f założenia $p \neq -1$, a tym samym błędnie wyznaczy $f(D)$, to w części a) otrzymuje **2 punkty**.
2) Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w części a), np. podczas wyznaczania pary liczb (m_0, n_0), albo błędnie zapisze wzór funkcji f, ale konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje za całość **5 punktów**.
3) Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w części b), ale konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje za tę część **1 punkt**.

Zadanie 16. (0–7)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	R11. Rachunek różniczkowy. Zdający: 4) korzysta z własności pochodnej do wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji; 5) znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych; 6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Przykładowe rozwiązanie

Niech h będzie długością krawędzi prostopadłościanu łączącej podstawy prostopadłościanu. Niech y będzie długością boku przekroju rozważanego prostopadłościanu, nie będącego krawędzią podstawy. Wiadomo, że $\sqrt{3}=xy$. Co więcej, na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy $y^2=h^2+x^2$. A zatem $\sqrt{3}=x\sqrt{h^2+x^2}$. Objętość V prostopadłościanu równa jest iloczynowi pola podstawy i wysokości, a więc $V=x^2h$, zaś $V^2=x^4h^2$. Liczbę h^2 wyznaczamy ze wzoru na pole przekroju: $h^2=\frac{3-x^4}{x^2}$. W szczególności kwadrat objętości prostopadłościanu wyrazić można za pomocą następującej funkcji zmiennej x: $V^2(x)=x^2(3-x^4)=3x^2-x^6$. Wyrażenie to rozpatrujemy dla tych x, dla których opisuje ono kwadrat objętości, więc gdy $3-x^4>0$ oraz $x>0$, czyli gdy $x \in \left(0, \sqrt[4]{3}\right)$. Pochodna funkcji $V^2(x)$ równa jest $(V^2)'(x)=6x-6x^5$. Rozwiązujemy następnie równanie, $(V^2)'(x)=0$, a więc równanie $6x-6x^5=6x(1-x)(1+x)(1+x^2)=0$. Jedyne rozwiązanie mieszczące się w wyznaczonym wcześniej zakresie wartości to $x=1$. Dla $x \in (0,1)$ funkcja $(V^2)'(x)$ jest dodatnia (iloczyn czterech dodatnich czynników), a więc $V^2(x)$ jest rosnąca na przedziale otwarto-domkniętym $(0,1\rangle$, zaś dla $x>1$ – funkcja $(V^2)'(x)$ jest ujemna (trzy czynniki dodatnie, jeden ujemny), a więc $V^2(x)$ jest malejąca w przedziale domknięto-otwartym $\left\langle 1, \sqrt[4]{3}\right)$. Wynika stąd, że największą wartością funkcji $V^2(x)$ w przedziale $\left(0, \sqrt[4]{3}\right)$ jest jej wartość w punkcie 1, czyli liczba $V^2(1) = 2$. Skoro kwadrat objętości jest największy dla $x = 1$, to największa objętość samego prostopadłościanu przy zadanych warunkach równa jest $\sqrt{2}$. Długości krawędzi prostopadłościanu, którego objętość jest największa, to liczby 1, 1, $\sqrt{2}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów:

a) Pierwszy etap składa się z trzech części:

– wprowadzenie oznaczeń i wyznaczenie wzoru na wysokość prostopadłościanu: $h^2 = \frac{3 - x^4}{x^2}$,

– wyznaczenie kwadratu objętości prostopadłościanu jako funkcji jednej zmiennej *x:* $V^2(x) = x^2(3 - x^4)$, na podstawie wzoru $V(x) = x^2 h$,

– wyznaczenie tych *x*, dla których wyrażenie $V^2(x)$ jest kwadratem objętości prostopadłościanu: są to $x \in \left(0, \sqrt[4]{3}\right)$,

Za poprawne rozumowanie w każdej z tych części zdający otrzymuje **1 punkt**.

b) Drugi etap składa się z trzech części:

– wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej $V^2(x) = x^2(3 - x^4)$, czyli $\left(V^2\right)'(x) = 6x - 6x^5$.

– obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji $V^2(x)$ mieszczących się w zakresie rozważanych *x*, jest jedno: $x = 1$,

– zbadanie znaku pochodnej funkcji $V^2(x)$ i uzasadnienie, że dla $x = 1$ funkcja $V^2(x)$ osiąga największą wartość.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

c) Trzeci etap. Obliczenie największej objętości prostopadłościanu $V(1) = \sqrt{2}$. Znalezienie długości krawędzi prostopadłościanu o największej możliwej objętości: 1, 1, $\sqrt{2}$. Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.