CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2018/2019

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

FORMUŁA OD 2015

(„NOWA MATURA”)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-R1

CZERWIEC 2019

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Numer zadania	1	2	3	4
Odpowiedź	C	C	A	D

Klucz punktowania zadań kodowanych

Zad 5.		
3	7	5

Zadanie 5. (0–2)

W urnie znajduje się 16 kul, które mogą się różnić wyłącznie kolorem. Wśród nich jest 10 kul białych i 6 kul czarnych. Z tej urny losujemy dwukrotnie jedną kulę bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych.
Wpisz w poniższe kratki – od lewej do prawej – trzy kolejne cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania dwukrotnie kuli białej

$$p=\frac{10\cdot 9}{16\cdot 15}=\frac{90}{240}=\frac{3}{8}=0{,}375\,.$$

Kodujemy cyfry: 3, 7, 5.

Schemat oceniania rozwiązania zadania z kodowaną odpowiedzią

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy zakoduje cyfry: 3, 7, 5.

Zadanie 6. (0–3)

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

Rozwiązanie

Zauważamy, że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28 może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr:

- pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka;
  lub
- cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka.

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka. Cyfrę 7 możemy zapisać na jednym z siedmiu miejsc, cyfrę 4 na jednym z sześciu miejsc, a pozostałe pięć miejsc wypełnią jedynki. Stosując regułę mnożenia otrzymujemy:

$$7 \cdot 6 \cdot 1 = 42$$

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka. Wybieramy najpierw miejsce dla cyfry 7, następnie dwa miejsca dla dwóch cyfr 2, a pozostałe miejsca wypełnią jedynki. Stosując kolejny raz regułę mnożenia otrzymujemy:

$$7 \cdot \binom{6}{2} \cdot 1 = 7 \cdot 15 \cdot 1 = 105$$

Teraz stosujemy regułę dodawania

$$42 + 105 = 147$$

Odpowiedź: Wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28, jest 147.

<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze jeden z dwóch przypadków:

- naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28, może być zbudowana z zestawu cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka

albo

- naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28, może być zbudowana z zestawu cyfr: cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy zapisze oba przypadki, że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28, może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka lub cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka

oraz

gdy obliczy dla jednego z dwóch przypadków, ile jest liczb siedmiocyfrowych zbudowanych z cyfr:

- pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka: 42

albo

- cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka: 105.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy obliczy, że jest 147 siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym, jest równy 28.

Zadanie 7. (0–2)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{25x^2-9}{x^2+2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Oblicz wartość $f'(10)$ pochodnej tej funkcji dla argumentu 10.

Rozwiązanie
Obliczamy pochodną funkcji f. Pochodna ta jest określona wzorem:

$f'(x)=\frac{118x}{\left(x^2+2\right)^2}$, zatem $f'(10)=\frac{1180}{10404}=\frac{295}{2601}\approx 0{,}113417$.

<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy wyznaczył pochodną funkcji f: $f'(x)=\frac{118x}{\left(x^2+2\right)^2}$

Zdający otrzymuje .... 2 p.

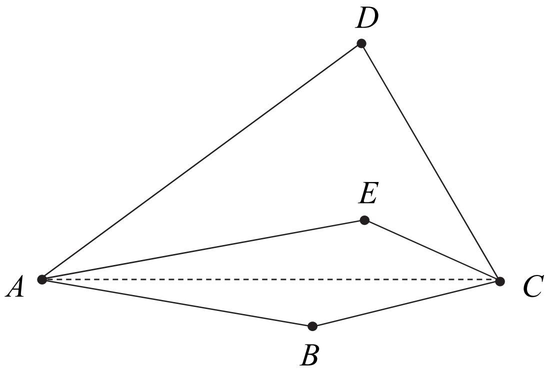
gdy obliczył wartość wyznaczonej pochodnej dla argumentu $x=10$:

$$f'(10)=\frac{1180}{10404}=\frac{295}{2601}\approx 0{,}113417 .$$

Uwaga
Jeżeli zdający błędnie obliczy pochodną funkcji, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**, z wyjątkiem przypadku popełnienia identyfikowalnego błędu rachunkowego, kiedy może otrzymać 1 punkt.

Zadanie 8. (0–3)

Dwusieczne kątów *BAD* i *BCD* czworokąta wypukłego *ABCD* przecinają się w punkcie *E*, przy czym punkty *B* i *E* leżą po przeciwnych stronach prostej *AC* (zobacz rysunek).

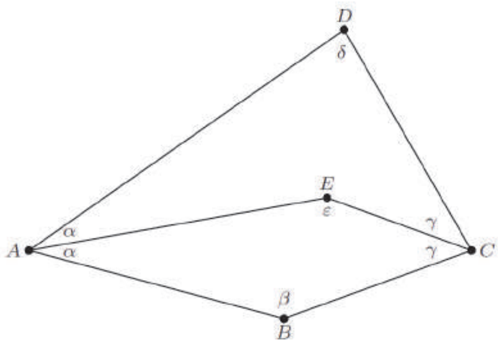


Wykaż, że $|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ADC| + 2\cdot|\sphericalangle AEC| = 360^\circ$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia:

$\alpha = |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle DAE|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$, $\gamma = |\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle DCE|$, $\delta = |\sphericalangle ADC|$, $\varepsilon = |\sphericalangle AEC|$, gdzie ε jest kątem wypukłym, tzn. kątem wewnętrznym czworokąta *ABCE*.



Ponieważ suma kątów czworokąta jest równa 360°, więc:

z czworokąta *ABCE* mamy równość $\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 360^\circ$,

z czworokąta *AECD* mamy równość $\alpha + (360^\circ - \varepsilon) + \gamma + \delta = 360^\circ$.

Po odjęciu tych równości stronami otrzymujemy:

$$\beta + \varepsilon - 360^\circ + \varepsilon - \delta = 0,$$

czyli

$$\beta - \delta + 2\varepsilon = 360^\circ.$$

To kończy dowód.

Ten sam dowód można zapisać wprost, bez przyjmowania dodatkowych oznaczeń.

Z czworokąta *ABCE* dostajemy równość

$$\left|\sphericalangle BAE\right|+\left|\sphericalangle ABC\right|+\left|\sphericalangle BCE\right|+\left|\sphericalangle AEC\right|=360^\circ .$$

Z czworokąta $AECD$ dostajemy równość

$$\left|\sphericalangle EAD\right|+\left(360^\circ-\left|\sphericalangle AEC\right|\right)+\left|\sphericalangle ECD\right|+\left|\sphericalangle ADC\right|=360^\circ .$$

Po odjęciu tych równości stronami i uwzględnieniu równości $\left|\sphericalangle BAE\right|=\left|\sphericalangle EAD\right|$ oraz $\left|\sphericalangle BCE\right|=\left|\sphericalangle ECD\right|$, otrzymujemy równość

$$\left|\sphericalangle ABC\right|+\left|\sphericalangle AEC\right|-360^\circ+\left|\sphericalangle AEC\right|-\left|\sphericalangle ADC\right|=0^\circ ,$$

czyli

$$\left|\sphericalangle ABC\right|-\left|\sphericalangle ADC\right|+2\cdot\left|\sphericalangle AEC\right|=360^\circ .$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

- Zdający zapisze jedną z równości wynikające z sumy kątów czworokąta, tzn. $\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon=360^\circ$ lub $\alpha+\left(360^\circ-\varepsilon\right)+\gamma+\delta=360^\circ$

lub

- zdający zapisze jedną z równości: $\left|\sphericalangle BAE\right|+\left|\sphericalangle ABC\right|+\left|\sphericalangle BCE\right|+\left|\sphericalangle AEC\right|=360^\circ$ lub $\left|\sphericalangle EAD\right|+\left(360^\circ-\left|\sphericalangle AEC\right|\right)+\left|\sphericalangle ECD\right|+\left|\sphericalangle ADC\right|=360^\circ$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

- Zdający zapisze obie równości wynikające z sumy kątów czworokąta, tzn. $\alpha+\beta+\gamma+\varepsilon=360^\circ$ oraz $\alpha+\left(360^\circ-\varepsilon\right)+\gamma+\delta=360^\circ$

lub

- zdający zapisze równości: $\left|\sphericalangle BAE\right|+\left|\sphericalangle ABC\right|+\left|\sphericalangle BCE\right|+\left|\sphericalangle AEC\right|=360^\circ$ oraz $\left|\sphericalangle EAD\right|+\left(360^\circ-\left|\sphericalangle AEC\right|\right)+\left|\sphericalangle ECD\right|+\left|\sphericalangle ADC\right|=360^\circ$.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający odejmie te równości stronami z uwzględnieniem równości $\left|\sphericalangle BAE\right|=\left|\sphericalangle EAD\right|$ oraz $\left|\sphericalangle BCE\right|=\left|\sphericalangle ECD\right|$.

Zadanie 9. (0–3)

Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ jest podzielne przez 16.

Rozwiązanie (I sposób)

Przekształcamy wyrażenie równoważnie w następujący sposób

$$\begin{aligned}
&n^5 - 3n^4 - n + 19,\\
&n^5 - 3n^4 - n + 3 + 16,\\
&n^4 \cdot (n-3) - (n-3) + 16,\\
&(n^4 - 1)\cdot(n-3) + 16,\\
&(n^2 - 1)\cdot(n^2+1)\cdot(n-3) + 16,\\
&(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n^2+1)\cdot(n-3) + 16
\end{aligned}$$

Z założenia liczba n jest nieparzysta, więc liczby: $(n-1)$, $(n+1)$, (n^2+1), $(n-3)$ są parzyste.

Oznacza to, że ich iloczyn jest podzielny przez 2^4. Zatem wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ jest sumą dwóch składników podzielnych przez 16, a więc jest podzielne przez 16.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze wyrażenie w postaci: $(n^4 - 1)\cdot(n-3) + 16$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy zapisze nierówność w postaci: $(n-1)\cdot(n+1)\cdot(n^2+1)\cdot(n-3) + 16$ i nie uzasadni podzielności przez 16.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie (II sposób)

Ponieważ liczba n jest nieparzysta możemy zapisać ją w postaci $2k+1$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zatem wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ przyjmuje postać: $(2k+1)^5 - 3(2k+1)^4 - (2k+1) + 19$.
Po przekształceniu wyrażenia równoważnie otrzymujemy

$$32k^5 + 32k^4 - 16k^3 - 32k^2 - 16k + 16.$$

Stąd wynika, że wyrażenie $32k^5 + 32k^4 - 16k^3 - 32k^2 - 16k + 16$ możemy zapisać w postaci iloczynu $16\cdot(2k^5 + 2k^4 - k^3 - 2k^2 - k + 1)$, który jako iloczyn liczby 16 oraz całkowitej liczby $(2k^5 + 2k^4 - k^3 - 2k^2 - k + 1)$ jest podzielny przez 16.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze wraz z odpowiednimi założeniami wyrażenie $(2k+1)^5-3(2k+1)^4-(2k+1)+19$ i przekształci poprawnie przynajmniej jedno z wyrażeń.

$(2k+1)^5=32k^5+80k^4+80k^3+40k^2+10k+1$ lub

$(2k+1)^4=16k^4+32k^3+24k^2+8k+1$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy doprowadzi wyrażenie do postaci $32k^5+32k^4-16k^3-32k^2-16k+16$ i nie uzasadni, że to wyrażenie jest podzielne przez 16.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 10. (0–4)

Miara kąta wewnętrznego n-kąta foremnego jest o 2° mniejsza od miary kąta wewnętrznego $(n+2)$-kąta foremnego. Oblicz n.

Rozwiązanie

Suma miar kątów wewnętrznych n-kąta foremnego jest równa $(n-2)\cdot 180^\circ$, więc miara jednego kąta wewnętrznego tego n-kąta jest równa $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

Tak samo wyznaczamy miarę kąta wewnętrznego $(n+2)$- kąta foremnego.

Jest ona równa $\frac{n\cdot 180^\circ}{n+2}$.

Stąd i z treści zadania otrzymujemy równanie

$$\frac{n\cdot 180^\circ}{n+2}=\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}+2^\circ,$$

$$\frac{90n}{n+2}=\frac{90(n-2)}{n}+1,$$

$$90n^2=90(n-2)(n+2)+n(n+2),$$

$$90n^2=90n^2-360+n^2+2n,$$

$$n^2+2n+1-361=0,$$

$$(n+1)^2-19^2=0,$$

$$(n+1-19)(n+1+19)=0,$$

$$(n-18)(n+20)=0,$$

$$n=18 \text{ lub } n=-20.$$

Liczba n jest naturalna, więc $n=18$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze wyrazi miarę kąta wewnętrznego n-kąta lub $(n+2)$-kąta foremnego w zależności od n: np. $180° - \frac{360°}{n}$, $\frac{n \cdot 180°}{n+2}$
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

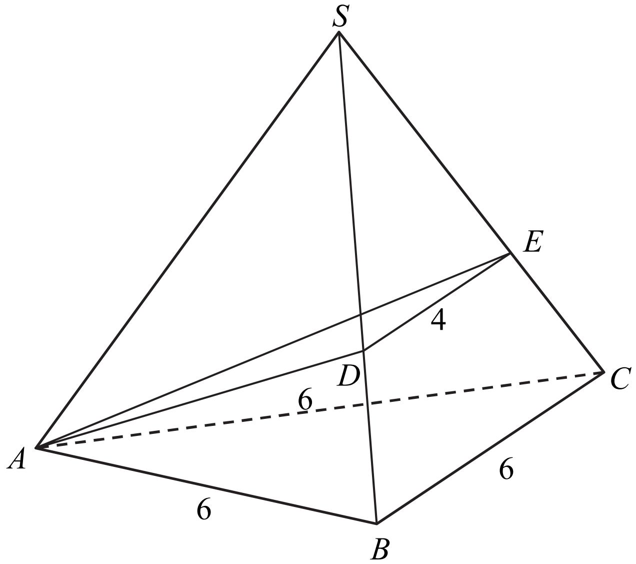
Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy zapisze równanie z niewiadomą n, wynikające z porównania miar kątów wewnętrznych wielokątów: $\frac{n \cdot 180°}{n+2} = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} + 2°$
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy zapisze równanie kwadratowe z niewiadomą n w postaci: $an^2 + bn + c = 0$, np.:
$n^2 + 2n - 360 = 0$
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy obliczy liczbę wierzchołków n-kąta foremnego: $n = 18$.

Zadanie 11. (0–6)

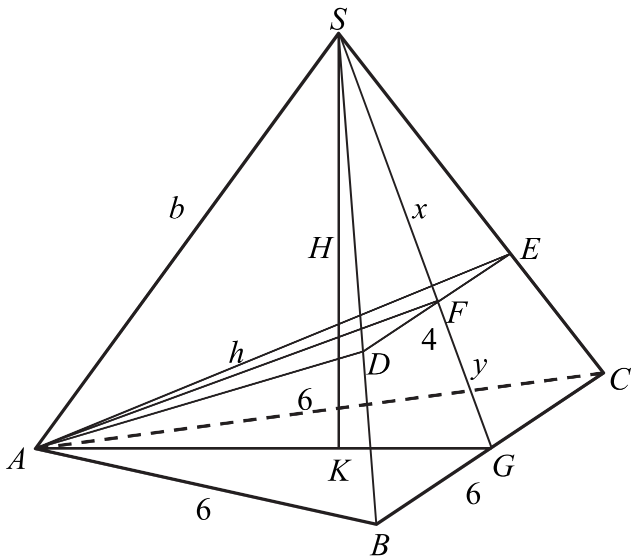
Podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 6. Na krawędziach bocznych BS i CS wybrano punkty, odpowiednio D i E, takie że $|BD| = |CE|$ oraz $|DE| = 4$ (zobacz rysunek). Płaszczyzna ADE jest prostopadła do płaszczyzny ściany bocznej BCS ostrosłupa.



Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia: $|AF| = h$, $|SF| = x$, $|FG| = y$, $|AS| = |BS| = |CS| = b$, $|SK| = H$, jak na rysunku.



Z podobieństwa trójkątów DES i BCS otrzymujemy równanie $\frac{x}{4} = \frac{x+y}{6}$. Stąd $x = 2y$.

W trójkącie równobocznym ABC mamy: $|AG| = 3\sqrt{3}$, $|AK| = 2\sqrt{3}$, $|KG| = \sqrt{3}$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} h^2+4y^2=b^2 \\ h^2+y^2=27 \\ 9y^2+9=b^2 \end{cases}$$

Odejmujemy stronami pierwsze i trzecie równanie

$$\begin{cases} h^2+4y^2=b^2 \\ h^2+y^2=27 \\ h^2-5y^2=9 \end{cases}$$

Odejmujemy stronami drugie i trzecie równanie

$$\begin{cases} h^2+4y^2=b^2 \\ h^2+y^2=27 \\ 6y^2=18 \end{cases}.$$

Stąd otrzymujemy $y=\sqrt{3}$. Zatem $|SG|=3\sqrt{3}$. Obliczamy wysokość i objętość ostrosłupa $H=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2-3}=2\sqrt{6}$ oraz $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{36\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{6}=18\sqrt{2}$.

Uwagi

1. Zależność $y=\sqrt{3}$ można wyznaczyć też wykorzystując podobieństwo trójkątów AFG i SKG (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku G). Stąd otrzymujemy

$$\frac{|FG|}{|AG|}=\frac{|KG|}{|SG|}$$

$$\frac{y}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3y}$$

Stąd $3y^2=3\left(\sqrt{3}\right)^2$, więc $y=\sqrt{3}$. Zatem $|SG|=3y=3\sqrt{3}$.

2. Zdający może skorzystać z podobieństwa trójkątów SDF i SBG, czyli „połówek trójkątów” SDE i BCS.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- wykorzysta podobieństwo trójkątów DES i BCS i zapisze równanie $\frac{x}{4}=\frac{x+y}{6}$.

albo

- zapisze zależności wynikające z własności trójkąta równobocznego *ABC*: $|AG| = 3\sqrt{3}$, $|AK| = 2\sqrt{3}$, $|KG| = \sqrt{3}$,

albo

- zapisze skalę podobieństwa trójkątów *SDE* i *SBC*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 3 p.

Zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć długości odcinków potrzebnych do obliczenia wysokości ostrosłupa, np.: $\begin{cases} h^2 + 4y^2 = b^2 \\ h^2 + y^2 = 27 \\ 9y^2 + 9 = b^2 \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.

Zdający obliczy długość odcinka $|SG| = 3\sqrt{3}$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa $H = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - 3} = 2\sqrt{6}$.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 18\sqrt{2}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
2. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i jedynym błędem, który jednak nie ułatwia rozważania zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania, jest błąd, polegający na niepoprawnym:
   a) zapisaniu proporcji z podobieństwa trójkątów,
   b) zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa,
   c) zastosowaniu nieistniejącego wzoru „$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$”,

   to zdający otrzymuje co najwyżej **4 punkty** za rozwiązanie całego zadania.

Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie

$$4x^2+(2-4m)x+m^2-m-2=0$$

ma dwa różne dodatnie rozwiązania x_1, x_2 spełniające nierówność $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}\le\frac{17}{4}$.

Rozwiązanie (I sposób)

Wyróżnik trójmianu kwadratowego $4x^2+(2-4m)x+m^2-m-2$ zmiennej *x* jest równy

$$\Delta=(2-4m)^2-4\cdot4\cdot\left(m^2-m-2\right)=4-16m+16m^2-16m^2+16m+32=36>0.$$

Zatem dla każdej wartości parametru *m* trójmian ten ma dwa różne pierwiastki

$$x_1=\frac{4m-2-6}{2\cdot4}=\frac{m-2}{2},\quad x_2=\frac{4m-2+6}{2\cdot4}=\frac{m+1}{2}.$$

Oba pierwiastki są dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{m-2}{2}>0\ \text{ i }\ \frac{m+1}{2}>0,$$

$$m>2\ \text{ i }\ m>-1,$$

$$m>2.$$

Nierówność $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}\le\frac{17}{4}$ możemy więc zapisać w postaci

$$\left(\frac{m+1}{2}\right)^2+\left(\frac{m-2}{2}\right)^2\le\frac{17}{4},$$

$$m^2+2m+1+m^2-4m+4\le17,$$

$$2m^2-2m-12\le0,$$

$$m^2-m-6\le0,$$

$$(m+2)(m-3)\le0,$$

więc

$$m\in\langle-2,3\rangle.$$

Uwzględniając warunek $m>2$, otrzymujemy $m\in(2,3\rangle$.

Uwaga 1.

Pierwiastki trójmianu kwadratowego $4x^2+(2-4m)x+m^2-m-2$ zmiennej *x* możemy wyznaczyć, rozkładając ten trójmian na czynniki w następujący sposób

$$4x^2+(2-4m)x+m^2-m-2=4x^2+2x-4mx+m^2-m-2=$$

$$=4x^2-2mx+4x-2mx-2x+m^2-2m-2x+m-2=$$

$$=2x(2x-m+2)-m(2x-m+2)-(2x-m+2)=$$

$$=(2x-m-1)(2x-m+2)=4\left(x-\frac{m+1}{2}\right)\left(x-\frac{m-2}{2}\right).$$

To oznacza, że dla każdej wartości parametru *m* trójmian ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste

$$x_1=\frac{m-2}{2},\ x_2=\frac{m+1}{2}.$$

Uwaga 2.

Aby wyznaczyć zbiór tych wartości parametru m, dla których oba pierwiastki trójmianu kwadratowego $4x^2+(2-4m)x+m^2-m-2$ zmiennej *x* są dodatnie wystarczy zauważyć, że $x_1=\frac{m-2}{2}<\frac{m+1}{2}=x_2$, więc wystarczy, żeby spełniona była nierówność $\frac{m-2}{2}>0$, czyli $m>2$.

Uwaga 3.
Możemy też zauważyć, że oba istniejące pierwiastki trójmianu kwadratowego są dodatnie, gdy $f(0)>0$ i $x_W>0$, gdzie $f(x)=4x^2+(2-4m)x+m^2-m-2$. Otrzymujemy wtedy układ nierówności z niewiadomą m

$$m^2-m-2>0 \text{ i } \frac{4m-2}{2\cdot 4}>0$$
$$(m-2)(m+1)>0 \text{ i } m>\frac{1}{2}$$
$$m-2>0 \text{ i } m>\frac{1}{2}$$
$$m>2.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na obliczeniu wyróżnika trójmianu kwadratowego i stwierdzeniu, że dla każdej wartości parametru m istnieją dwa różne pierwiastki rzeczywiste: $\Delta=36>0$, więc równanie ma dla każdej wartości parametru m dwa rozwiązania.
Za poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta>0$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga

Jeżeli zdający rozkłada trójmian $4x^2+(2-4m)x+m^2-m-2$ na czynniki i otrzymuje postać, w której wszystkie składniki mają ten sam czynnik, np.:
$2x(2x-m+2)-m(2x-m+2)-(2x-m+2)$, to takie działanie jest odpowiednikiem realizacji pierwszego etapu rozwiązania i zdający otrzymuje wtedy **1 punkt**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu

- wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, dla których oba pierwiastki są dodatnie

oraz

- wyznaczeniu tych wszystkich wartości parametru m, dla których spełniony jest warunek $x_1^2+x_2^2\le\frac{17}{4}$

Za ten etap rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
Za wyznaczenie pierwiastków w zależności od m: $x_1=\frac{m-2}{2}$, $x_2=\frac{m+1}{2}$ zdający otrzymuje **1 punkt**.
Za zapisanie układu nierówności $\frac{m-2}{2}>0$ i $\frac{m+1}{2}>0$ oraz jego rozwiązanie $m\in(2,+\infty)$ zdający otrzymuje **1 punkt.**

Uwaga

Jeżeli zdający ustali, że oba pierwiastki trójmianu kwadratowego są dodatnie, gdy $f(0)>0$ i $x_W>0$, to otrzymuje **1 punkt** za realizację II etapu.

Jeżeli dodatkowo zdający wyznaczy poprawnie wszystkie wartości m, które spełniają te dwa warunki, to otrzymuje **2 punkty** za realizację II etapu.

Za zapisanie nierówności $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2+\left(\frac{m-2}{2}\right)^2\le\frac{17}{4}$ zdający otrzymuje **1 punkt.**

Za rozwiązanie nierówności $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2+\left(\frac{m-2}{2}\right)^2\le\frac{17}{4}$: $m\in\langle-2,3\rangle$ zdający otrzymuje **1 punkt.**

Trzeci etap rozwiązania polega na wyznaczeniu wartości parametru *m* z uwzględnieniem wszystkich warunków
Za zapisanie części wspólnej rozwiązań $m\in(2,3\rangle$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Rozwiązanie (II sposób)
Wyróżnik trójmianu kwadratowego $4x^2+(2-4m)x+m^2-m-2$ zmiennej *x* jest równy

$$\Delta=(2-4m)^2-4\cdot4\cdot\left(m^2-m-2\right)=4-16m+16m^2-16m^2+16m+32=36>0.$$

Zatem dla każdej wartości parametru *m* trójmian ten ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2.
Oba pierwiastki są dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x_1+x_2>0 \text{ i } x_1\cdot x_2>0,$$
$$\frac{4m-2}{2}>0 \text{ i } \frac{m^2-m-2}{2}>0,$$
$$4m>2 \text{ i } m^2-m-2>0,$$
$$m>\frac{1}{2} \text{ i } (m-2)(m+1)>0,$$
$$m>\frac{1}{2} \text{ i } m-2>0,$$
$$m>2.$$

Nierówność $x_1^2+x_2^2\le\frac{17}{4}$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2\le\frac{17}{4},$$
$$\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\le\frac{17}{4}.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy

$$\left(\frac{4m-2}{4}\right)^2-2\cdot\frac{m^2-m-2}{4}\le\frac{17}{4},$$
$$4m^2-4m+1-2\left(m^2-m-2\right)\le17,$$
$$2m^2+2m-12\le0$$
$$m^2+m-6\le0,$$
$$(m+2)(m-3)\le0.$$

więc

$$m\in\langle-2,3\rangle.$$

Uwzględniając warunek $m>2$, otrzymujemy $m\in(2,3\rangle$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów, każdy etap polega na zapisaniu i rozwiązaniu nierówności lub układu nierówności z niewiadomą *m*. W efekcie zdający musi rozwiązać cztery nierówności z niewiadomą *m*.

Pierwszy etap polega na obliczeniu wyróżnika trójmianu kwadratowego i stwierdzeniu, że dla każdej wartości parametru *m* istnieją dwa różne pierwiastki rzeczywiste: $\Delta=36>0$, więc równanie ma dla każdej wartości parametru *m* dwa rozwiązania.

Za poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Drugi etap

Zapisanie nierówności $x_1x_2 > 0$ w postaci . Za poprawne rozwiązanie tej nierówności $m \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

1. $x_1 + x_2 > 0$. Za poprawne rozwiązanie tej nierówności $m \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

2. $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$. Za poprawne rozwiązanie tej nierówności zdający otrzymuje **2 punkty**.

   Przy czym za przekształcenie nierówności do postaci $\left(\frac{4m-2}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m^2 - m - 2}{4} \leq \frac{17}{4}$ otrzymuje **1 punkt**.

Trzeci etap

Za zapisanie części wspólnej rozwiązań $m \in (2, 3\rangle$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.

2. Jeżeli zdający stosuje nieistniejącą zależność: „suma kwadratów = kwadrat sumy”, prowadzącą do uproszczenia badanego problemu, lub zdający stosuje inny błędny wzór, prowadzący do uproszczenia badanego problemu, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Za trzeci etap rozwiązania (zapisanie części wspólnej zbiorów rozwiązań otrzymanych nierówności) zdający może otrzymać 1 punkt tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie następujące warunki:
   a) $Z_i \neq \varnothing$ dla każdego $i = 0, 1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3$;
   b) $Z_i \neq \mathbb{R}$ dla każdego $i = 1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3$;
   c) $\sim\left(Z_i \subset Z_j\right)$ dla każdego $i \neq j$ oraz $i, j = 1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3$ poza inkluzją $Z_{1_1} \subset Z_{2_1}$, która jest prawdziwa.
   W powyższych zapisach:
   $Z_0 = \mathbb{R}$ oznacza zbiór rozwiązań nierówności $\Delta(m) > 0$;
   $Z_{1_1} = (2, +\infty)$ oznacza zbiór rozwiązań nierówności $x_1(m) > 0$;
   $Z_{1_2} = (-1, +\infty)$ oznacza zbiór rozwiązań nierówności $x_2(m) > 0$;
   $Z_3 = \langle -2, 3\rangle$ oznacza zbiór rozwiązań nierówności $\left(x_1{}^2 + x_2{}^2\right)(m) \leq \frac{17}{4}$;
   $Z_{1_2} = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ oznacza zbiór rozwiązań nierówności $(x_1 + x_2)(m) > 0$;
   $Z_{2_2} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ oznacza zbiór rozwiązań nierówności $(x_1 \cdot x_2)(m) > 0$.

Zadanie 13. (0–6)

Punkt $A=(-2,6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu 90. Przekątna BD zawiera się w prostej l o równaniu $2x-y-5=0$. Wyznacz długość boku tego rombu.

Rozwiązanie (I sposób)

Wyznaczamy równanie prostej k zawierającej przekątną AC rombu (prosta k jest prostopadła do prostej l, punkt A leży na prostej k.

$k: y=-\frac{1}{2}x+5$

Z układu równań $\begin{cases} y=2x-5 \\ y=-\frac{1}{2}x+5 \end{cases}$ wyznaczamy współrzędne punktu $S=(4,3)$ (środek symetrii rombu). Punkt S jest jednocześnie środkiem przekątnej AC, co pozwala obliczyć długość przekątnej AC: $2\cdot|AS|=2\cdot\sqrt{(4+2)^2+(3-6)^2}=2\cdot\sqrt{36+9}=6\sqrt{5}$.

Wykorzystujemy informację o polu rombu i obliczamy długość drugiej przekątnej.

$\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=90$

$\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{5}\cdot|BD|=90$

$|BD|=6\sqrt{5}$

Stwierdzamy, że rozważany romb jest kwadratem, którego przekątna ma długość $6\sqrt{5}$. Zatem bok kwadratu ma długość $\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{10}$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej l, przechodzącej przez punkt A: $y=-\frac{1}{2}x+5$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy współrzędne punktu S: $S=(4,3)$.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy obliczy długość $|AS|=3\sqrt{5}$.

Uwaga: Jeżeli zdający obliczy $|AS|=3\sqrt{5}$ jako odległość punktu A od prostej l bez korzystania ze współrzędnych środka symetrii rombu i bez zapisania równania prostej prostopadłej do prostej l, to otrzymuje **3 punkty**.

Zdający otrzymuje .... 4 p.

gdy obliczy długość przekątnej $|BD|=6\sqrt{5}$.

Zdający otrzymuje .... **5 p.**

gdy zauważy, że rozważany romb jest kwadratem.

Zdający otrzymuje .... **6 p.**

gdy obliczy długość boku rombu: $3\sqrt{10}$.

Uwaga
Jeżeli zdający nie zapisze, że rozważany romb jest kwadratem, ale korzysta z tego faktu i poprawnie wyznacza długość boku kwadratu, to może otrzymać 6 punktów, o ile nie popełnia błędów na innych etapach rozwiązania.

Rozwiązanie (II sposób)
Wyznaczamy równanie prostej *k* zawierającej przekątną *AC* rombu (prosta *k* jest prostopadła do prostej *l*, punkt *A* leży na prostej *k*.

$k: y = -\frac{1}{2}x + 5$

Z układu równań $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{cases}$ wyznaczamy współrzędne punktu $S = (4,3)$ (środek symetrii rombu). Zauważamy, że pole trójkąta *ABS* stanowi $\frac{1}{4}$ pola rombu *ABCD* i jest równe $22,5$.

Uwaga: Zdający może wyznaczyć współrzędne punktu *C*: $C = (10,0)$ i wyznaczyć współrzędne punktu *B* przy wykorzystaniu pola trójkąta *ABC*, które jest równe 45.

Przyjmujemy oznaczenia dla współrzędnych punktu *B*: $B = (x_B, y_B)$. Wyznaczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AS} = [4+2, 3-6] = [6, -3]$, $\overrightarrow{AB} = [x_B + 2, y_B - 6]$.

Wyznaczamy pole trójkąta *ABS*:

$P_{\Delta ABS} = \frac{1}{2}|6y_B - 36 + 3x_B + 6|$

Punkt *B* leży na prostej *l*, więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.
Rozwiązujemy układ równań:

$\begin{cases} |6y_B + 3x_B - 30| = 45 \\ y_B = 2x_B - 5. \end{cases}$

Otrzymujemy dwa przypadki:

$15x_B - 60 = 45$ lub $15x_B - 60 = -45$.

Stąd $x_B = 7$ lub $x_B = 1$

Rozwiązaniami układu są dwie pary liczb $(7,9)$ oraz $(1,-3)$. Zauważamy, że takie same warunki, jak punkt *B*, spełnia punkt *D*. Wyciągamy wniosek, że otrzymane pary liczb to współrzędne wierzchołków *B* oraz *D*.

Uwaga: Zdający może rozwiązać tylko jeden przypadek, bo może uznać, że do policzenia długości boku rombu wystarczy wyznaczyć dowolny z dwóch sąsiednich dla *A* wierzchołów.

Obliczamy długość odcinka *AB*: $|AB| = \sqrt{(7+2)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy wyznaczy równanie prostej
$k: y = -\frac{1}{2}x + 5$

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy współrzędne punktu *S*: $S = (4,3)$.

Zdający otrzymuje .... 3 p.
gdy wykorzysta wartość pola rombu i zapisze równanie z dwiema niewiadomymi – współrzędnymi wierzchołka rombu, np.: $|6y_B + 3x_B - 30| = 45$.

Zdający otrzymuje .... 4 p.
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą – współrzędną punktu *B*, np.:
$|12x_B - 30 + 3x_B - 30| = 45$.

Zdający otrzymuje .... 5 p.
gdy obliczy współrzędne punktu *B*, np.: $B = (7,9)$.

Zdający otrzymuje .... 6 p.
gdy obliczy długość boku rombu: $3\sqrt{10}$.

Uwagi
1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
2. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i jedynym błędem nierachunkowym, który jednak nie ułatwia rozważania zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania, jest błąd, polegający na niepoprawnym:
   a) ustaleniu współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej,
   b) wyznaczeniu wyrazu wolnego w równaniu prostej prostopadłej,
   c) zastosowaniu niepoprawnego wzoru na pole rombu lub pole trójkąta,
   d) wyznaczeniu współrzędnych wektora,
   e) zastosowaniu wzoru na odległość punktu od prostej,
   f) zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa,
   g) zastosowaniu nieistniejącego wzoru „$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$”

   to zdający otrzymuje co najwyżej **4 punkty** za rozwiązanie całego zadania.

Zadanie 14. (0–4)
Rozwiąż równanie $4\sin 7x\cos 2x = 2\sin 9x - 1$ w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$.

Rozwiązanie I sposób

Przekształcamy równanie w sposób równoważny

$$4\sin 7x\cos 2x = 2\sin 9x - 1$$
$$2\sin 7x\cos 2x = \sin 9x - \frac{1}{2}$$
$$\sin 9x + \sin 5x = \sin 9x - \frac{1}{2}$$
$$\sin 5x = -\frac{1}{2}$$
$$5x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 5x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \text{ – liczba całkowita.}$$

Zatem w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$ mamy następujące rozwiązania tego równania:

$$x = \frac{7\pi}{30},\ x = \frac{19\pi}{30},\ x = \frac{11\pi}{30},\ x = \frac{23\pi}{30}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający zastosuje wzór $\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x\cos 2x$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej $\sin 5x = -\frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze wszystkie rozwiązanie równania $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$5x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ lub $5x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, k – liczba całkowita.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$: $x = \frac{7\pi}{30}$, $x = \frac{19\pi}{30}$, $x = \frac{11\pi}{30}$, $x = \frac{23\pi}{30}$.

Rozwiązanie II sposób

Przekształcamy równanie w sposób równoważny

$$4\sin 7x\cos 2x = 2\sin 9x - 1$$

$$2\sin 7x\cos 2x = \sin\left(7x+2x\right) - \frac{1}{2}$$

$$2\sin 7x\cos 2x = \sin 7x\cos 2x + \sin 2x\cos 7x - \frac{1}{2}$$

$$\sin 7x\cos 2x - \sin 2x\cos 7x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 5x = -\frac{1}{2}$$

$$5x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 5x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \text{, } k \text{ – liczba całkowita.}$$

Zatem w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ mamy następujące rozwiązania tego równania:

$$x = \frac{7\pi}{30}, \quad x = \frac{19\pi}{30}, \quad x = \frac{11\pi}{30}, \quad x = \frac{23\pi}{30}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze, równanie w postaci $\sin 7x\cos 2x - \sin 2x\cos 7x = -\frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej $\sin 5x = -\frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze wszystkie rozwiązanie równania $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

$5x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ lub $5x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$: $x = \frac{7\pi}{30}$, $x = \frac{19\pi}{30}$, $x = \frac{11\pi}{30}$, $x = \frac{23\pi}{30}$.

Uwaga

1. Jeżeli zdający przed uzyskaniem elementarnych równań trygonometrycznych popełnia jeden błąd, polegający na niepoprawnym zastosowaniu wzoru: na sumę sinusów lub na sinus sumy, to może otrzymać:

- co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile w rezultacie konsekwentnego postępowania otrzyma 4 rozwiązania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

albo

- co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie, o ile w rezultacie konsekwentnego postępowania otrzyma 2 serie rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

2. Jeżeli przy rozwiązywaniu równania $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ zdający zapisze serie dla kąta x, zamiast kąta $5x$, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli przy rozwiązywaniu równania $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ zdający zapisze serie dla kąta $5x$ i jedynym popełnionym przez niego błędem jest zapisanie niepoprawnej wielokrotności kąta π, to zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, ale tylko w przypadku, gdy wśród zapisanych rozwiązań co najmniej dwa znajdują się w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

4. Jeżeli przy rozwiązywaniu równania $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ zdający zapisze poprawnie tylko jedną serię dla kąta $5x$ i dalej konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

5. Jeżeli przy rozwiązywaniu równania $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ zdający nie zapisze serii dla kąta $5x$, ale zapisze niepoprawne serie dla kąta x, i na tym zakończy, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Zadanie 15. (0–7)

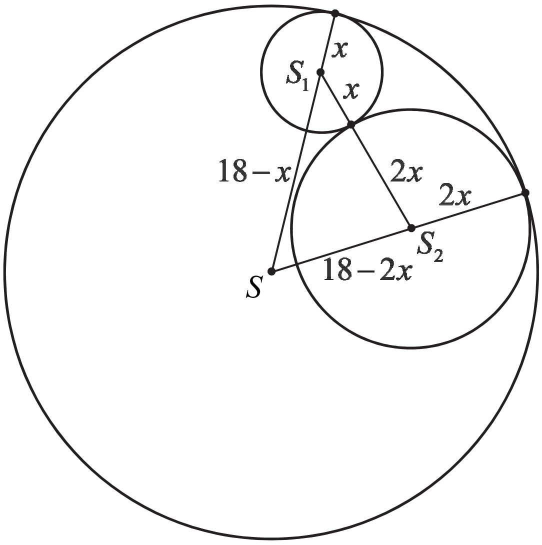
Dany jest okrąg o środku S i promieniu 18. Rozpatrujemy pary okręgów: jeden o środku S_1 i promieniu x oraz drugi o środku S_2 i promieniu $2x$, o których wiadomo, że spełniają jednocześnie następujące warunki:

- rozważane dwa okręgi są styczne zewnętrznie;
- obydwa rozważane okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o środku S i promieniu 18;
- punkty: S, S_1, S_2 nie leżą na jednej prostej.

Pole trójkąta o bokach a, b, c można obliczyć ze wzoru Herona $P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p – jest połową obwodu trójkąta.

Zapisz pole trójkąta SS_1S_2 jako funkcję zmiennej x. Wyznacz dziedzinę tej funkcji i oblicz długości boków tego z rozważanych trójkątów, którego pole jest największe. Oblicz to największe pole.

Rozwiązanie



Z warunku styczności okręgów otrzymujemy równania:

$|SS_1|=18-x$,

$|SS_2|=18-2x$,

$|S_1S_2|=2x+x=3x$.

Połowa obwodu trójkąta SS_1S_2 jest równa $p=\dfrac{18-2x+18-x+2x+x}{2}=18$.

Zatem pole tego trójkąta możemy zapisać jako funkcję zmiennej x, wzorem

$P=\sqrt{18\cdot 2x\cdot x\cdot(18-3x)}=\sqrt{108x^2(6-x)}$.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór takich wartości x, że $x\in(0,6)$. Wystarczy zbadać funkcję $f(x)=-x^3+6x^2$. Pochodna tej funkcji jest równa $f'(x)=-3x^2+12x$.

Obliczmy miejsca zerowe i zbadajmy znak pochodnej

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+12x=0$, stąd $x=0$ lub $x=4$.
Uwzględniając dziedzinę funkcji mamy:
$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(0,4)$
$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(4,6)$

Zatem funkcja *f* jest w przedziale $(0,4\rangle$ rosnąca, a w przedziale $\langle 4,6)$ malejąca.

Wynika stąd, że dla $x=4$ funkcja *f* ma maksimum lokalne, które jest jednocześnie jej największą wartością.
Długości boków trójkąta o największym polu wynoszą:
$|SS_1|=14$,
$|SS_2|=10$,
$|S_1S_2|=12$.
Oraz pole $P=\sqrt{108\cdot 16\cdot 2}=24\sqrt{6}$.

Schemat punktowania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

- **Pierwszy etap** składa się z trzech części:

a) zapisanie równań wynikających z warunku styczności okręgów, $|SS_1|=18-x$,
$|SS_2|=18-2x$, $|S_1S_2|=2x+x=3x$,
b) zapisanie pola trójkąta jako funkcji zmiennej *x*:
$P=\sqrt{108x^2(6-x)}$
c) określenie dziedziny funkcji *P*: $0<x<6$.

Za każdą z części tego etapu zdający może otrzymać po **1 punkcie**.
Uwaga do etapu I
Punkt za część trzecią (wyznaczenie dziedziny funkcji) zdający otrzymuje niezależnie od realizacji dwóch pierwszych części tego etapu, pod warunkiem, że rozważa wyznaczoną przez siebie funkcję jednej zmiennej.

- **Drugi etap** składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej funkcji *f*: $f'(x)=-3x^2+12x$,
b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej: $x=0$ lub $x=4$.
c) wyznaczenie przedziałów monotoniczności funkcji *f* i uzasadnienie, że dla $x=4$ funkcja *f* osiąga największą wartość.

Uwagi do etapu II
II. 1. Jeżeli zdający wyznaczy pochodną funkcji z błędem, ale wyznaczona pochodna ma postać funkcji kwadratowej, która ma dwa miejsca zerowe, w tym przynajmniej jedno w wyznaczonej dziedzinie funkcji, to zdający może otrzymać punkty za część 2. i 3. tego etapu, o ile konsekwentnie obliczy miejsca zerowe pochodnej lub uzasadni istnienie najmniejszej wartości rozważanej funkcji.
II. 2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak.

II. 3. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości *x*, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuacje, gdy zdający:

– opisuje, słownie lub graficznie (np. przy użyciu strzałek), monotoniczność funkcji *f*;

– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości x funkcja *f* ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość. Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

- **Trzeci etap.**

Obliczenie długości boków i pola trójkąta $|SS_1| = 14$, $|SS_2| = 10$, $|S_1S_2| = 12$, $P = 24\sqrt{6}$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.