

**PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY  
Z NOWĄ ERA 2017/2018**

**MATEMATYKA  
POZIOM ROZSZERZONY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ**

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

**Zadanie 1. (0–1)**

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odpowiedź
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R4.1. Funkcje. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y =  f(x) $ , $y = c \cdot f(x)$ , $y = f(cx)$ .	C

**Zadanie 2. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R11.4. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji.	A
--	--	---

**Zadanie 3. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R5.2. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$ , $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.	D
--	--	---

**Zadanie 4. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R5.3. Ciągi. Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.	B
--	---	---

**Zadanie 5. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	R8.5. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (x - b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności.	D
--	--	---

**Zadanie 6. (0–2)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający: P4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ oraz $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ ; R5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów.	554
-----------------------------------	--	-----

Uwaga. Ocenie podlega tylko odpowiedź zakodowana.

**Zadanie 7. (0–3)**

W czworokącie  $ABCD$  dane są:  $|AC| = 5$ ,  $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD| = 90^\circ$ ,  $\sin \sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

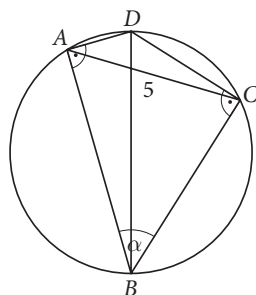
Oblicz długość przekątnej  $BD$  tego czworokąta.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	R7. Planimetria. Zdający: 1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu; 5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

**Przykładowe rozwiązania**

**Sposób I**

Wprowadzamy oznaczenia na rysunku.



Ponieważ  $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle DCB| = 180^\circ$ , więc na tym czworokącie można opisać okrąg, a przekątna  $BD$  czworokąta jest jednocześnie średnicą tego okręgu (kąt wpisany prosty jest oparty na średnicy).  
 Z twierdzenia sinusów w trójkącie  $ABC$  otrzymujemy:

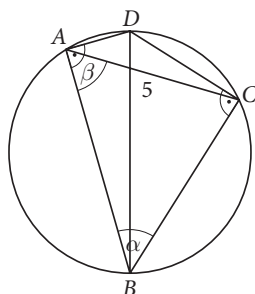
$$\frac{|AC|}{\sin \alpha} = |BD|,$$

$$\frac{5}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = |BD|.$$

Stąd  $|BD| = 3\sqrt{5}$ .

**Sposób II**

Wprowadzamy oznaczenia na rysunku.



$$|\sphericalangle DAC| = 90^\circ - \beta \text{ oraz } |\sphericalangle ADC| = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha.$$

Stosujemy twierdzenie sinusów w trójkątach  $ABC$  i  $ACD$ .

$$\frac{|BC|}{\sin \beta} = \frac{5}{\sin \alpha}$$

$$|BC| = 3\sqrt{5} \sin \beta$$

$$\frac{|CD|}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{5}{\sin(180^\circ - \alpha)}$$

$$|CD| = 3\sqrt{5} \cos \beta$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $BCD$  otrzymujemy:

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2,$$

$$|BD|^2 = (3\sqrt{5} \sin \beta)^2 + (3\sqrt{5} \cos \beta)^2,$$

$$|BD|^2 = 45(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta),$$

$$|BD| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje** ..... **1 pkt**

gdy sporządzi poprawny rysunek.

**Zdający otrzymuje** ..... **2 pkt**

gdy sporządzi rysunek i:

- zauważy, że na czworokącie można opisać okrąg, a przekątna  $BD$  jest średnicą tego okręgu albo

- uzależni długości odcinków  $BC$  i  $CD$  od funkcji trygonometrycznych kąta  $\beta$ :

$$|BC| = 3\sqrt{5} \sin \beta, |CD| = 3\sqrt{5} \cos \beta,$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... **3 pkt**

gdy obliczy długość przekątnej:  $|BD| = 3\sqrt{5}$ .

### Zadanie 8. (0–3)

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  prawdziwa jest nierówność:

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 \geq 0.$$

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	P2.1. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ . R3.7. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe.

### Przykładowe rozwiązania

#### Sposób I

Lewa strona nierówności jest wielomianem  $W(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$  o współczynnikach całkowitych. Szukamy pierwiastków tego wielomianu wśród dzielników liczby 9.

$$W(-1) = 1 + 4 - 2 - 12 + 9 = 0$$

Wykonujemy dzielenie wielomianu  $W$  przez dwumian  $x + 1$  i otrzymujemy  $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ .

Teraz szukamy pierwiastków wielomianu  $P(x)$  wśród dzielników liczby 9.

$$P(-1) = -1 - 5 - 3 + 9 = 0$$

Wykonujemy dzielenie wielomianu  $P$  przez dwumian  $x + 1$  i otrzymujemy  $Q(x) = x^2 - 6x + 9$ .

Korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia i zapisujemy  $Q(x) = (x - 3)^2$ .

A zatem  $W(x) = (x + 1)^2(x - 3)^2$ .

Dla każdej liczby  $x \in \mathbb{R}$  prawdziwe są nierówności  $(x + 1)^2 \geq 0$  i  $(x - 3)^2 \geq 0$ , a więc prawdziwa jest też nierówność  $(x + 1)^2(x - 3)^2 \geq 0$ , co należało udowodnić.

### Sposób II

Przekształcamy lewą stronę nierówności, stosując wzory skróconego mnożenia i metodę grupowania wyrazów.

$$\begin{aligned}x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 &= \\&= x^4 - 2x^2 + 1 - 4x^3 + 16x - 4x + 8 = \\&= (x^2 - 1)^2 - 4x(x - 2)(x + 2) - 4(x - 2) = \\&= (x - 1)^2(x + 1)^2 - 4(x - 2)(x^2 + 2x + 1) = \\&= (x + 1)^2(x^2 - 2x + 1 - 4x + 8) = \\&= (x + 1)^2(x^2 - 6x + 9) = \\&= (x + 1)^2(x - 3)^2\end{aligned}$$

Dla każdej liczby  $x \in \mathbb{R}$  prawdziwa jest nierówność  $(x + 1)^2(x - 3)^2 \geq 0$ , bo kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny, czego należało dowieść.

### Sposób III

Rozważmy funkcję  $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$ .

Wielomian jest funkcją ciągłą w zbiorze liczb rzeczywistych,

$$\text{a } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{12}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right) = \infty,$$

więc wystarczy wykazać, że najmniejsza wartość wielomianu  $f$  jest dodatnia.

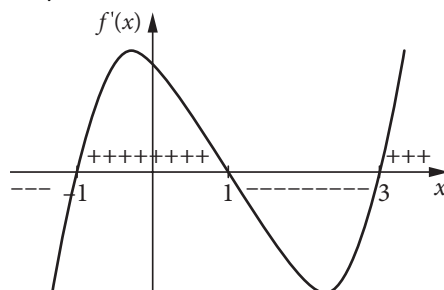
Wyznaczamy funkcję pochodną:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12,$$

i obliczamy jej miejsca zerowe.

$$\begin{aligned}f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 0 \\4x^2(x - 3) - 4(x - 3) &= 0 \\4(x - 1)(x + 1)(x - 3) &= 0 \\x = 1 \text{ lub } x = -1 \text{ lub } x = 3\end{aligned}$$

Szkicujemy wykres znaku pochodnej.



Funkcja  $f$  jest malejąca w każdym z przedziałów  $(-\infty, -1)$  oraz  $\langle 1, 3$  i rosnąca w każdym z przedziałów  $\langle -1, 1$  oraz  $\langle 3, \infty$ , więc wartość najmniejszą przyjmuje w jednym z minimów lokalnych, czyli dla  $x = -1$  lub  $x = 3$ .

$$f(-1) = 1 + 4 - 2 - 12 + 9 = 0$$

$$f(3) = 81 - 4 \cdot 27 - 18 + 36 + 9 = 0$$

Wartość najmniejsza funkcji  $f$  jest równa 0, zatem  $f(x) \geq 0$  dla  $x \in \mathbb{R}$ , co kończy dowód.

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 pkt**

- gdy znajdzie przynajmniej 2 pierwiastki wielomianu stopnia czwartego i zapisze ten wielomian w postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego

albo

- gdy grupę składników:  $x^4 - 2x^2 + 1$  zapisze w postaci:  $(x - 1)^2(x + 1)^2$  lub grupę składników:  $-4x^3 + 12x + 8$  rozłoży na czynniki, np. do postaci:  $-4(x - 2)(x^2 + 2x + 1)$

albo

- gdy wyznaczy funkcję pochodną:  $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$  i obliczy jej miejsca zerowe:  $x \in \{-1, 1, 3\}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... **2 pkt**

- gdy zapisze nierówność w postaci  $(x + 1)^2(x - 3)^2 \geq 0$

albo

- gdy zbada znak pochodnej i ustali argumenty, dla których wielomian może osiągnąć wartość najmniejszą

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... **3 pkt**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Zadanie 9. (0–3)**

Ciąg  $(a_n)$  jest określony wzorem:

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{\log_2(n+1)} + \frac{1}{\log_3(n+1)} + \frac{1}{\log_4(n+1)} + \dots + \log_{2018}(n+1)}$$

dla  $n \geq 1$ . Uzasadnij, że wzór ciągu  $(a_n)$  można zapisać w postaci:  $a_n = \log_{2018!}(n+1)$  i oblicz wartość wyrażenia:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2017}$ .

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający: P6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym. R2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu. P5.1.Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.

**Przykładowe rozwiązanie**

Ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu wynika, że  $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ . Zatem wzór ciągu:

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{\log_2(n+1)} + \frac{1}{\log_3(n+1)} + \dots + \frac{1}{\log_{2018}(n+1)}}$$

można zapisać w postaci:

$$a_n = \frac{1}{\log_{n+1} 2 + \log_{n+1} 3 + \dots + \log_{n+1} 2018}$$

Po zastosowaniu wzoru na sumę logarytmów otrzymujemy:

$$a_n = \frac{1}{\log_{n+1}(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2018)},$$

$$a_n = \frac{1}{\log_{n+1} 2018!},$$

$$a_n = \log_{2018!}(n+1).$$

Teraz można obliczyć wartość sumy.

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2017} &= \log_{2018!} 2 + \log_{2018!} 3 + \log_{2018!} 4 + \dots + \log_{2018!} 2018 = \\ &= \log_{2018!}(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2018) = \log_{2018!} 2018! = 1 \end{aligned}$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 1 pkt

Zdający zapisze wzór ciągu w postaci:  $a_n = \frac{1}{\log_{n+1} 2 + \log_{n+1} 3 + \dots + \log_{n+1} 2018}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 pkt

Zdający zapisze wzór ciągu w postaci:  $a_n = \log_{2018!}(n+1)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne** ..... 3 pkt

Zdający obliczy wartość wyrażenia  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2017} = 1$ .

### Zadanie 10. (0–5)

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste  $x$  spełniające równanie:  $2 \sin^2 x - \cos 2x = 1$ . Oblicz sumę wszystkich rozwiązań tego równania należących do przedziału  $\langle 0, 32\pi \rangle$ .

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	R6.6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne. P5.3. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

### Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów: pierwszy to ustalenie rozwiązań równania trygonometrycznego, a drugi – wyznaczenie sumy wszystkich rozwiązań równania należących do przedziału  $\langle 0, 32\pi \rangle$ .

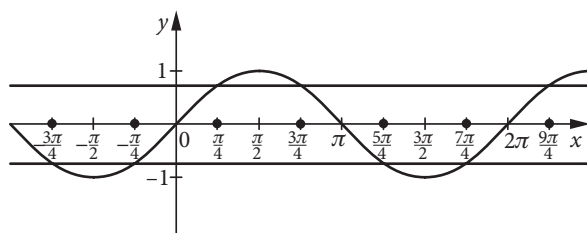
### Realizacja pierwszego etapu

#### Sposób I

Korzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie.

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x - \cos 2x &= 1 \\ 2 \sin^2 x - (1 - 2 \sin^2 x) &= 1 \\ 4 \sin^2 x &= 2 \\ \sin^2 x &= \frac{2}{4} \\ \sin x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Szkicujemy wykres funkcji sinus, by wyznaczyć wszystkie rozwiązania ostatniej alternatywy.



Zatem wszystkie rozwiązania równania możemy zapisać w postaci:  $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą.

### Sposób II

Korzystamy ze wzoru na cosinus podwójonego kąta i przekształcamy równanie.

$$2 \sin^2 x - \cos 2x = 1$$

$$-\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$-\cos 2x = \cos 2x$$

$$2 \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Stąd  $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą.

### Realizacja drugiego etapu

Spośród rozwiązań równania należących do przedziału  $\langle 0, 32\pi \rangle$  wybieramy najmniejsze – jest to  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  (dla  $k = 0$ ). Ponieważ każde dwa sąsiednie rozwiązania równania różnią się o  $\frac{\pi}{2}$ , więc dla kolejnych liczb naturalnych  $k$  tworzą one rosnący ciąg arytmetyczny, w którym pierwszy wyraz  $a_1 = \frac{\pi}{4}$ , a różnica  $r = \frac{\pi}{2}$ . Wzór ogólny tego ciągu ma postać:

$$a_n = \frac{\pi}{4} + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4}.$$

Wyznaczamy liczbę wyrazów tego ciągu znajdujących się w przedziale  $\langle 0, 32\pi \rangle$

$$a_n \leq 32\pi$$

$$\frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4} \leq 32\pi$$

Po przekształceniu nierówności otrzymujemy warunek:

$$n \leq 64,5,$$

więc  $n \in \{1, 2, 3, \dots, 64\}$ .

Zatem 64 początkowe wyrazy ciągu  $(a_n)$  należą do przedziału  $\langle 0, 32\pi \rangle$ . Obliczamy ich sumę.

$$S_{64} = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{4} + 63 \cdot \frac{\pi}{2}}{2} \cdot 64 = 1024\pi$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** .....

1 pkt

Zdający przekształci równanie do postaci:

- $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  lub  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

albo

- $\cos 2x = 0$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 3 pkt

Zdający poda rozwiązania równania, np. w postaci:  $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 4 pkt

Zdający obliczy liczbę wyrazów ciągu arytmetycznego należących do przedziału  $\langle 0, 32\pi \rangle$ :  $n = 64$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 pkt

Zdający obliczy sumę wszystkich rozwiązań równania trygonometrycznego należących do przedziału  $\langle 0, 32\pi \rangle$ :  $S_{64} = 1024\pi$ .

### Uwagi

1. Jeżeli zdający w wyniku przekształceń zapisze tylko jedno z równań  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  albo  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , poda poprawne rozwiązania tego równania i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt**.

2. Jeżeli zdający poda poprawnie rozwiązania tylko jednego z równań:  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  lub  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  albo zapisze równość  $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  i stąd błędnie wyznaczy rozwiązania równania, to otrzymuje **2 punkty**.

3. Jeżeli zdający rozwiąże tylko jedno z równań  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  albo z każdego z wymienionych równań poda tylko jedną serię wyników i konsekwentnie – stosując własności ciągu arytmetycznego – obliczy sumę wszystkich rozwiązań należących do przedziału  $\langle 0, 32\pi \rangle$ , to otrzymuje **3 punkty**.

### Zadanie 11. (0–5)

Urna zawiera 5 kul ponumerowanych od 1 do 5. Losowano z niej osiem razy ze zwracaniem po jednej kuli i zapisywano wylosowane numery kolejno, od strony lewej do prawej. Zapisane cyfry utworzyły liczbę ośmiocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w doświadczeniu otrzymamy liczbę parzystą, w której zapisie dziesiętnym znajdują się dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka. Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	R10.1. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

### Przykładowe rozwiązania

Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, jest to zatem model klasyczny. Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. W pierwszym wyznaczmy liczbę wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego, czyli  $|\Omega|$ . W drugim etapie obliczymy, na ile sposobów w doświadczeniu losowym można otrzymać liczbę parzystą, w której zapisie dziesiętnym znajdują się dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka, czyli  $|A|$ . W trzecim etapie wyznaczmy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$ .

### Realizacja pierwszego etapu

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie ośmiowyrazowe ciągi o wyrazach ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , czyli wariacje z powtórzeniami. Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego jest zatem równa:

$$|\Omega| = 5^8.$$

### Realizacja drugiego etapu

Niech  $A$  oznacza zdarzenie, że utworzymy ośmiocyfrową liczbę parzystą, w której zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka.

#### Sposób I

Najpierw obliczymy, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami, przy czym cyfry wybieramy ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Należy uwzględnić następujące warunki:

- liczba ma być parzysta, zatem cyfrę jedności wybieramy spośród  $\{2, 4\}$ ,
- mają być dokładnie trzy cyfry 3, zatem miejsca dla nich wybieramy na  $\binom{7}{3}$  sposobów (bo ostatnie miejsce jest już zajęte),
- pozostają cztery wolne miejsca, na które możemy wstawić po jednej cyfrze ze zbioru  $\{1, 2, 4, 5\}$ .

Korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy:

$$2 \cdot \binom{7}{3} \cdot 4^4 = 2 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 256 = 17\,920$$

*wybór cyfry      wybór miejsc      wybór*  
*jedności      dla trzech 3      pozostałych cyfr*

Następnie obliczymy, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami i bez cyfry 5.

$$2 \cdot \binom{7}{3} \cdot 3^4 = 2 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 81 = 5670$$

*wybór cyfry      wybór miejsc      wybór*  
*jedności      dla trzech 3      pozostałych cyfr*  
*(bez 5 i 3)*

Wszystkich ośmiocyfrowych liczb parzystych, w których zapisie dziesiętnym znajdują się dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka, jest:

$$|A| = 17\,920 - 5670 = 12\,250.$$

#### Sposób II

Zbiór wyników sprzyjających zdarzeniu  $A$  można podzielić na zdarzenia wykluczające się, uwzględniając liczbę piątek w zapisie dziesiętnym liczby ośmiocyfrowej:

1. z dokładnie jedną cyfrą 5:  $2 \cdot \binom{7}{3} \cdot 4 \cdot 3^3 = 7560$

2. z dokładnie dwiema cyframi 5:  $2 \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 3^2 = 3780$

3. z dokładnie trzema cyframi 5:  $2 \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3} \cdot 3 = 840$

4. z dokładnie czterema cyframi 5:  $2 \cdot \binom{7}{3} = 70$

Razem:  $7560 + 3780 + 840 + 70 = 12\,250$ .

Zatem  $|A| = 12\,250$ .

### Realizacja trzeciego etapu

Jest to model klasyczny, więc:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12250}{5^8} = \frac{98}{5^5} = \frac{98}{3125}.$$

### Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Etap pierwszy** to ustalenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego:  $|\Omega| = 5^8$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Etap drugi** to obliczenie, na ile sposobów w doświadczeniu losowym można otrzymać liczbę parzystą, w której zapisie dziesiętnym znajdują się dokładnie trzy trójki i co najmniej jedna piątka.

Za tę część rozwiązania zdający może otrzymać **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

**2 punkty** zdający otrzymuje wtedy, gdy:

- obliczy, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami, o cyfrach ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ : 17 920

albo

- obliczy, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami i bez cyfry 5: 5670

albo

- poprawnie rozważy **przynajmniej jeden** przypadek uwzględniający liczbę piątek w zapisie dziesiętnym liczb ośmiocyfrowych parzystych z dokładnie trzema trójkami, o cyfrach ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ : z 1 piątką – 7560, z 2 piątkami – 3780, z 3 piątkami – 840, z 4 piątkami – 70.

**3 punkty** zdający otrzymuje wtedy, gdy obliczy liczbę wszystkich wyników sprzyjających zdarzeniu  $A$ :  $|A| = 12\,250$ .

**Etap trzeci** to obliczenie prawdopodobieństwa i zapisanie wyniku w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego:  $P(A) = \frac{12250}{5^8} = \frac{98}{3125}$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

#### Uwaga

Za ostatni etap **1 punkt** może zostać przyznany również wtedy, gdy zdający popełni błąd rachunkowy w pierwszym lub drugim etapie i konsekwentnie obliczy  $P(A)$ , pod warunkiem, że otrzyma wartość z przedziału  $(0, 1)$ .

Łącznie za poprawne rozwiązanie całego zadania (podanie odpowiedzi) zdający otrzymuje **5 punktów**.

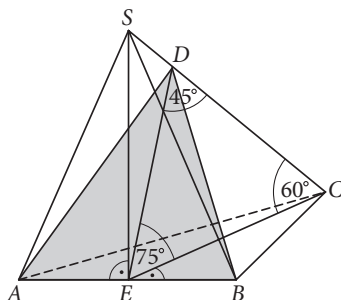
#### Zadanie 12. (0–5)

W ostrosłupie  $ABCS$  podstawa  $ABC$  jest trójkątem równoramiennym o ramionach  $AC$  i  $BC$  długości 4 i kącie między nimi  $30^\circ$ . Punkt  $E$  – środek krawędzi  $AB$  – jest spodkiem wysokości tego ostrosłupa, a krawędź boczna  $CS$  tworzy z podstawą kąt  $60^\circ$ . Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź  $AB$  i mającą z przeciwległą krawędzią boczną  $CS$  wspólny punkt  $D$  (jak na rysunku). Oblicz pole otrzymanego przekroju, wiedząc, że tworzy on z podstawą ostrosłupa kąt  $75^\circ$ . Podaj dokładny wynik obliczeń.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający: P2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów; P4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami; R2) określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną; R7.5. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

### Przykładowe rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia na rysunku. Zauważmy, że w trójkącie  $EDC$  miara kąta  $EDC$  jest równa  $45^\circ$ .



Obliczamy długość krawędzi  $AB$ , stosując twierdzenie cosinusów w trójkącie  $ABC$ .

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= 2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4^2 \cdot \cos 30^\circ \\ |AB|^2 &= 16(2 - \sqrt{3}) \\ |AB| &= 4\sqrt{2 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $EBC$  i wyznaczamy wysokość  $EC$ .

$$\begin{aligned} |EC|^2 &= 4^2 - (2\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 \\ |EC|^2 &= 16 - 8 + 4\sqrt{3} \\ |EC|^2 &= 4(2 + \sqrt{3}) \\ |EC| &= 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

Odcinek  $ED$  jest wysokością przekroju  $ABD$ . Jego długość obliczymy, stosując twierdzenie sinusów w trójkącie  $ECD$ .

$$\begin{aligned} \frac{|ED|}{\sin 60^\circ} &= \frac{|EC|}{\sin 45^\circ} \\ |ED| &= \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ |ED| &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{6} \end{aligned}$$

Pole przekroju  $ABD$  jest zatem równe:

$$\begin{aligned} P_{\Delta ABD} &= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{6}, \\ P_{\Delta ABD} &= 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{4 - 3}, \\ P_{\Delta ABD} &= 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zdający obliczy miarę kąta  $EDC$  równą  $45^\circ$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zdający obliczy długość krawędzi  $|AB| = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$  albo wysokość podstawy ostrosłupa:

$$|EC| = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zdający

• obliczy długość krawędzi  $|AB| = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$  i wysokość podstawy ostrosłupa:  $|EC| = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  albo

• obliczy wysokość podstawy ostrosłupa:  $|EC| = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  i wysokość przekroju  $ABD$ :  
 $|ED| = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{6}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne** ..... 4 pkt

Zdający obliczy długości odcinków:  $AB$  (krawędź podstawy ostrosłupa),  $EC$  (wysokość podstawy ostrosłupa) i  $ED$  (wysokość trójkąta  $ABD$ , będącego przekrojem ostrosłupa)

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 pkt

Zdający obliczy pole przekroju ostrosłupa:  $P_{\Delta ABD} = 2\sqrt{6}$ .

### Uwagi

- Jeżeli zdający rozpatruje inną bryłę, np. ostrosłup prawidłowy trójkątny albo ostrosłup, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy lub kąt nachylenia płaszczyzny przekroju do podstawy, ale przy korzystaniu z własności figur, w których te kąty nie występują, wykazuje się innymi umiejętnościami matematycznymi, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
- Jeżeli zdający odczyta przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych z tablic i wykona obliczenia na przybliżeniach, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.

### Zadanie 13. (0–6)

Funkcja kwadratowa  $f(x) = (2m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m - 1$  ma dwa różne miejsca zerowe  $x_1, x_2$ . Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których odległość między miejscami zerowymi wynosi nie więcej niż 4.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	R1.1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną. R3. Równania i nierówności. Zdający: 2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem; 8) rozwiązuje proste nierówności wymierne.

### Przykładowe rozwiązania

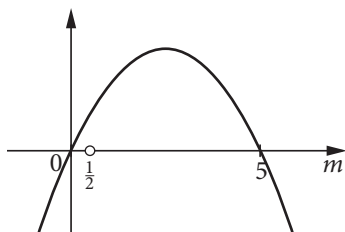
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. W pierwszym wyznaczymy wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa miejsca zerowe. W drugim etapie wyznaczymy te wartości parametru  $m$ , dla których odległość między dwoma miejscami zerowymi funkcji jest równa co najwyżej 4. W trzecim etapie wyznaczymy wszystkie wartości parametru  $m$  spełniające warunki zadania.

### Realizacja pierwszego etapu

Funkcja  $f$  jest trójmianem kwadratowym, gdy  $2m - 1 \neq 0$ , czyli  $m \neq \frac{1}{2}$ .

Funkcja  $f$  ma dwa miejsca zerowe, gdy wyróżnik trójmianu kwadratowego jest dodatni.

$$\begin{aligned}4(m+1)^2 - 4(2m-1)(m-1) &> 0 \quad / : 4 \\ m^2 + 2m + 1 - 2m^2 + 2m + m - 1 &> 0 \\ -m^2 + 5m &> 0 \\ -m(m-5) &> 0\end{aligned}$$



Zatem dla  $m \in (0, 5) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  funkcja  $f$  jest trójmianem kwadratowym i ma dwa różne miejsca zerowe.

### Realizacja drugiego etapu

Z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej wynika, że odległość między dwoma miejscami zerowymi funkcji jest równa wartości bezwzględnej ich różnicy. Należy zatem rozważyć warunek  $|x_1 - x_2| \leq 4$ .

#### Sposób I

Korzystamy ze wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego.

$$\begin{aligned}\left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| &\leq 4 \\ \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| &\leq 4\end{aligned}$$

Obie strony nierówności są dodatnie, więc podnosząc obie strony nierówności do kwadratu, otrzymujemy nierówność równoważną:

$$\frac{\Delta}{a^2} \leq 16,$$

$$\frac{4(-m^2 + 5m)}{(2m-1)^2} \leq 16, \text{ gdzie } m \neq \frac{1}{2}.$$

Wyrażenie  $\frac{(2m-1)^2}{4}$  jest dodatnie, więc mnożąc obie strony ostatniej nierówności przez  $\frac{(2m-1)^2}{4}$ , otrzymujemy nierówność równoważną.

$$\begin{aligned}-m^2 + 5m &\leq 4(2m-1)^2 \\ 4(4m^2 - 4m + 1) + m^2 - 5m &\geq 0 \\ 17m^2 - 21m + 4 &\geq 0 \\ m &\in \left( -\infty, \frac{4}{17} \right) \cup \langle 1, \infty \rangle\end{aligned}$$

#### Sposób II

Obie strony nierówności  $|x_1 - x_2| \leq 4$  są dodatnie, więc podnosząc obie strony nierówności do kwadratu, otrzymujemy nierówność równoważną.

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 &\leq 16 \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 &\leq 16\end{aligned}$$

Stosujemy wzory Viète'a.

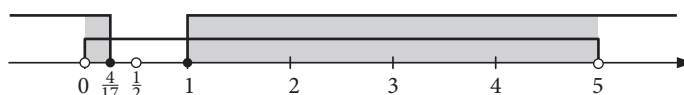
$$\left(\frac{2(m+1)}{2m-1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{m-1}{2m-1} \leq 16, \text{ gdzie } m \neq \frac{1}{2}$$
$$\frac{4(m^2 + 2m + 1)}{(2m-1)^2} - \frac{4(m-1)(2m-1)}{(2m-1)^2} - \frac{16(2m-1)^2}{(2m-1)^2} \leq 0 \quad / \cdot \frac{(2m-1)^2}{4}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy nierówność.

$$17m^2 - 21m + 4 \geq 0$$
$$m \in \left(-\infty, \frac{4}{17}\right) \cup \langle 1, \infty \rangle$$

### Realizacja trzeciego etapu

Wyznaczamy iloczyn zbiorów otrzymanych w etapach pierwszym i drugim.



Zatem odległość między miejscami zerowymi funkcji kwadratowej  $f$  jest równa co najwyżej 4, gdy  $m \in \left(0, \frac{4}{17}\right) \cup \langle 1, 5 \rangle$ .

### Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Etap pierwszy** to ustalenie, dla jakich wartości parametru  $m$  funkcja  $f$  jest trójmianem kwadratowym i ma dwa miejsca zerowe:  $a \neq 0$  i  $\Delta > 0$  dla  $m \in (0, 5) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.

#### Uwaga

Jeżeli zdający nie rozważy warunku  $a \neq 0$  lub zapisze  $\Delta \geq 0$ , to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

**Etap drugi** to rozwiązywanie nierówności  $|x_1 - x_2| \leq 4$ . Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

**1 punkt** zdający otrzymuje za zapisanie nierówności w postaci  $\frac{\Delta}{a^2} \leq 16$  lub  $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 16$ .

**2 punkty** zdający otrzymuje za zapisanie nierówności z jedną niewiadomą  $m$ , np. w postaci  $\frac{4(-m^2 + 5m)}{(2m-1)^2} \leq 16$  lub  $\left(\frac{2(m+1)}{2m-1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{m-1}{2m-1} \leq 16$ .

**3 punkty** zdający otrzymuje za rozwiązanie nierówności:  $m \in \left(-\infty, \frac{4}{17}\right) \cup \langle 1, \infty \rangle$ .

**Etap trzeci** to wyznaczenie części wspólnej rozwiązań warunków z etapów pierwszego i drugiego:

$$m \in \left(0, \frac{4}{17}\right) \cup \langle 1, 5 \rangle.$$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

#### Uwaga

Za ostatni etap **1 punkt** może zostać przyznany tylko wtedy, gdy zdający poprawnie wykona przynajmniej jeden z etapów (pierwszy lub drugi), a ponadto w obu etapach otrzyma zbiory niepuste i różne od zbioru liczb rzeczywistych oraz konsekwentnie wyznaczy iloczyn tych zbiorów.

Łącznie za poprawne rozwiązanie całego zadania (podanie odpowiedzi) zdający otrzymuje **6 punktów**.

**Zadanie 14. (0–6)**

Wyznacz równania wszystkich wspólnych stycznych do paraboli o równaniu  $y = \frac{1}{2}x^2$  i do okręgu o równaniu  $x^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 2$ .

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	P7.2. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu. R8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający: 4) oblicza odległość punktu od prostej; 5) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ . R11.3. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej.

**Przykładowe rozwiązania**

Punkt  $P = \left(p, \frac{1}{2}p^2\right)$  jest dowolnym punktem należącym do paraboli o równaniu  $y = \frac{1}{2}x^2$ . Zaczynamy od wyznaczenia równania stycznej do tej paraboli w punkcie  $P$  w zależności od wartości parametru  $p \in R$ . W tym celu obliczamy pochodną funkcji  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ :

$$f'(x) = x.$$

Współczynnik kierunkowy stycznej jest równy wartości pierwszej pochodnej funkcji w punkcie styczności. Stąd  $a = f'(p) = p$ . Styczna do paraboli w punkcie  $P$  wyraża się zatem równaniem postaci:

$$y - \frac{1}{2}p^2 = p(x - p),$$

$$y = px - \frac{1}{2}p^2.$$

Następnie tak dobieramy wartość parametru  $p$ , aby prosta o równaniu  $y = px - \frac{1}{2}p^2$  była styczna do okręgu o środku  $S = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$  i promieniu  $r = \sqrt{2}$ .

**Sposób I**

Prosta jest styczna do okręgu wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest równa promieniowi okręgu.

Przekształcamy równanie prostej:  $y = px - \frac{1}{2}p^2$  do postaci ogólnej:

$$px - y - \frac{1}{2}p^2 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$2px - 2y - p^2 = 0$$

i układamy równanie, stosując wzór na odległość punktu od prostej.

$$\frac{|5 - p^2|}{\sqrt{(2p)^2 + (-2)^2}} = \sqrt{2}$$

$$|5 - p^2| = \sqrt{8p^2 + 8}$$

Obie strony równania są nieujemne, więc podnosząc je do kwadratu, otrzymujemy równanie równoważne.

$$25 - 10p^2 + p^4 = 8p^2 + 8$$

$$p^4 - 18p^2 + 17 = 0$$

Podstawiamy  $p^2 = t$ , gdzie  $t \geq 0$ , i otrzymujemy równanie:  $t^2 - 18t + 17 = 0$ , które spełniają dwie liczby:  $t_1 = 1, t_2 = 17$ . Więc:

$$p^2 = 1 \text{ lub } p^2 = 17,$$

$$p \in \{-1, 1, -\sqrt{17}, \sqrt{17}\}.$$

Parabola i okrąg mają zatem cztery wspólne styczne. Są to proste o równaniach:

$$y = -x - \frac{1}{2}, y = x - \frac{1}{2}, y = -\sqrt{17}x - \frac{17}{2}, y = \sqrt{17}x - \frac{17}{2}.$$

### Sposób II

Prosta jest styczna do okręgu wtedy, gdy ma z nim dokładnie jeden punkt wspólny. Należy tak dobrać

parametr  $p$ , by układ równań: 
$$\begin{cases} y = px - \frac{1}{2}p^2 \\ x^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 2 \end{cases}$$
 miał dokładnie jedno rozwiązanie.

Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{aligned} x^2 + \left(px - \frac{1}{2}p^2 + \frac{5}{2}\right)^2 &= 2 \\ x^2 + p^2x^2 + \frac{1}{4}p^4 + \frac{25}{4} - p^3x + 5px - \frac{5}{2}p^2 - 2 &= 0 \\ (1 + p^2)x^2 + (5p - p^3)x + \frac{1}{4}p^4 - \frac{5}{2}p^2 + \frac{17}{4} &= 0 \end{aligned}$$

Układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie (tzn. prosta ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem) wtedy, gdy wyróżnik otrzymanego równania kwadratowego jest równy zero.

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ (5p - p^3)^2 - 4(1 + p^2)\left(\frac{1}{4}p^4 - \frac{5}{2}p^2 + \frac{17}{4}\right) &= 0 \\ 25p^2 - 10p^4 + p^6 - (1 + p^2)(p^4 - 10p^2 + 17) &= 0 \end{aligned}$$

Po wykonaniu mnożenia i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równanie:

$$p^4 - 18p^2 + 17 = 0, \text{ które spełniają liczby: } p \in \{-1, 1, -\sqrt{17}, \sqrt{17}\}.$$

Parabola i okrąg mają zatem cztery wspólne styczne. Są to proste o równaniach:

$$y = -x - \frac{1}{2}, y = x - \frac{1}{2}, y = -\sqrt{17}x - \frac{17}{2}, y = \sqrt{17}x - \frac{17}{2}.$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** .....

1 pkt

Zdający zapisze współrzędne punktu leżącego na paraboli w zależności od jednej zmiennej, np.  $P = \left(p, \frac{1}{2}p^2\right)$  oraz wyznaczy pochodną funkcji  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ :  $f'(x) = x$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** .....

2 pkt

Zdający wyznaczy funkcję pochodną:  $f'(x) = x$  i poda współczynnik kierunkowy stycznej do paraboli w zależności od pierwszej współrzędnej punktu styczności, np.  $a = f'(p) = p$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .....

3 pkt

Zdający wyznaczy równanie stycznej do paraboli w zależności od pierwszej współrzędnej punktu styczności:  $y = px - \frac{1}{2}p^2$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** .....

4 pkt

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą wynikające z warunku styczności prostej do okręgu,

$$\text{np. } \frac{|5 - p^2|}{\sqrt{(2p)^2 + (-2)^2}} = \sqrt{2} \text{ lub } (5p - p^3)^2 - 4(1 + p^2)\left(\frac{1}{4}p^4 - \frac{5}{2}p^2 + \frac{17}{4}\right) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne** ..... 5 pkt

Zdający poda rozwiązania równania:  $p \in \{-1, 1, -\sqrt{17}, \sqrt{17}\}$  i poprzestanie na tym lub rozwiąże zadanie do końca z błędem rachunkowym (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania), ale otrzyma cztery styczne.

**Rozwiązanie pełne** ..... 6 pkt

Zdający poda równania wspólnych stycznych parabol i okręgu:  $y = -x - \frac{1}{2}$ ,  $y = x - \frac{1}{2}$ ,  
 $y = -\sqrt{17}x - \frac{17}{2}$ ,  $y = \sqrt{17}x - \frac{17}{2}$ .

**Zadanie 15. (0–7)**

Prosta o równaniu:  $y = a^2x + 3a$  przecina hiperbolę o równaniu:  $y = \frac{4}{x}$  w dwóch punktach,  $A$  i  $B$ . Wyraż długość odcinka  $AB$  w zależności od wartości parametru  $a < 0$ . Wyznacz równanie prostej, która przecina opisaną hiperbolę tak, że długość odcinka  $AB$  jest najmniejsza.

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	R11.6. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych. R3.3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje układy równań prowadzące do równań kwadratowych. P8.6. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów.

**Przykładowe rozwiązanie**

Wyznaczamy współrzędne punktów wspólnych prostej i hiperboli. W tym celu rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} y = a^2x + 3a \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}, \text{ gdzie } x \neq 0 \text{ i } a < 0$$

$$a^2x + 3a = \frac{4}{x}$$

$$a^2x^2 + 3ax - 4 = 0$$

$$\Delta = (3a)^2 - 4 \cdot a^2 \cdot (-4) = 25a^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 5|a| = -5a, \text{ bo } a < 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a} \\ y_1 = 4a \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\frac{4}{a} \\ y_2 = -a \end{cases}$$

Prosta i hiperbola mają zatem dwa punkty wspólne:  $A = \left(\frac{1}{a}, 4a\right)$ ,  $B = \left(-\frac{4}{a}, -a\right)$ .  
 Obliczamy długość odcinka  $AB$ .

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{a}\right)^2 + (4a + a)^2}$$

$$|AB| = 5 \cdot \sqrt{\frac{1 + a^4}{a^2}}, \text{ gdzie } a \in (-\infty, 0)$$

Rozważmy funkcję pomocniczą określoną wzorem  $f(a) = \frac{1 + a^4}{a^2}$ ,  $D_f = (-\infty, 0)$ .

Funkcja  $g(x) = \sqrt{x}$  jest rosnąca w przedziale  $\langle 0, \infty \rangle$  z czego wynika, że funkcje  $|AB|$  i  $f$  mają takie same przedziały monotoniczności, a ekstrema lokalne (tego samego rodzaju) przyjmują dla tych samych argumentów.

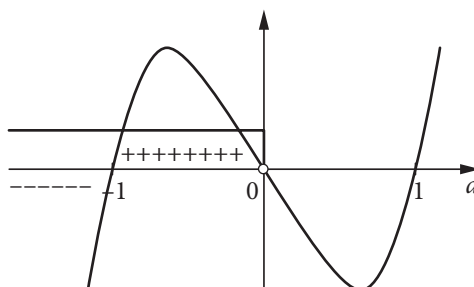
Wyznaczamy pochodną funkcji  $f$ .

$$f'(a) = \frac{4a^5 - 2a(1 + a^4)}{a^4}$$
$$f'(a) = \frac{2a^5 - 2a}{a^4}, \quad D_{f'} = D_f = (-\infty, 0)$$

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej.

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a^5 - 2a = 0$$
$$2a(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) = 0$$
$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1$$
$$a_1, a_2 \notin D_f$$

Badamy znak pochodnej w dziedzinie. Ponieważ mianownik pochodnej jest dodatni, wystarczy zbadać znak licznika.



$f'(a) < 0$  dla  $a \in (-\infty, -1)$  oraz  $f'(a) > 0$  dla  $a \in (-1, 0)$ .

Zatem funkcja  $f$  jest malejąca w przedziale  $(-\infty, -1)$  i rosnąca w przedziale  $(-1, 0)$ . Wynika stąd, że dla  $a = -1$  funkcja  $f$  osiąga wartość najmniejszą, więc i długość odcinka  $AB$  jest najmniejsza, gdy  $a = -1$ .

Szukana prosta jest więc określona równaniem:  $y = x - 3$ .

### Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Etap pierwszy to:**

a) zapisanie układu równań:  $\begin{cases} y = a^2x + 3a \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}$  oraz wyprowadzenie z niego równania z jedną

niewiadomą i parametrem  $a$ , np.  $a^2x + 3a = \frac{4}{x}$ ;

b) wyznaczenie współrzędnych punktów wspólnych prostej i hiperboli w zależności od wartości parametru  $a < 0$ , np.  $A = \left(\frac{1}{a}, 4a\right), B = \left(-\frac{4}{a}, -a\right)$ ;

c) zapisanie długości odcinka  $AB$  jako funkcji zmiennej  $a$ :  $|AB| = 5 \cdot \sqrt{\frac{1 + a^4}{a^2}}$ , gdzie  $a \in (-\infty, 0)$ .

Zdający otrzymuje po **1 punkt** za realizację każdej z części tego etapu.

**Etap drugi to:**

a) wyznaczenie pochodnej funkcji wymiernej  $f(a) = \frac{1 + a^4}{a^2}$ :  $f'(a) = \frac{2a^5 - 2a}{a^4}$ ;

b) obliczenie miejsc zerowych pochodnej:  $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -1$ ;

c) uzasadnienie, że funkcja  $f$  osiąga wartość najmniejszą dla  $a = -1$ .

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Uwaga

W uzasadnieniu przyjmowania wartości najmniejszej nie wystarczy stwierdzenie, że skoro pochodna zmienia znak „ $-$ ” na „ $+$ ”, to dla  $a = -1$  funkcja  $f$  osiąga minimum. Uzasadnienie uznajemy za poprawne, jeżeli ze znaku pochodnej zdający określi przebieg funkcji **w dziedzinie** (np. poda przedziały monotoniczności, zbuduje tabelę przebiegu zmienności lub naszkicuje wykres) i stąd wywnioskuje fakt, że funkcja  $f$  przyjmuje wartość najmniejszą dla  $a = -1$ .

**Etap trzeci** to wyznaczenie równania prostej, która przecina hiperbolę o równaniu  $y = \frac{4}{x}$  tak, że długość odcinka  $AB$  jest najmniejsza:  $y = x - 3$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisze długość odcinka  $AB$  w zależności od zmiennej  $a$ , popełniając błąd rachunkowy, który nie ułatwia znacząco dalszych obliczeń, to może otrzymać co najwyżej **6 punktów**.
2. Jeżeli zdający zapisze długość odcinka  $AB$  w zależności od zmiennej  $a$ , popełniając błąd merytoryczny, i otrzyma zupełnie inną funkcję (np. wielomian), to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (za etap I).