CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017

FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA”)

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-R1

MAJ 2017

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0−1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). 1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach (1.3).	**A**

Zadanie 2. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	5. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów; (R5.2).	**D**

Zadanie 3. (0−1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym; (7.1).	**C**

Zadanie 4. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach (R8.7).	**B**

Zadanie 5. (0−2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R3.4).	**125**

Zadanie 6. (0−3)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza pochodne funkcji wymiernych oraz korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej (R11.2, R11.3).

Przykładowe rozwiązanie

Pochodna funkcji *f* jest równa

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x(x-1)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2} \text{ dla każdej liczby rzeczywistej } x.$$

Współczynnik kierunkowy szukanej stycznej jest równy:

$$f'(1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

zatem równanie stycznej do wykresu funkcji *f* w punkcie $P=(1,0)$ ma postać:

$$y=\frac{1}{2}(x-1)+0,$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy wyznaczy pochodną funkcji *f*:

np. $f'(x)=\frac{x^2+1-2x(x-1)}{\left(x^2+1\right)^2}$ lub $f'(x)=\frac{-x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy $f'(1)=\frac{1}{2}$, poprawnie interpretuje tę liczbę jako współczynnik kierunkowy stycznej i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy zapisze równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $P=(1,0)$: $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Uwaga

Jeżeli zdający wyznacza błędnie pochodną funkcji, np.: $f'(x)=\frac{x^2+1-2x(x-1)}{x^2+1}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy równanie stycznej, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 7. (0−3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne (R2.6).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$$x^2y^2 - 4xy + 4 + 2x^2 - 4xy + 2y^2 > 0,$$

$$(xy-2)^2 + 2\left(x^2 - 2xy + y^2\right) > 0,$$

$$(xy-2)^2 + 2(x-y)^2 > 0.$$

Ponieważ $x \neq y$, więc $(x-y)^2 > 0$. Zatem lewa strona tej nierówności jest sumą liczby nieujemnej $(xy-2)^2$ oraz liczby dodatniej $2(x-y)^2$, a więc jest dodatnia.

To kończy dowód.

II sposób

Zapiszmy nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ w postaci równoważnej

$$\left(y^2+2\right)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4 > 0.$$

Ponieważ $y^2 + 2 > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej y, więc możemy potraktować tę nierówność jak nierówność kwadratową z niewiadomą x i parametrem y (lub z niewiadomą y i parametrem x). Wystarczy więc wykazać, że wyróżnik trójmianu kwadratowego $\left(y^2+2\right)x^2 - 8y \cdot x + 2y^2 + 4$ zmiennej x jest ujemny.

$$\Delta = (-8y)^2 - 4 \cdot \left(y^2+2\right) \cdot \left(2y^2+4\right) = 64y^2 - 8\left(y^2+2\right)^2 =$$

$$= 8\left(8y^2 - y^4 - 4y^2 - 4\right) = 8\left(-y^4 + 4y^2 - 4\right) = -8\left(y^2-2\right)^2.$$

Dla każdej liczby rzeczywistej y, takiej, że $y^2 \neq 2$ wyróżnik jest ujemy. Gdy $y^2 = 2$, to wówczas nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ ma postać

$$4x^2 - 8\sqrt{2}x + 8 > 0 \text{ lub } 4x^2 + 8\sqrt{2}x + 8 > 0$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 > 0 \text{ lub } x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 > 0,$$

$$\left(x - \sqrt{2}\right)^2 > 0 \text{ lub } \left(x + \sqrt{2}\right)^2 > 0.$$

Ponieważ z założenia wynika, że $x \neq y$, więc $x^2 \neq 2$, a to oznacza, że każda z otrzymanych nierówności jest prawdziwa.

To kończy dowód.

III sposób

Rozpatrzmy nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$ w trzech przypadkach.

I. Gdy co najmniej jedna z liczb x, y jest równa 0, np. gdy $x = 0$. Wtedy nierówność przyjmuje postać

$$2y^2 + 4 > 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej y.

II. Gdy żadna z liczb x, y nie jest równa 0 i gdy $xy<0$. Wtedy po lewej stronie nierówności $x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4>0$ wszystkie składniki są dodatnie, więc nierówność jest prawdziwa.

III. Gdy żadna z liczb x, y nie jest równa 0 i gdy $xy>0$. Wtedy, dzieląc obie strony nierówności $x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4>0$ przez xy, otrzymujemy nierówność równoważną

$$xy+2\frac{x}{y}+2\frac{y}{x}-8+\frac{4}{xy}>0,$$

$$xy+\frac{4}{xy}+2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-8>0,$$

$$xy-4+\frac{4}{xy}+2\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right)>0,$$

$$\left(\sqrt{xy}-\frac{2}{\sqrt{xy}}\right)^2+2\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2>0.$$

Ponieważ z założenia $x\neq y$, więc $\frac{x}{y}\neq 1$, zatem $\frac{x}{y}\neq\frac{y}{x}$, co oznacza, że $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2>0$.

Stąd i z tego, że $\left(\sqrt{xy}-\frac{2}{\sqrt{xy}}\right)^2\geq 0$ wynika prawdziwość otrzymanej nierówności.

To kończy dowód.

<u>IV sposób</u>

I. Gdy $xy\leq 0$, to wtedy po lewej stronie nierówności $x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4>0$ cztery pierwsze składniki są nieujemne, piąty jest dodatni, więc nierówność jest prawdziwa.

II. Gdy $xy>0$, wtedy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb dodatnich x^2y^2, $2x^2$, $2y^2$ i 4 otrzymujemy

$$\frac{x^2y^2+2x^2+2y^2+4}{4}\geq\sqrt[4]{x^2y^2\cdot 2x^2\cdot 2y^2\cdot 4}=\sqrt[4]{16x^4y^4}=2xy,$$

skąd

$$x^2y^2+2x^2+2y^2+4\geq 8xy.$$

Równość miałaby miejsce tylko wtedy, gdyby $x^2y^2=2x^2=2y^2=4$, a więc gdyby $x^2=y^2$, co wobec nierówności $xy>0$ oznaczałoby $x=y$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem

$$x^2y^2+2x^2+2y^2+4>8xy,$$

czyli

$$x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4>0.$$

To kończy dowód.

Schemat punktowania

I sposób rozwiązania

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci $(xy-2)^2+2(x-y)^2>0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie, uwzględniające założenie, że $x \neq y$.

II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 1 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci $(y^2+2)x^2-8y\cdot x+2y^2+4>0$, obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $(y^2+2)x^2-8y\cdot x+2y^2+4$, np.: $\Delta=(-8y)^2-4\cdot(y^2+2)\cdot(2y^2+4)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający uzasadni, że wyróżnik $\Delta=-8(y^2-2)^2$ jest niedodatni dla każdej liczby rzeczywistej y, ale nie rozpatrzy przypadku, gdy $y^2=2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 1 p.

Zdający wykaże prawdziwość nierówności w I i w II przypadku i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci $xy+\frac{4}{xy}+2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-8>0$ w przypadku, gdy $xy>0$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

IV sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 1 p.

Zdający wykaże prawdziwość nierówności $x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4>0$ w I przypadku i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający uzasadni, że gdy $xy > 0$, to prawdziwa jest nierówność $\frac{x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4}{4} \geq 2xy$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

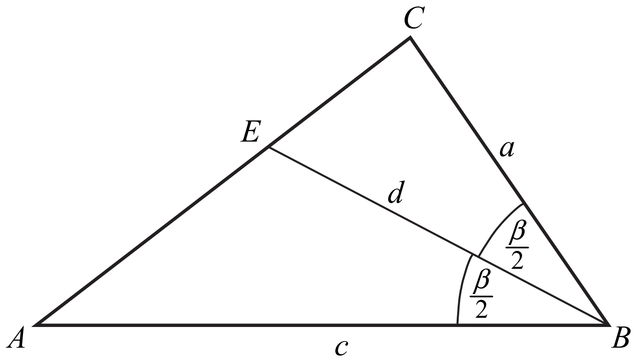
Zadanie 8. (0−3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. (7.4). Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności. (R7.4). Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. (R7.5).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole trójkąta *ABC* jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin\beta .$$

Pola trójkątów *ABE* i *CBE* są równe

$$P_{ABE} = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin\frac{\beta}{2} \text{ oraz } P_{CBE} = \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin\frac{\beta}{2} .$$

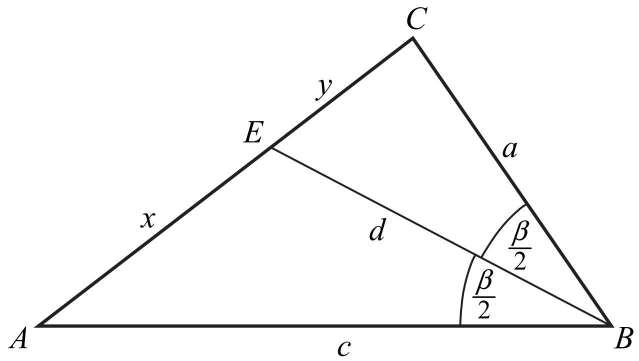
Suma pól trójkątów *ABE* i *CBE* jest równa polu trójkąta *ABC*, zatem

$$\frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} d \cdot c \cdot \sin\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} d \cdot a \cdot \sin\frac{\beta}{2} .$$

Stąd
$$a\cdot c\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}=d\cdot(a+c)\cdot\sin\frac{\beta}{2}.$$
$$2ac\cdot\cos\frac{\beta}{2}=d\cdot(a+c),$$
$$d=\frac{2ac}{a+c}\cdot\cos\frac{\beta}{2}.$$

To kończy dowód.

<u>II sposób</u>
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

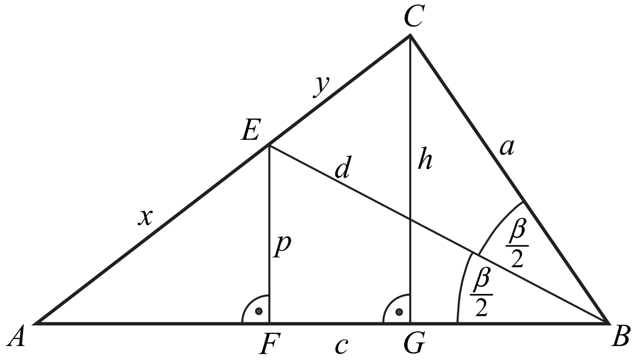


Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy
$$\frac{|CE|}{|AE|}=\frac{|CB|}{|AB|},\text{ czyli }\frac{y}{x}=\frac{a}{c}.$$
Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABE i CBE otrzymujemy
$$x^2=c^2+d^2-2cd\cos\frac{\beta}{2}\ \text{ oraz }\ y^2=a^2+d^2-2ad\cos\frac{\beta}{2}.$$
Zatem
$$\frac{a^2}{c^2}=\frac{y^2}{x^2}=\frac{a^2+d^2-2ad\cos\frac{\beta}{2}}{c^2+d^2-2cd\cos\frac{\beta}{2}}.$$
Stąd otrzymujemy
$$a^2\left(c^2+d^2-2cd\cos\frac{\beta}{2}\right)=c^2\left(a^2+d^2-2ad\cos\frac{\beta}{2}\right),$$
$$a^2c^2+a^2d^2-2a^2cd\cos\frac{\beta}{2}=a^2c^2+c^2d^2-2ac^2d\cos\frac{\beta}{2},$$
$$a^2d^2-c^2d^2=2a^2cd\cos\frac{\beta}{2}-2ac^2d\cos\frac{\beta}{2},$$
$$\left(a^2-c^2\right)d=2(a-c)ac\cos\frac{\beta}{2}.$$
Gdy $a=c$, wówczas trójkąt ABC jest równoramienny, więc trójkąty ABE i CBE są prostokątne i przystające. Wtedy $\cos\frac{\beta}{2}=\frac{d}{c}$, skąd $d=c\cos\frac{\beta}{2}=\frac{2c^2}{2c}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}$.

Gdy zaś $a\neq c$, to $(a-c)(a+c)\neq 0$, czyli $a^2-c^2\neq 0$, więc
$$d=\frac{2(a-c)}{a^2-c^2}ac\cos\frac{\beta}{2}=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}.$$
To kończy dowód.

III sposób

Poprowadźmy wysokości CG i EF trójkątów ABC i ABE. Ponieważ trójkąt ABC jest ostrokątny, więc spodki F i G tych wysokości leżą na boku AB trójkąta ABC. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy jak na rysunku.



Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{|CE|}{|AE|}=\frac{|CB|}{|AB|}, \text{ czyli } \frac{y}{x}=\frac{a}{c}.$$

Z trójkątów BEF i BCG otrzymujemy

$$\frac{p}{d}=\sin\frac{\beta}{2} \text{ oraz } \frac{h}{a}=\sin\beta.$$

Stąd

$$p=d\sin\frac{\beta}{2} \text{ oraz } h=a\sin\beta.$$

Trójkąty AFE i AGC są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku A. Zatem

$$\frac{|EF|}{|AE|}=\frac{|CG|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{p}{x}=\frac{h}{x+y}.$$

Stąd i z poprzednio otrzymanych równości otrzymujemy kolejno

$$\frac{d\sin\frac{\beta}{2}}{x}=\frac{a\sin\beta}{x+y},$$

$$d\sin\frac{\beta}{2}=\frac{a\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{1+\frac{y}{x}},$$

$$d=\frac{2a\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{1+\frac{a}{c}}=\frac{2ac\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}.$$

To kończy dowód.

Schemat punktowania

I sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 1 p.

Zdający

- zapisze pola każdego z trójkątów ABC, ABE i CBE w zależności od długości a, c, d i kąta β: $P_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin\beta$, $P_{ABE}=\frac{1}{2}d\cdot c\cdot\sin\frac{\beta}{2}$, $P_{CBE}=\frac{1}{2}d\cdot a\cdot\sin\frac{\beta}{2}$

albo

- zapisze, że pole trójkąta ABC jest sumą pól trójkątów ABE i CBE oraz zapisze jedno z tych pól: $P_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin\beta$ lub $P_{ABE}=\frac{1}{2}d\cdot c\cdot\sin\frac{\beta}{2}$ lub $P_{CBE}=\frac{1}{2}d\cdot a\cdot\sin\frac{\beta}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zapisze zależność między polem trójkąta ABC i polami trójkątów ABE i CBE w postaci, w której występują jedynie wielkości a, c, d i β, np.:

$$\frac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}d\cdot c\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}d\cdot a\cdot\sin\frac{\beta}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

II sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 1 p.

Zdający zapisze zależności między wielkościami x, y, d, a i c oraz kątem β:

$$\frac{y}{x}=\frac{a}{c},\ x^2=c^2+d^2-2cd\cos\frac{\beta}{2},\ y^2=a^2+d^2-2ad\cos\frac{\beta}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zapisze równanie, np.: $\frac{a^2}{c^2}=\frac{a^2+d^2-2ad\cos\frac{\beta}{2}}{c^2+d^2-2cd\cos\frac{\beta}{2}}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga

Jeżeli zdający nie rozważy sytuacji gdy $a=c$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

III sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 1 p.

Zdający zapisze

- zależność między wielkościami x, y, a i c oraz zależności między wielkościami p, h i a oraz kątem β: $\frac{y}{x}=\frac{a}{c}$, $\frac{p}{d}=\sin\frac{\beta}{2}$, $\frac{h}{a}=\sin\beta$

albo

- zależność między wielkościami x, y, a i c oraz zależności między wielkościami p, h, x i y oraz kątem β: $\frac{y}{x}=\frac{a}{c}$, $\frac{p}{x}=\frac{h}{x+y}$,

albo

- zależność między wielkościami p, h i a oraz kątem β oraz zależność między wielkościami x, y, a i c: $\frac{p}{d}=\sin\frac{\beta}{2}$, $\frac{h}{a}=\sin\beta$, $\frac{y}{x}=\frac{a}{c}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zapisze wystarczającą liczbę zależności między wielkościami x, y, a, c, p i h oraz kątem β, pozwalającą wyznaczyć d w zależności od wielkości a, c i kąta β, np.:

$$\frac{y}{x}=\frac{a}{c},\quad \frac{d\sin\frac{\beta}{2}}{x}=\frac{a\sin\beta}{x+y}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze jedynie 3 razy twierdzenie cosinusów, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 9. (0−4)

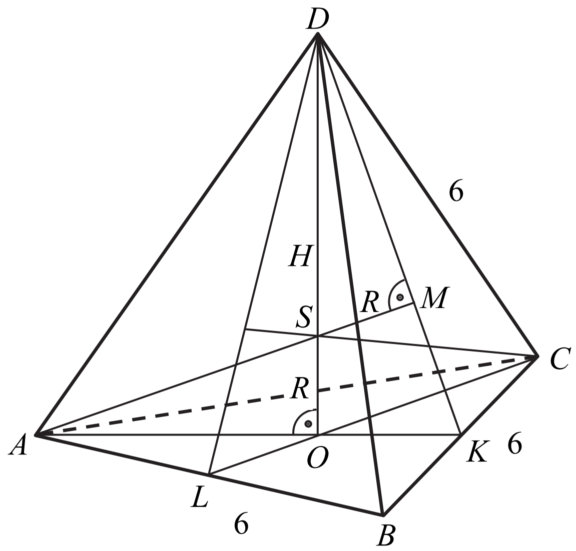
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną. (R9.2). 7. Planimetria. Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności (R7.4). G10. Figury płaskie. Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa (G10.7).

Przykładowe rozwiązanie

Niech K będzie środkiem odcinka BC, a M i O spodkami wysokości trójkąta AKD opuszczonymi z wierzchołków A i D. Płaszczyzny AKD i ABC są prostopadłe, bo prosta BC jest prostopadła do płaszczyzny AKD.
Niech T będzie punktem wspólnym wysokości AM i DO. Odległości punktu T od prostych AK i DK są równe, bo $|AK|=|DK|$. Są to też odległości punktu T od płaszczyzn ABC i BCD. Ten sam punkt T otrzymamy rozpatrując trójkąt LCD, gdzie L jest środkiem odcinka AB lub

trójkąt $ŁBD$, gdzie $Ł$ jest środkiem odcinka AC. Wynika stąd, że odległość punktu T od każdej ściany czworościanu $ABCD$ jest taka sama. Wobec tego $S = T$.

Niech H oznacza wysokość czworościanu, h wysokość ściany czworościanu, a R – promień kuli, o której mowa w treści zadania. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie jak na rysunku.



Wyznaczymy wysokość H czworościanu.
Odcinki AK i DK to wysokości przystających trójkątów równobocznych ABC i BCD o boku długości 6, więc

$$|AK| = |DK| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Spodek O wysokości DO czworościanu jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, więc

$$|KO| = \frac{1}{3}|AK| = \sqrt{3}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DOK otrzymujemy

$$|DO|^2 + |KO|^2 = |DK|^2,$$

$$H^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2.$$

Stąd

$$H^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2,$$

$$H = 2\sqrt{6}.$$

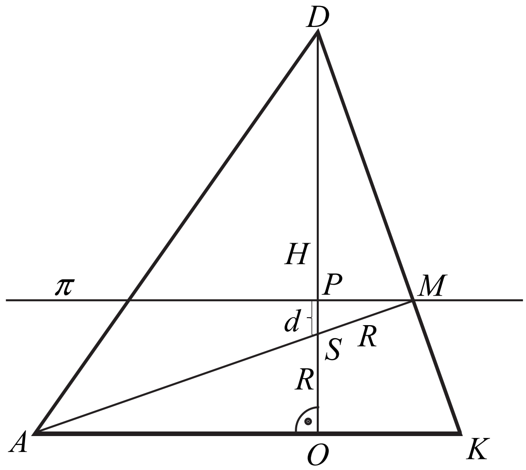
Wyznaczamy odległość d środka S kuli od płaszczyzny π .

I sposób

Niech P będzie punktem, w którym wysokość DO przebija płaszczyznę π. Ponieważ płaszczyzna π jest równoległa do płaszczyzny ściany ABC, więc czworościan odcięty tą płaszczyzną od czworościanu $ABCD$ jest podobny do czworościanu $ABCD$, a skala tego podobieństwa jest równa $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$. Wynika stąd, że płaszczyzna π przecina wysokość DK ściany bocznej BCD w takim punkcie M', że

$$|DM'| = \frac{2}{3}|DK|.$$

To oznacza $M' = M$.



Trójkąty DOK, DPM, MPS są podobne, ponieważ para trójkątów prostokątnych DOK, DPM ma jeden kąt ostry wspólny oraz para trójkątów prostokątnych DPM, MPS ma jeden kąt ostry wspólny. Zatem

Stąd

$$\frac{|DP|}{|MP|} = \frac{|DO|}{|OK|} = \frac{|MP|}{|PS|}\text{, czyli } \frac{\frac{2}{3}H}{|MP|} = \frac{H}{\sqrt{3}} = \frac{|MP|}{d}.$$

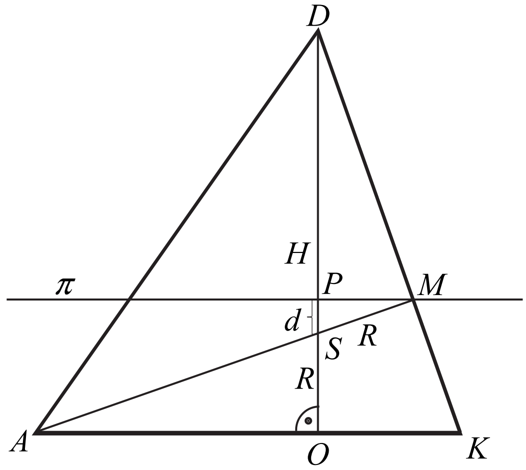
Stąd

$$|MP| = \frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ oraz } \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{d}$$

Zatem $d = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

II sposób

Obliczymy najpierw promień R kuli.



Trójkąty DOK i DMS są podobne, ponieważ są prostokątne i mają jeden kąt ostry wspólny.

Zatem $\frac{|SM|}{|DS|} = \frac{|KO|}{|DK|}$. Stąd

$$\frac{R}{H-R} = \frac{\frac{1}{3}h}{h} = \frac{1}{3},$$
$$3R = H - R,$$
$$4R = H$$
$$R = \tfrac{1}{4}H.$$

Ponieważ $H = 2\sqrt{6}$, więc

$$R = \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Płaszczyzna π odcina czworościan podobny do czworościanu $ABCD$ w skali $\frac{2}{3}$, więc $|DP| = \frac{2}{3}H$, skąd $|OP| = \frac{1}{3}H = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Odległość punktu S od płaszczyzny π jest więc równa

$$d = \frac{1}{3}H - R = \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Uwaga

Możemy najpierw wyznaczyć wielkości R i $|OP|$ w zależności od H, potem wyznaczyć szukaną odległość d w zależności od H, a następnie obliczyć H i w rezultacie d:

$$R = \tfrac{1}{4}H,\ |OP| = \tfrac{1}{3}H,$$

więc

$$d = \tfrac{1}{3}H - \tfrac{1}{4}H = \tfrac{1}{12}H = \tfrac{1}{12}\cdot 2\sqrt{6} = \tfrac{\sqrt{6}}{6}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający:

- obliczy wysokość czworościanu *ABCD*: $H = 2\sqrt{6}$

albo

- obliczy skalę s podobieństwa czworościanu odciętego płaszczyzną π od czworościanu *ABCD* do czworościanu *ABCD*: $s = \frac{2}{3}$,

albo

- zapisze zależność między promieniem R kuli, wysokością H czworościanu *ABCD* i wysokością h ściany czworościanu, np.: $\frac{R}{H-R} = \frac{\frac{1}{3}h}{h}$,

albo

- zapisze zależność między R, objętością V czworościanu *ABCD* polem P_c powierzchni całkowitej czworościanu *ABCD*, np.: $R = \frac{3V}{P_c}$,

albo

- poprawnie interpretuje wielkość d, np. pisząc $d = H - |PD| - R$ lub zaznaczając d na rysunku

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 p.

Zdający:

- obliczy wysokość H czworościanu *ABCD* oraz skalę s podobieństwa czworościanu odciętego płaszczyzną π od czworościanu *ABCD* do czworościanu *ABCD*: $H = 2\sqrt{6}$, $s = \frac{2}{3}$

albo

- obliczy wysokość H czworościanu *ABCD* oraz obliczy promień R kuli: $H = 2\sqrt{6}$, $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

albo

- obliczy skalę s podobieństwa czworościanu odciętego płaszczyzną π od czworościanu *ABCD* do czworościanu *ABCD* oraz promień R kuli : $s = \frac{2}{3}$, $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

albo

- obliczy skalę s podobieństwa czworościanu odciętego płaszczyzną π od czworościanu *ABCD* do czworościanu *ABCD* oraz wyznaczy promień R kuli w zależności od H : $s = \frac{2}{3}$, $R = \frac{1}{4}H$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**

Zdający:

- obliczy wysokość H czworościanu $ABCD$, wysokość czworościanu odciętego płaszczyzną π od czworościanu $ABCD$ do czworościanu $ABCD$ oraz promień R kuli:

  $H = 2\sqrt{6}$, $|DP| = \frac{4}{3}\sqrt{6}$, $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

albo

- wyznaczy szukaną odległość d w zależności od wysokości H czworościanu $ABCD$, np.: $d = \frac{1}{3}H - \frac{1}{4}H$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **4 p.**

Zdający obliczy odległość punktu S od płaszczyzny π: $d = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Zadanie 10. (0−4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne oraz posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (R6.6, R6.4).

Przykładowe rozwiązania

Równanie można przekształcić równoważnie do postaci:

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0.$$

Podstawiamy $t = \cos x$, przy czym $t \in \langle -1, 1 \rangle$.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$2t^2 + 3t + 1 = 0.$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1,\ \sqrt{\Delta} = 1,$$

$$t_1 = \frac{-3-1}{4} = -1,$$

$$t_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Wyznaczamy wartości x w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

$$\cos x = -1 \text{ lub } \cos x = -\frac{1}{2},$$

$$x = \pi \text{ lub } x = \frac{2\pi}{3}, \text{ lub } x = \frac{4\pi}{3}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający zapisze podane równanie w postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna tego samego argumentu, np. $2\cos^2 x-1+3\cos x=-2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 p.
Zdający zapisze, że równanie $2\cos^2 x+3\cos x+1=0$ ma dwa rozwiązania

$$\cos x=-1 \text{ lub } \cos x=-\frac{1}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający

- rozwiąże jedno z równań $\cos x=-1$ lub $\cos x=-\frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$

albo

- wyznaczy wszystkie rozwiązania równań $\cos x=-1$ i $\cos x=-\frac{1}{2}$ w zbiorze R

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający wyznaczy wszystkie rozwiązania równania w podanym przedziale:
$x=\pi$ lub $x=\frac{2\pi}{3}$, lub $x=\frac{4\pi}{3}$.

Uwagi
1. Jeżeli zdający popełnił błąd przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i otrzymał równanie sprzeczne lub równanie, którego wszystkie rozwiązania są spoza przedziału $\langle -1,1\rangle$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający popełnił błąd przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i otrzymał równanie, które ma tylko jedno rozwiązanie z przedziału $\langle -1,1\rangle$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający popełnił błąd przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i otrzymał równanie, które ma dwa rozwiązania z przedziału $\langle -1,1\rangle$, przy czym co najmniej jedno z nich jest z przedziału $(-1,1)$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający poda liczby $\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ jako rozwiązanie, ale bez stosownego uzasadnienia, to otrzymuje **0 punktów**. Jeżeli poda te 3 liczby jako rozwiązanie, z uzasadnieniem, np. sprawdzeniem spełniania przez te liczby równości lub odpowiednią ilustracją, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 11. (0−4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).

Przykładowe rozwiązanie

Jest to model klasyczny. Za każdym razem mamy 8 możliwości wyciągnięcia jednej piłeczki. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem wszystkich ciągów trójwyrazowych o wyrazach ze zbioru liczb całkowitych od 1 do 8. Zatem $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$.

Niech A oznacza zdarzenie zapisania takich trzech liczb, że ich iloczyn dzieli się przez 4. Wtedy możliwe są 3 przypadki.

I. Wszystkie zapisane liczby są parzyste.
II. Dwie z zapisanych liczb są parzyste, a jedna z zapisanych jest nieparzysta.
III. Dwie z zapisanych liczb są nieparzyste, a jedna z zapisanych jest podzielna przez 4.
Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych w każdym z tych przypadków.
I. $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
II. $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 192$.
III. $4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 96$.
Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4: $P(A) = \frac{64+192+96}{512} = \frac{352}{512} = \frac{11}{16}$.

Uwaga

Prawdopodobieństwo zdarzenia A możemy też wyznaczyć po uprzednim obliczeniu prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego A'. Jeżeli iloczyn trzech zapisanych liczb nie dzieli się przez 4, to oznacza, że zachodzi jeden z poniższych przypadków.

I. Wszystkie zapisane liczby są nieparzyste.
II. Dwie z zapisanych liczb są nieparzyste, a jedna z zapisanych jest równa 2 lub 6.
Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych w każdym z tych przypadków.
I. $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.
II. $4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 96$.
Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że iloczyn trzech zapisanych liczb nie jest podzielny przez 4: $P(A') = \frac{64+96}{512} = \frac{160}{512} = \frac{5}{16}$.

Zatem $P(A) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający
- obliczy $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$

albo
- wypisze wszystkie możliwe, ale rozłączne, przypadki, w których wystąpi zdarzenie A lub zdarzenie A',

albo
- wypisze wszystkie możliwe przypadki, w których wystąpi zdarzenie A (lub A') i poda taką metodę zliczania zdarzeń elementarnych sprzyjających A (lub A'), która wyklucza powtórzenie tego samego zdarzenia elementarnego,

albo
- obliczy $|A|$ (lub $|A'|$), stosując poprawną metodę, ale z błędem rachunkowym,

albo
- narysuje drzewo z wyróżnionymi wszystkimi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A (albo A'),

albo
- narysuje niepełne drzewo (może wystąpić brak istotnych gałęzi odpowiadających zdarzeniu A lub A'), ale na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, np. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$, przy czym najwyżej na jednym z trzech odcinków prawdopodobieństwo może być równe 1

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 p.
Zdający
- obliczy $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$ i wypisze wszystkie możliwe, ale rozłączne, przypadki, w których wystąpi zdarzenie A lub zdarzenie A'

albo
- obliczy $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$ i wypisze wszystkie możliwe przypadki, w których wystąpi zdarzenie A (lub A') i poda taką metodę zliczania zdarzeń elementarnych sprzyjających A (lub A'), która wyklucza powtórzenie tego samego zdarzenia elementarnego,

albo
- obliczy $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$ i obliczy liczbę zdarzeń elementarnych w dwóch spośród przypadków: a) zapisano 3 liczby parzyste, b) zapisano 2 liczby parzyste i jedną nieparzystą, c) zapisano dwie liczby nieparzyste i jedną podzielną przez 4,

albo
- obliczy $|A| = 352$ lub $|A'| = 160$,

albo
- narysuje drzewo z wyróżnionymi wszystkimi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu A (albo A') i na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, np. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$, przy czym najwyżej na jednym z trzech odcinków prawdopodobieństwo może być równe 1,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi wszystkimi gałęziami odpowiadającymi dwóm spośród przypadków: a) zapisano 3 liczby parzyste, b) zapisano 2 liczby parzyste i jedną nieparzystą, c) zapisano dwie liczby nieparzyste i jedną podzielną przez 4 i oblicza prawdopodobieństwo zgodnie z „metodą drzewkową”

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- obliczy $|\Omega| = 8 \cdot 8 \cdot 8$ i $|A| = 352$ (lub $|A'| = 160$)

albo

- narysuje poprawne drzewo oraz zapisze prawdopodobieństwo zdarzenia A (albo A') zgodnie z „metodą drzewkową”

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy prawdopodobieństwo: $P(A) = \frac{352}{512} = \frac{11}{16}$.

Zadanie 12. (0−5)

III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète’a (R3.1).

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Zapisujemy układ warunków

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (4x_1 - 4x_2)^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$, czyli $36m^2 - 16(2m^2 - 3m - 9) > 0$. Po uporządkowaniu otrzymujemy nierówność $4(m+6)^2 > 0$, której rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste oprócz $m = -6$.

Drugą nierówność przekształcamy równoważnie i otrzymujemy kolejno:

$$16(x_1 - x_2)^2 - 1 < 0,$$

$$16(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - 1 < 0,$$

$$16\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] - 1 < 0.$$

Stosujemy wzory Viete'a i otrzymujemy: $16\left(\frac{36m^2}{16} - 4 \cdot \frac{2m^2 - 3m - 9}{4}\right) - 1 < 0$.

Przekształcamy nierówność równoważnie otrzymujemy kolejno:

$$36m^2 - 32m^2 + 48m + 143 < 0,$$

$$4m^2 + 48m + 143 < 0.$$

Rozwiązujemy tę nierówność.

$$\Delta = 2304 - 2288 = 4^2$$

$$m_1 = \frac{-48-4}{8} = -\frac{13}{2}, \quad m_2 = \frac{-48+4}{8} = -\frac{11}{2},$$

$$m \in \left(-\frac{13}{2}, -\frac{11}{2} \right).$$

Wyznaczamy część wspólną obu warunków: $m \in \left(-\frac{13}{2}, -6 \right) \cup \left(-6, -\frac{11}{2} \right)$.

II sposób

Rozwiązujemy nierówność $\Delta > 0$, czyli $36m^2 - 16\left(2m^2 - 3m - 9\right) > 0$. Po uporządkowaniu otrzymujemy nierówność $4(m+6)^2 > 0$, której rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste oprócz $m = -6$.

Obliczamy pierwiastki równania, z zachowaniem warunku $x_1 < x_2$:

$$x_1 = \frac{6m - 2|m+6|}{8} = \frac{3m - |m+6|}{4}, \quad x_2 = \frac{6m + 2|m+6|}{8} = \frac{3m + |m+6|}{4}.$$

Obliczamy wartość wyrażenia $4x_1 - 4x_2$ w zależności od m:

$$4x_1 - 4x_2 = 4 \cdot \frac{-2|m+6|}{4} = -2|m+6|.$$

Zapisujemy nierówność z treści zadania z wykorzystaniem wyznaczonych rozwiązań równania i przekształcamy ją równoważnie, otrzymując kolejno:

$$\left(-2|m+6| - 1\right)\left(-2|m+6| + 1\right) < 0,$$

$$-\left[1 - 4(m+6)^2\right] < 0,$$

$$4m^2 + 48m + 143 < 0.$$

Dalsza część rozwiązania przebiega podobnie jak w I sposobie rozwiązania,

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.
Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$.
Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
Uwaga
Jeżeli zdający rozwiąże nierówność $\Delta \geq 0$ i nie odrzuci przypadku $\Delta = 0$, to za ten etap otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na znalezieniu wartości m, dla których spełniona jest nierówność: $\left(4x_1 - 4x_2 - 1\right)\left(4x_1 - 4x_2 + 1\right) < 0$.
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Poniżej podział punktów za drugi etap rozwiązania:
Zdający otrzymuje **1 punkt** gdy:

- zapisze nierówność $(4x_1-4x_2-1)(4x_1-4x_2+1)<0$ w postaci równoważnej zawierającej jedynie sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego $4x^2-6mx+(2m+3)(m-3)$, np.: $16\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]-1<0$

  lub
- obliczy pierwiastki trójmianu:
  $x_1=\frac{6m-2|m+6|}{8}=\frac{3m-|m+6|}{4}$, $x_2=\frac{6m+2|m+6|}{8}=\frac{3m+|m+6|}{4}$.

Zdający otrzymuje **2 punkty** gdy:

- zapisze nierówność $(4x_1-4x_2-1)(4x_1-4x_2+1)<0$ w postaci nierówności równoważnej z jedną niewiadomą np.: $16\left(\frac{36m^2}{16}-4\cdot\frac{2m^2-3m-9}{4}\right)-1<0$ lub $4m^2+48m+143<0$

  lub $(-2|m+6|-1)(-2|m+6|+1)<0$.

Zdający otrzymuje **3 punkty** gdy:

- poprawnie rozwiąże nierówność: $m\in\left(-\frac{13}{2},-\frac{11}{2}\right)$.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapów I i II oraz podaniu odpowiedzi: $m\in\left(-\frac{13}{2},-6\right)\cup\left(-6,-\frac{11}{2}\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt.**

Uwagi

1. W przypadku otrzymania na jednym z etapów (I lub II) zbioru pustego lub zbioru R jako zbioru rozwiązań nierówności przyznajemy **0 punktów** za III etap.
2. W przypadku otrzymania w II etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem zbioru rozwiązań z I etapu przyznajemy **0 punktów** za III etap.
3. W przypadku rozwiązania z błędami, nieprzekreślającymi poprawności rozumowania, za ostatni etap przyznajemy **1 punkt** jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II lub gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże etap II (uwaga 3. ma zastosowanie, gdy nie zachodzą przypadki 1. i 2.).
4. Jeżeli zdający w wyniku błędów otrzyma w II etapie nierówność z niewiadomą m stopnia drugiego z ujemnym wyróżnikiem lub nierówność liniową, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
5. W przypadku, gdy zdający przyjmuje błędnie $\sqrt{\Delta}=2(m+6)$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

Zadanie 13. (0−5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności, wyznacza współrzędne środka odcinka, wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych oraz oblicza odległość dwóch punktów (R8.5, 8.5, 8.3, 8.4, 8.6).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Środek S szukanego okręgu jest punktem przecięcia prostej $x-3y+1=0$ oraz symetralnej odcinka AB.

Wyznaczmy współrzędne środka D odcina AB: $D=\left(\frac{-5+0}{2},\frac{3+6}{2}\right)=\left(\frac{-5}{2},\frac{9}{2}\right)$.

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B:

$$a_{AB}=\frac{6-3}{0+5}=\frac{3}{5}.$$

Z warunku prostopadłości prostych wyznaczamy współczynnik kierunkowy symetralnej odcinka AB: $a=-\frac{5}{3}$. Wyznaczamy równanie symetralnej odcinka AB: $y=-\frac{5}{3}x+b$. Przechodzi ona przez punkt $D=\left(-\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$, stąd otrzymujemy $\frac{9}{2}=-\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+b$. Zatem $b=\frac{1}{3}$. Wobec tego symetralną odcinka AB jest prosta $y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$.

Obliczamy współrzędne punktu S, rozwiązując układ równań $\begin{cases}x-3y+1=0\\ y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}.\end{cases}$ Środkiem okręgu jest $S=\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

Wyznaczamy promień okręgu r obliczając np.: $|AS|=\sqrt{5^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{17}{3}$.

Wyznaczamy równanie okręgu o środku w punkcie $S=\left(0,\frac{1}{3}\right)$ i promieniu $r=\frac{17}{3}$:

$x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$.

II sposób

Środkiem okręgu jest punkt S, który leży na prostej $x-3y+1=0$. Zatem $S=(3y-1,y)$.

Ponieważ $|AS|^2=|BS|^2$, więc możemy zapisać równanie $(x+5)^2+(y-3)^2=x^2+(y-6)^2$.

Rozwiązujemy zatem układ równań

$$10x+6y=2 \text{ i } x-3y=-1,$$

otrzymując współrzędne punktu S

$$S=\left(0,\frac{1}{3}\right).$$

Następnie obliczamy kwadrat długości promienia $|SB|^2=r^2$

$$r^2=\left(\frac{17}{3}\right)^2=\frac{289}{9}.$$

Zatem równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r ma postać $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$.

<u>III sposób</u>

Przyjmijmy, że punkt $S=(a,b)$ jest środkiem szukanego okręgu. Ponieważ punkt ten leży na prostej $x-3y+1=0$, więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej. Stąd $a-3b+1=0$.

Okrąg przechodzi przez punkty $A=(-5,3)$ i $B=(0,6)$, zatem

$$\begin{cases}(-5-a)^2+(3-b)^2=r^2\\(-a)^2+(6-b)^2=r^2.\end{cases}$$

Stąd otrzymujemy zależność między a i b: $5a+3b-1=0$.

Z układu równań

$$\begin{cases}a-3b+1=0\\5a+3b-1=0\end{cases}$$

obliczamy współrzędne środka okręgu $S=\left(0,\frac{1}{3}\right)$. Wyznaczone współrzędne podstawiamy do jednego z równań układu z niewiadomą r i obliczamy kwadrat promienia okręgu: $r^2=\frac{289}{9}$.

Zatem szukane równanie okręgu ma postać: $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$.

Schematy punktowania

<u>I sposób rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- wyznaczy współrzędne środka odcinka AB: $D=\left(-\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$

albo

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej zawierającej odcinek AB: $a_{AB}=\frac{3}{5}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **2 p.**

Zdający zapisze równanie symetralnej odcinka AB: $y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności .... **3 .p.**

Zdający wyznaczy współrzędne punktu S: $S=\left(0,\frac{1}{3}\right)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 p.**

Zdający wyznaczy promień okręgu (lub kwadrat promienia okręgu): $r=\frac{17}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **5 p.**

Zdający wyznaczy równanie okręgu: $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 p.**

Zdający

- zapisze współrzędne punktu S w zależności od jednej zmiennej, np.: $S=(3y-1,\, y)$

albo

- zapisze równość $|AS|^2=|BS|^2$ (lub $|AS|=|BS|$) lub równoważne równanie

  $(x+5)^2+(y-3)^2=x^2+(y-6)^2$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 p.**

Zdający zapisze układ równań

$$10x+6y=2 \text{ i } x-3y=-1$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności .... **3 p.**

Zdający wyznaczy współrzędne punktu S:

$$S=\left(0,\frac{1}{3}\right)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 p.**

Wyznaczy kwadrat promienia okręgu (lub promień okręgu): $r^2=\frac{289}{9}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... **5 p.**

Zdający wyznaczy równanie okręgu: $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$.

<u>III sposób rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 p.**

Zdający

- zapisze układ równań: $\begin{cases}(-5-a)^2+(3-b)^2=r^2\\(-a)^2+(6-b)^2=r^2\end{cases}$

albo

- zauważy, że współrzędne środka okręgu spełniają równanie: $a-3b+1=0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **2 p.**

Zdający zapisze układ równań: $\begin{cases}(-5-a)^2+(3-b)^2=r^2\\(-a)^2+(6-b)^2=r^2\end{cases}$ i zauważy, że współrzędne środka okręgu spełniają równanie $a-3b+1=0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności .... **3 p.**

Zdający wyznaczy współrzędne punktu S: $S=\left(0,\frac{1}{3}\right)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 p.**

Wyznaczy promień okręgu (lub kwadrat promienia okręgu): $r=\frac{17}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **5 p.**

Zdający wyznaczy równanie okręgu: $x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$.

Uwaga

Jeżeli zdający oblicza współrzędne punktu P przecięcia danej prostej z osią Oy, oblicza odległość PB, zapisuje równanie okręgu i na tym poprzestaje, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 14. (0−6)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego oraz stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. (5.3, 5.4) 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych; (R3.3).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego. Skoro suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 27, to $b-r+b+b+r=27$, a stąd $b=9$. Wówczas ciąg geometryczny $\left(7-r, 9, 2r+19\right)$ spełnia warunek $81=\left(7-r\right)\cdot\left(2r+19\right)$. Równanie to ma dwa rozwiązania $r=4$ i $r=-\frac{13}{2}$.

W pierwszym przypadku otrzymujemy ciąg arytmetyczny $\left(5,9,13\right)$, a w drugim przypadku ciąg arytmetyczny $\left(\frac{31}{2},9,\frac{5}{2}\right)$.

II sposób

Liczby a, b, c są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego, zatem $\frac{a+c}{2}=b$. Suma liczb a, b, c równa 27, stąd $a+b+c=27$. Ciąg $\left(a-2, b, 2c+1\right)$ jest geometryczny, zatem $b^2=\left(a-2\right)\cdot\left(2c+1\right)$.

Zapisujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi: $\begin{cases} \frac{a+c}{2}=b \\ a+b+c=27 \\ b^2=\left(a-2\right)\cdot\left(2c+1\right) \end{cases}$.

Z pierwszego równania wyznaczamy $a+c=2b$, podstawiamy do drugiego równania i otrzymujemy $b=9$.
Do trzeciego równania podstawiamy $b=9$ i $a=2b-c$ i otrzymujemy równanie kwadratowe: $2c^2-31c+65=0$. Równanie to ma dwa rozwiązania: $c=\frac{5}{2}$ oraz $c=13$. W pierwszym przypadku otrzymujemy: $a=5$, $b=9$, $c=13$ a w drugim przypadku otrzymujemy: $a=\frac{31}{2}$, $b=9$, $c=\frac{5}{2}$.

III sposób

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego, natomiast $a-2$ pierwszy wyraz tego ciągu. Wtedy $b=(a-2)q$ i $2c+1=(a-2)q^2$. Z ostatniej zależności otrzymujemy $c=\frac{(a-2)q^2-1}{2}$.

Ponieważ suma liczb a, b, c jest równa 27, więc możemy zapisać równość

$$a+(a-2)q+\frac{(a-2)q^2-1}{2}=27.$$

Z własności ciągu arytmetycznego wynika równanie

$$b=\frac{a+c}{2},$$

które możemy zapisać w postaci

$$(a-2)q=\frac{2a+(a-2)q^2-1}{4}.$$

Otrzymaliśmy zatem układ równań z niewiadomymi a i q:

$$\begin{aligned} 2a+2(a-2)q+(a-2)q^2&=55 \\ 4(a-2)q&=2a+(a-2)q^2-1. \end{aligned}$$

Ten układ jest równoważny układowi

$$\begin{aligned} 2(a-2)+2(a-2)q+(a-2)q^2&=51 \\ -2(a-2)+4(a-2)q-(a-2)q^2&=3 \end{aligned}$$

Po wyłączeniu czynnika $(a-2)$ każde z równań przyjmuje postać

$$\begin{aligned} (a-2)\left(2+2q+q^2\right)&=51 \\ (a-2)\left(-2+4q-q^2\right)&=3 \end{aligned}$$

Zatem

$$3\left(2+2q+q^2\right)=51\left(-2+4q-q^2\right),$$

skąd otrzymujemy równanie kwadratowe

$$3q^2-11q+6=0.$$

To równanie ma dwa rozwiązania

$$q=3,\ q=\frac{2}{3}.$$

Jeśli $q=3$, to $a=5$, $b=9$ i $c=13$. Jeżeli natomiast $q=\frac{2}{3}$, to $a=\frac{31}{2}$, $b=9$ i $c=\frac{5}{2}$.

Schemat punktowania

I sposób rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający uzależni wartości dwie spośród liczb *a*, *b*, *c* od trzeciej z liczb i od różnicy *r* ciągu arytmetycznego, np.: $a=b-r$ i $c=b+r$
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 p.

Zdający zapisze równania wynikające z własności ciągu arytmetycznego i z własności ciągu geometrycznego, np.: $a=b-r$, $c=b+r$, $b^2=(a-2)\cdot(2c+1)$
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, wynikające z własności ciągu geometrycznego, np.: $81=(7-r)(2r+19)$
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy liczby *a*, *b*, *c* w jednym z możliwych przypadków i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwaga
Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Zdający obliczy liczby w dwóch przypadkach spełniających warunki zadania: $a=5$, $b=9$, $c=13$ oraz $a=\frac{31}{2}$, $b=9$, $c=\frac{5}{2}$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zapisze jedno z równań: $\frac{a+c}{2}=b$, $b^2=(a-2)\cdot(2c+1)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze układ trzech równań z trzema niewiadomymi, np.: $\begin{cases}\frac{a+c}{2}=b\\ a+b+c=27\\ b^2=(a-2)\cdot(2c+1)\end{cases}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.: $-2c^2+31c+16=81$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy liczby *a*, *b*, *c* w jednym z możliwych przypadków i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwaga
Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... **6 p.**

Zdający obliczy liczby w dwóch przypadkach spełniających warunki zadania: $a=5$, $b=9$, $c=13$ oraz $a=\frac{31}{2}$, $b=9$, $c=\frac{5}{2}$.

<u>III sposób rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania .... **1 p.**
Zdający zapisze wszystkie wyrazy ciągu arytmetycznego w zależności od jednej z liczb i ilorazu ciągu geometrycznego, np.

$$a-2,\ b=(a-2)q,\ c=\frac{(a-2)q^2-1}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... **2 p.**

Zdający zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$a+(a-2)q+\frac{(a-2)q^2-1}{2}=27 \text{ i } (a-2)q=\frac{2a+(a-2)q^2-1}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**

Zdający zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.:

$$3\left(2+2q+q^2\right)=51\left(-2+4q-q^2\right)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **5 p.**

Zdający obliczy liczby a, b i c w jednym z możliwych przypadków i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwaga
Jeśli zdający poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... **6 p.**

Zdający zapisze dwa zestawy liczb spełniające warunki zadania: $a=5$, $b=9$ i $c=13$ oraz $a=\frac{31}{2}$, $b=9$ i $c=\frac{5}{2}$.

Uwagi (do wszystkich schematów punktowania)

1. Jeżeli zdający myli własności ciągu arytmetycznego z własnościami ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający odgadnie jeden zestaw liczb *a*, *b*, *c*, także ze sprawdzeniem warunków zadania, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 15. (0−7)

III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).

Przykładowe rozwiązanie

Niech r oraz h oznaczają, odpowiednio, promień podstawy walca i wysokość walca. Pole P powierzchni całkowitej tego walca jest równe $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Stąd

$$h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r}.$$

Objętość walca $V = \pi r^2 h$ zapisujemy jako funkcję zmiennej r:

$$V(r) = \pi r^2 \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{Pr - 2\pi r^3}{2}, \text{ gdzie } 0 < r < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}.$$

Pochodna funkcji V jest określona wzorem

$$V'(r) = \tfrac{1}{2}\left(P - 6\pi r^2\right) \text{ dla } 0 < r < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}.$$

Wyznaczamy miejsca zerowe i badamy znak pochodnej

$V'(r) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$,

$V'(r) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < r < \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$,

$V'(r) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sqrt{\frac{P}{6\pi}} < r < \sqrt{\frac{P}{2\pi}}$.

Wynika stąd, że w przedziale $\left(0, \sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right\rangle$ funkcja V jest rosnąca, a w przedziale $\left\langle \sqrt{\frac{P}{6\pi}}, \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$ jest malejąca. Zatem $V\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)$ jest największą wartością tej funkcji. Wartość ta jest równa

$$V\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right) = \frac{P \cdot \sqrt{\frac{P}{6\pi}} - 2\pi \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)^3}{2} = \frac{P}{3} \cdot \sqrt{\frac{P}{6\pi}}.$$

Gdy $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, to wtedy $h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} = \sqrt{\frac{2P}{3\pi}}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) **Pierwszy etap** składa się z trzech części:

- wyznaczenie wysokością walca w zależności od promienia podstawy walca: $h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r}$,

- wyznaczenie objętości walca jako funkcji jednej zmiennej r, $V(r)=\frac{Pr-2\pi r^3}{2}$,
- wyznaczenie dziedziny funkcji V : $D_V=\left(0,\sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$.

Za poprawne wykonanie każdej z tych części zdający otrzymuje **1 punkt**.

b) **Drugi etap** składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej $f(r)=\frac{P}{2}\cdot r-\pi r^3$:

  $f'(r)=\frac{P}{2}-3\pi r^2$,
- obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji V: $r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ lub obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji f: $r=-\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, $r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$.
- zbadanie znaku pochodnej funkcji V i uzasadnienie, że dla $r=\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$ funkcja V osiąga największą wartość.

Za poprawne rozwiązanie **każdej** z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

c) **Trzeci etap**.

Obliczenie największej objętości walca i wysokości walca o największej objętości:
$V=\frac{P}{3}\cdot\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, $h=\sqrt{\frac{2P}{3\pi}}$.

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwagi
1. Jeżeli zdający zapisze objętość walca z błędem rzeczowym, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie, a jeżeli dodatkowo poprawnie wyznaczy dziedzinę funkcji V, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający obliczy pochodną funkcji f lub V z błędem rachunkowym i otrzyma funkcję liniową albo funkcję kwadratową o ujemnym wyróżniku o wyróżniku równym 0, to może otrzymać punkty jedynie za pierwszy etap rozwiązania.
3. Jeśli zdający rozwiązuje zadanie dla stożka, to otrzymuje **0 punktów**, nawet jeśli rozwiązanie tego innego zadania jest poprawne.
4. Za rozwiązanie z konkretną wartością liczbową w miejsce P zdający otrzymuje **0 punktów**.