CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016

FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA”)

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

CZERWIEC 2016

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Odp.	A	D	B	A	C

Zadania kodowane

Zadanie 6.

9	2	3

Zadanie 7.

3	1	4

Zadania otwarte

Zadanie 8. (0–4)

Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$.

Rozwiązanie

Obie strony nierówności $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$ możemy podnieść do kwadratu, bo przyjmują wyłącznie wartości dodatnie. Otrzymujemy:

$(a+b)(c+d) \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$

$ac + ad + bc + bd \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$

$ad + bc \geq 2\sqrt{abcd}$

$\left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2 \geq 0$.

Nierówność $\left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych $a, b, c, d > 0$, co kończy dowód.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zauważy, że obie strony nierówności $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$ są dodatnie i można nierówność obustronnie podnieść do kwadratu.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ………………………………………………2 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci: $(a+b)(c+d) \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci: $ad + bc \geq 2\sqrt{abcd}$.

Rozwiązanie pełne .... **4 p.**

Zdający przeprowadzi pełny dowód.

Uwaga:
Jeżeli zdający przy podnoszeniu prawej strony nierówności do kwadratu otrzymuje wyrażenie $ac+bd$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

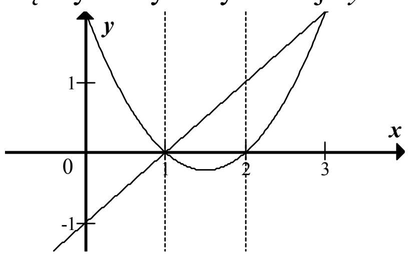
Zadanie 9. (0–4)
Rozwiąż nierówność $\left|x^2-3x+2\right| \geq |x-1|$.

I sposób rozwiązania
Zauważmy, że nierówność możemy zapisać w postaci równoważnej kolejno jako:

$$|x-1|\cdot|x-2| \geq |x-1|,$$
$$|x-1|\cdot\left(|x-2|-1\right) \geq 0.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $|x-1| \geq 0$, więc nierówność $|x-1|\cdot\left(|x-2|-1\right) \geq 0$ jest równoważna nierówności $|x-2|-1 \geq 0$, czyli $|x-2| \geq 1$. Z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej, otrzymujemy $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 3, +\infty)$.

II sposób rozwiązania
Naszkicujmy w układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = x^2 - 3x + 2$ oraz $y = x - 1$.



Rozważmy nierówność kolejno w przedziałach $(-\infty, 1)$, $\langle 1, 2)$ oraz $\langle 2, +\infty)$.

Gdy $x \in (-\infty, 1)$, to wtedy $\left|x^2-3x+2\right| = x^2-3x+2$ oraz $|x-1| = -(x-1)$, a nierówność przyjmuje postać

$$x^2-3x+2 \geq -x+1,$$
$$x^2-2x+1 \geq 0,$$
$$(x-1)^2 \geq 0.$$

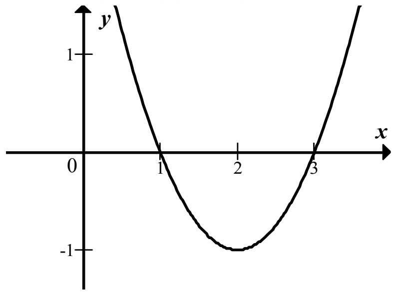
Nierówność ta jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x, zatem każda liczba $x \in (-\infty, 1)$ jest rozwiązaniem nierówności.

Gdy $x \in \langle 1, 2)$, to wtedy $\left|x^2-3x+2\right| = -\left(x^2-3x+2\right)$ oraz $|x-1| = x-1$, a nierówność przyjmuje postać

$$-x^2+3x-2 \geq x-1,$$
$$x^2-2x+1 \leq 0,$$
$$(x-1)^2 \leq 0.$$

Nierówność ta jest prawdziwa tylko dla $x=1$. Zatem w przedziale $\langle 1,2)$ tylko liczba $x=1$ jest rozwiązaniem nierówności.
Gdy $x\in\langle 2,+\infty)$, to wtedy $|x^2-3x+2|=x^2-3x+2$ oraz $|x-1|=x-1$, a nierówność przyjmuje postać

$$x^2-3x+2\ge x-1,$$
$$x^2-4x+3\ge 0,$$
$$(x-1)(x-3)\ge 0,$$



$$x\in(-\infty,1\rangle\cup\langle 3,+\infty).$$

Zatem w przedziale $\langle 2,+\infty)$ rozwiązaniem nierówności jest każda liczba $x\in\langle 3,+\infty)$.
W rezultacie rozwiązaniem nierówności $|x^2-3x+2|\ge|x-1|$ jest każda liczba

$$x\in(-\infty,1\rangle\cup\langle 3,+\infty).$$

Schemat punktowania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 p.
gdy
- zapisze, że $|x-1|\cdot|x-2|=|x^2-3x+2|$

albo
- zapisze, że nierówność należy rozważyć w każdym z przedziałów $(-\infty,1)$, $\langle 1,2)$, $\langle 2,+\infty)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
gdy
- zapisze nierówność w postaci iloczynowej: $|x-1|\cdot(|x-2|-1)\ge 0$

albo
- zapisze poprawnie nierówność w każdym z przedziałów: $(-\infty,1)$, $\langle 1,2)$, $\langle 2,+\infty)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
gdy
- zapisze, że nierówność $|x^2-3x+2|\ge|x-1|$ jest równoważna nierówności $|x-2|\ge 1$

albo
- zapisze poprawnie nierówność w każdym z przedziałów $(-\infty,1)$, $\langle 1,2)$, $\langle 2,+\infty)$ i rozwiąże poprawnie tę nierówność w jednym lub dwóch spośród ww. przedziałów.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
gdy zapisze rozwiązanie nierówności, np.: $x\in(-\infty,1\rangle\cup\langle 3,+\infty)$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozważy wszystkie przedziały otwarte, tj. $(-\infty, 1)$, $(1,2)$, $(2,+\infty)$, to otrzymuje **o 1 punkt mniej**, niż wynika to z osiągniętego przez niego etapu rozwiązania zadania.
2. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności $|x-1|\cdot(|x-2|-1)\geq 0$ przez $|x-1|$, nie zakładając, że $|x-1|>0$ i konsekwentnie rozwiąże nierówność do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

III sposób rozwiązania

Ponieważ obie strony nierówności $|x^2-3x+2|\geq|x-1|$ są nieujemne, więc podnosząc je do kwadratu otrzymujemy nierówność równoważną

$$\left(x^2-3x+2\right)^2\geq(x-1)^2,$$
$$x^4-6x^3+13x^2-12x+4\geq x^2-2x+1,$$
$$x^4-6x^3+12x^2-10x+3\geq 0.$$

Zauważmy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^4-6x^3+12x^2-10x+3$, gdyż $1^4-6\cdot 1^3+12\cdot 1^2-10\cdot 1+3=0$. Zatem wielomian W jest podzielny przez dwumian $x-1$. Stosując algorytm Hornera, otrzymujemy

	1	–6	12	–10	3
1	1	–5	7	–3	0

Zatem $W(x)=(x-1)\left(x^3-5x^2+7x-3\right)$. Liczba 1 jest też pierwiastkiem wielomianu $P(x)=x^3-5x^2+7x-3$, gdyż $1^3-5\cdot 1^2+7\cdot 1-3=0$. Dzieląc ten wielomian przez $x-1$, otrzymujemy

	1	–5	7	–3
1	1	–4	3	0

Zatem $W(x)=(x-1)^2\left(x^2-4x+3\right)$. Trójmian kwadratowy x^2-4x+3 ma dwa pierwiastki $x_1=1$, $x_2=3$, więc $W(x)=(x-1)^3(x-3)$. Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $(x-1)^2\geq 0$, więc nierówność $W(x)\geq 0$ jest równoważna nierówności kwadratowej

$$(x-1)(x-3)\geq 0,$$

której rozwiązaniem jest każda liczba $x\in\left(-\infty, 1\right\rangle\cup\left\langle 3, +\infty\right)$.

Uwaga:

Nierówność $\left(x^2-3x+2\right)^2\geq(x-1)^2$ możemy też przekształcić równoważnie

$$\left(x^2-3x+2\right)^2-(x-1)^2\geq 0,$$
$$\left(x^2-3x+2-x+1\right)\left(x^2-3x+2+x-1\right)\geq 0,$$
$$\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2-2x+1\right)\geq 0,$$
$$(x-1)(x-3)(x-1)^2\geq 0,$$

a dalej tak samo jak w III sposobie rozwiązania.

Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $\left(x^2-3x+2\right)^2 \ge \left(x-1\right)^2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej

- $\left(x-1\right)\left(x^3-5x^2+7x-3\right)\ge 0$

albo

- $\left(x^2-3x+2-x+1\right)\left(x^2-3x+2+x-1\right)\ge 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $\left(x-1\right)^3\left(x-3\right)\ge 0$

albo

- wyznaczy wszystkie pierwiastki wielomianu $W\left(x\right)=x^4-6x^3+12x^2-10x+3$ i naszkicuje wykres tego wielomianu (lub wykresy odpowiednich czynników tego wielomianu).

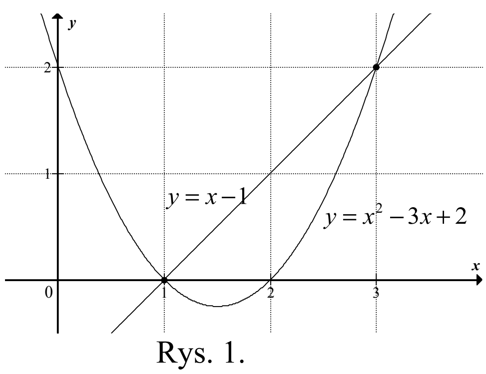
Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności: $x\in\left(-\infty, 1\right\rangle \cup \left\langle 3, +\infty\right)$.

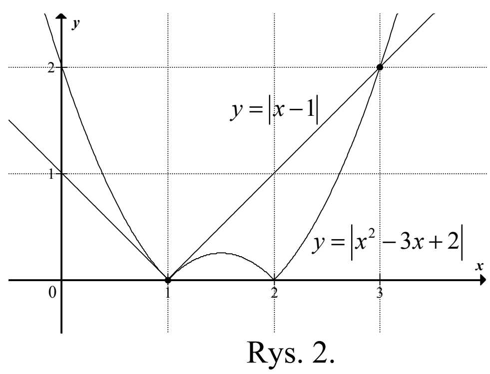
IV sposób rozwiązania

Naszkicujmy w układzie współrzędnych wykresy funkcji $f\left(x\right)=\left|x^2-3x+2\right|$ oraz $g\left(x\right)=\left|x-1\right|$, przekształcając odpowiednio parabolę o równaniu $y=x^2-3x+2$ oraz prostą o równaniu $y=x-1$.

Ponieważ $x^2-3x+2=\left(x-1\right)\left(x-2\right)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, więc parabola przecina oś Ox w punktach $\left(1,0\right)$ i $\left(2,0\right)$, a jej wierzchołkiem jest punkt $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.



Rys. 1.



Rys. 2.

Wykresy funkcji f i g przecinają się tylko w dwóch punktach: $(1,0)$, $(3,2)$. Wystarczy wykazać, że równanie $|x^2-3x+2|=|x-1|$ ma tylko dwa rozwiązania. Równanie to jest równoważne alternatywie równań

$$x^2-3x+2=x-1 \text{ lub } x^2-3x+2=-x+1,$$
$$x^2-4x+3=0 \text{ lub } x^2-2x+1=0,$$
$$(x-1)(x-3)=0 \text{ lub } (x-1)^2=0.$$

Stąd $x=1$ lub $x=3$.

Schemat punktowania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający narysuje w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x)=|x^2-3x+2|$ i $g(x)=|x-1|$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający odczyta z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x)\geq g(x)$: $x\in(-\infty,1\rangle\cup\langle 3,+\infty)$, ale nie uzasadni, że wykresy funkcji f i g mają tylko dwa punkty wspólne.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający odczyta z rysunku zbiór rozwiązań nierówności $f(x)\geq g(x)$: $x\in(-\infty,1\rangle\cup\langle 3,+\infty)$ oraz uzasadni, że wykresy funkcji f i g mają tylko dwa punkty wspólne.

Uwagi:

1. Akceptujemy przyjęcie bez uzasadnienia, że dla $x>2$ wykresy funkcji f i g przecinają się w jednym punkcie $(3,2)$. Wymagamy natomiast uzasadnienia, że dla $x\leq 2$ wykresy tych funkcji mają tylko jeden punkt wspólny. Zdający może np. zauważyć, że prosta o równaniu $y=x-1$ jest styczna do paraboli o równaniu $y=-x^2+3x-2$ w punkcie $(1,0)$ tej paraboli, gdyż pochodna funkcji kwadratowej $h(x)=-x^2+3x-2$ jest równa $h'(x)=-2x+3$, a punkt $(1,0)$ leży na prostej o równaniu $y=x-1$, na wykresie funkcji h oraz $h'(1)=-2\cdot 1+3=1$.
2. Jeżeli błędnie odczyta odciętą jednego z punktów wspólnych wykresów funkcji f i g i nie uzasadni, że wykresy tych funkcji mają tylko dwa punkty przecięcia, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

Zadanie 10. (0–3)

Dany jest ciąg (a_n) określony dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$, w którym $a_4 = 4$ oraz dla każdej liczby $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $a_{n+1} = a_n + n - 4$. Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) i ustal, czy ciąg ten jest malejący.

Rozwiązanie

Ponieważ $a_4 = 4$ i $a_4 = a_3 + 3 - 4$, więc $a_3 = 5$.

Analogicznie $a_3 = a_2 + 2 - 4$, więc $a_2 = 7$ oraz $a_2 = a_1 + 1 - 4$, zatem $a_1 = 10$.

Ponieważ $a_5 = a_4 + 4 - 4 = a_4$, więc ciąg ten nie jest malejący.

Uwaga:

Możemy też zauważyć, że $a_{n+1} - a_n = n - 4$. Różnica ta jest ujemna tylko dla $n < 4$, a więc tylko pierwsze cztery wyrazy tego ciągu maleją. Dla $n = 4$ różnica jest równa 0, co oznacza, że czwarty i piąty wyraz ciągu jest taki sam. Ciąg ten nie jest zatem malejący.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy

- obliczy trzeci wyraz ciągu: $a_3 = 5$

albo

- uzasadni, że ciąg nie jest malejący.

Uwaga:

Zdający nie musi odwoływać się do definicji ciągu malejącego, wystarczy, że zauważy np., że $a_5 = a_4$ lub zapisze, że dla $n = 4$ różnica $a_{n+1} - a_n = n - 4$ jest równa 0, albo że dla $n > 4$ różnica jest dodatnia.

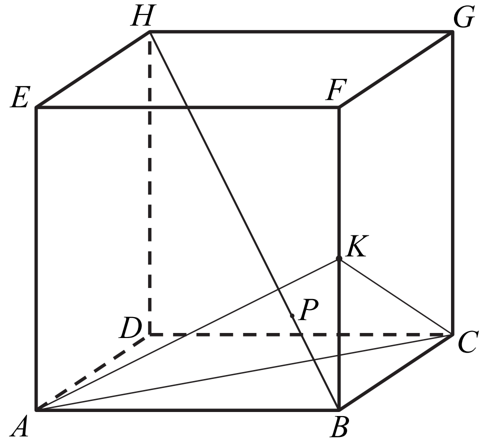
Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = 10$.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu $a_1 = 10$ oraz uzasadni, że ciąg nie jest malejący.

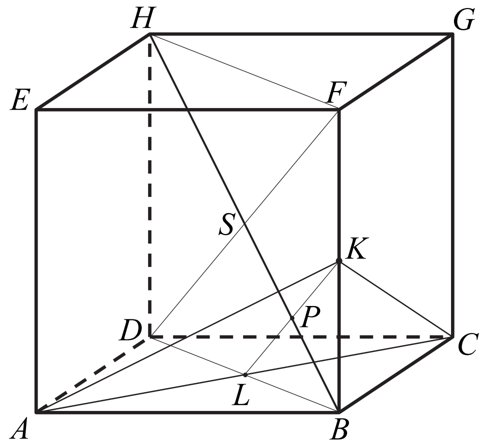
Zadanie 11. (0–3)
Dany jest sześcian *ABCDEFGH*. Przez wierzchołki *A* i *C* oraz środek *K* krawędzi *BF* poprowadzono płaszczyznę, która przecina przekątną *BH* w punkcie *P* (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|BP|:|HP|=1:3$.

Rozwiązanie

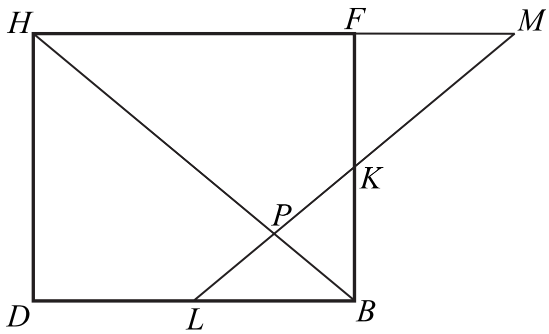
Punkt *P* leży w płaszczyźnie *DBFH* i jest punktem przecięcia przekątnej *BH* z odcinkiem *KL*, gdzie *L* to środek przekątnej *BD* ściany *ABCD*.



Odcinek *KL* łączy środki boków *BD* i *BF* trójkąta *DBF*, więc jest równoległy do boku *DF*. To oznacza, że trójkąt *LBK* jest podobny do trójkąta *DBF* w skali 1:2. Zatem $|BP|=\frac{1}{2}|BS|$. Punkt *S* to środek przekątnej *BH* sześcianu, więc $|BP|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|BH|=\frac{1}{4}|BH|$. Stąd wynika, że $|BP|:|HP|=1:3$. To kończy dowód.

Uwaga:
Tezę możemy udowodnić też w inny sposób.

Sposób I
Niech M oznacza punkt przecięcia prostych LK i HF.



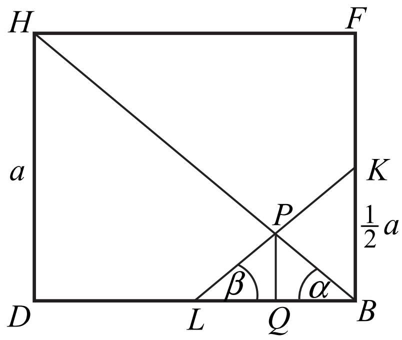
Wówczas trójkąty LBK i MFK są przystające, gdyż oba są prostokątne, $|\sphericalangle LKB| = |\sphericalangle MKF|$ (kąty wierzchołkowe) i $|KB| = |KF|$. Stąd wynika, że $|FM| = |LB| = \frac{1}{2}|DB|$.

Trójkąty LBP i MHP są podobne ($|\sphericalangle LBP| = |\sphericalangle MHP|$ i $|\sphericalangle BLP| = |\sphericalangle HMP|$, gdyż są to pary kątów naprzemianległych, a proste LB i HM są równoległe). Stąd

$$\frac{|BP|}{|HP|} = \frac{|LB|}{|HM|} = \frac{\frac{1}{2}|DB|}{|HF| + |FM|} = \frac{\frac{1}{2}|DB|}{|DB| + \frac{1}{2}|DB|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

To kończy dowód.

Sposób II
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy $|BK| = \frac{1}{2}a$, $|DB| = a\sqrt{2}$, $|DB| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Zatem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|HD|}{|DB|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ i } \operatorname{tg}\beta = \frac{|KB|}{|LB|} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

a więc $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$. Stąd wynika, że $\alpha = \beta$, gdyż α i β to katy ostre. Stąd z kolei wynika, że trójkąt LBP jest równoramienny, więc spodek Q wysokości PQ tego trójkąta jest środkiem odcinka LB. Zatem $|QB| = \frac{1}{2}|LB| = \frac{1}{4}|DB|$.

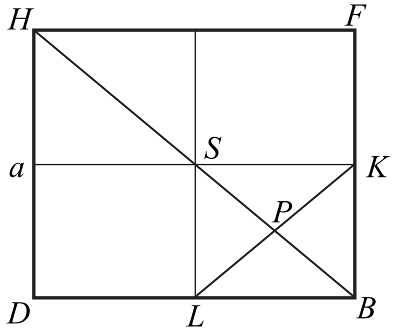
Trójkąty BPQ i BHD są podobne (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku B), więc

$$\frac{|BP|}{|HB|} = \frac{|QB|}{|DB|} = \frac{\frac{1}{4}|DB|}{|DB|} = \frac{1}{4}.$$

Stąd wynika, że $|BP| : |HP| = 1 : 3$.

Sposób III

Poprowadźmy odcinek łączące środki przeciwległych boków prostokąta $BFHD$.



Przecinają się one w punkcie S, który jest środkiem przekątnej BH tego prostokąta. Punkt P jest natomiast środkiem przekątnej prostokąta $BKSL$. Stąd wynika, że

$$|BP| = \frac{1}{4}|BH| \text{ i } |HP| = \frac{3}{4}|BH| .$$

To oznacza, że $|BP|:|HP| = 1:3$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zauważy, że P jest punktem przecięcia przekątnej BH z odcinkiem KL, gdzie L to środek przekątnej BD.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy

- zapisze, że trójkąty LBK i DBF są podobne w skali $1:2$

albo

- zapisze, że odcinek KL jest obrazem odcinka FD w jednokładności o środku B i skali $\frac{1}{2}$,

albo

- wykaże, że trójkąt LBP jest równoramienny np. wykaże, że $|\sphericalangle PBL| = |\sphericalangle PLB|$,

albo

- poprowadzi odcinki łączące środek przekątnej BH z punktami K i L

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy wykaże, że $|BP|:|HP| = 1:3$.

Zadanie 12. (0–4)

Liczba m jest sumą odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania

$$k^2x^2+(k-1)x+1=0\text{, gdzie } k\neq 0.$$

Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x)=2^m$.

Rozwiązanie

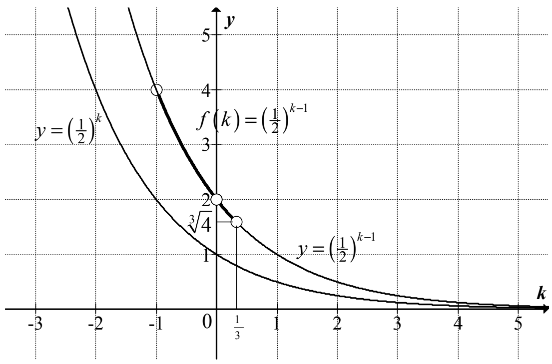
Równanie $k^2x^2+(k-1)x+1=0$ z niewiadomą x ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $k\neq 0$ i $(k-1)^2-4k^2>0$, a więc dla $k\in(-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right)$. Suma m odwrotności rozwiązań jest określona wtedy, gdy $x_1x_2\neq 0$, a więc (ze wzoru Viete'a) gdy $\frac{1}{k^2}\neq 0$. To zachodzi dla każdej wartości $k\in(-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right)$. Zatem

$$m=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{k-1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}}=-(k-1).$$

Funkcja f jest więc określona wzorem

$$f(k)=2^{-(k-1)}=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}\text{ dla } k\in(-1,0)\cup\left(0,\tfrac{1}{3}\right).$$

Wykres funkcji f otrzymamy, przesuwając wykres funkcji wykładniczej $g(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k$ o wektor $\vec{u}=[1,0]$, a następnie biorąc ten fragment otrzymanego wykresu, który odpowiada argumentom $k\in(-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right)$.



Funkcja h, określona wzorem $h(k)=2^{-(k-1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ jest malejąca, $h(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1-1}=4$, $h(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$, $h\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}-1}=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$, więc zbiorem wartości funkcji f jest $\left(\sqrt[3]{4},2\right)\cup(2,4)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający rozwiąże nierówność $\Delta>0$: $k\in\left(-1,\frac{1}{3}\right)\setminus\{0\}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający wyznaczy sumę odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania w zależności od k:

$$\text{np.}\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-k+1\,.$$

Rozwiązanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający obliczy wartości funkcji wykładniczej h, określonej wzorem $h(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ dla argumentów $-1, 0, \frac{1}{3}$: $h(-1)=4$ $h(0)=2$, $h\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt[3]{4}$

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający wykorzysta monotoniczność funkcji wykładniczej i wyznaczy zbiór wartości funkcji f: $\left(\sqrt[3]{4},4\right)\setminus\{2\}$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze i rozwiąże warunek $\Delta\geq 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie sumę odwrotności różnych rozwiązań danego równania, ale utworzy funkcję wykładniczą o niepopranym wzorze, to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający nie uwzględni warunku $k\neq 0$ i wyznaczy zbiór wartości: $\left(\sqrt[3]{4},4\right)$, to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający błędnie rozwiąże nierówność $\Delta>0$, ale przy wyznaczaniu zbioru wartości funkcji uwzględni warunek $k\neq 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
5. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże nierówność $\Delta>0$ i warunek $k\neq 0$ uwzględni dopiero przy wyznaczaniu zbioru wartości funkcji f, to może otrzymać maksymalną liczbę punktów za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający niepoprawnie rozwiąże nierówność $\Delta>0$ i przy wyznaczaniu zbioru wartości funkcji nie uwzględni warunku $k\neq 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
7. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy sumę odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania w zależności od k, zapisze wzór funkcji f, stosując inną interpretację zmiennej niż przedstawiona w powyższym rozwiązaniu, to może otrzymać maksymalną liczbę punktów za całe rozwiązanie.
8. Akceptujemy następujące interpretacje.

I sposób interpretacji
Za taką odpowiedź zdający powinien otrzymać maksymalną punktację. Jeśli przyjąć, że równanie $k^2x^2+(k-1)x+1=0$ to równanie z niewiadomą x i parametrem k, gdzie $k\neq 0$, to wtedy funkcja f zmiennej x jest stała i zbiorem jej wartości jest $\left\{2^m\right\}$.

II sposób interpretacji

Jeśli przyjąć, że równanie $k^2x^2+(k-1)x+1=0$ to równanie z niewiadomą x i parametrem k, a funkcję f potraktować jako funkcję zmiennej k, to zbiorem wartości funkcji f jest

$$\left(\sqrt[3]{4},2\right)\cup(2,4).$$

9. Jeśli zdający wyznaczy m w zależności od k (np. $m=-k+1$), ale nie zapisze warunku istnienia dwóch różnych pierwiastków równania kwadratowego i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 13. (0–3)

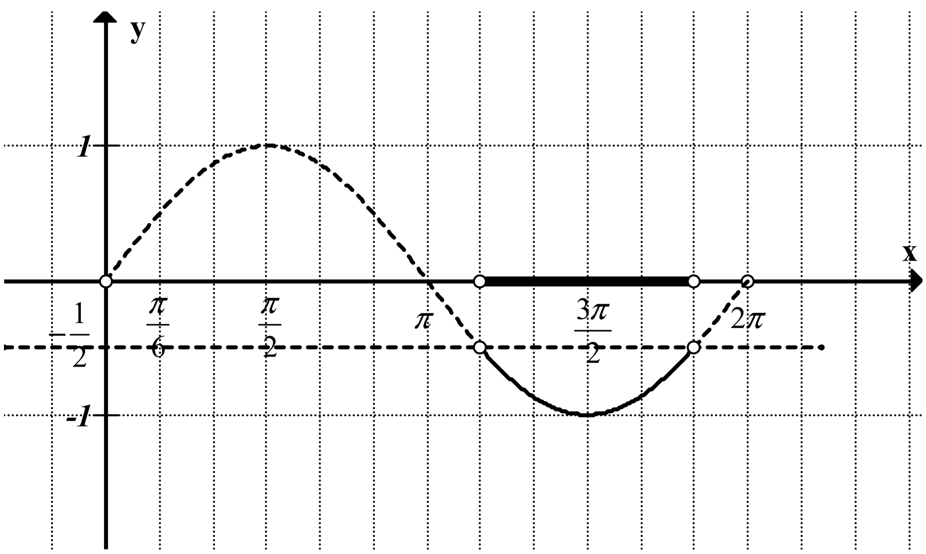
Rozwiąż nierówność $\left(2\sin x-3\right)\left(2\sin x+1\right)>0$ w przedziale $x\in(0,2\pi)$.

Rozwiązanie I sposób (metoda podstawienia)

Podstawmy $\sin x=t$, otrzymamy nierówność $\left(2t-3\right)\left(2t+1\right)>0$.

Stąd $t\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$, czyli $\sin x<-\frac{1}{2}$ lub $\sin x>\frac{3}{2}$.

Nierówność $\sin x>\frac{3}{2}$ jest sprzeczna, zatem rozwiązujemy nierówność $\sin x<-\frac{1}{2}$ w przedziale $x\in\left(0,2\pi\right)$.



Rozwiązanie: $x\in\left(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania .... 1 p.

Zdający poda rozwiązanie nierówności $(2t-3)(2t+1)>0$: $t\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

i zapisze go za pomocą alternatywy nierówności $\sin x<-\frac{1}{2}$ lub $\sin x>\frac{3}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający

- zauważy, że nierówność $\sin x>\frac{3}{2}$ jest sprzeczna

albo

- rozwiąże nierówność $\sin x<-\frac{1}{2}$: $x\in\left(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$ rozwiąże nierówność $\sin x<-\frac{1}{2}$:
$$x\in\left(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający zauważy, że nierówność $\sin x>\frac{3}{2}$ jest sprzeczna i rozwiąże nierówność $\sin x<-\frac{1}{2}$:
$$x\in\left(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right).$$

Rozwiązanie II sposób „zbiór wartości”

Zdający zauważy, że nierówność $2\sin x-3<0$ spełniona jest dla $x\in R$.

Zatem, aby spełniona była nierówność $(2\sin x-3)(2\sin x+1)>0$ wystarczy rozwiązać warunek $2\sin x+1<0$.

Stąd $\sin x<-\frac{1}{2}$, czyli $x\in\left(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$.

Schemat punktowania

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający:

- zauważy, że nierówność $2\sin x-3<0$ spełniona jest dla $x\in R$

albo

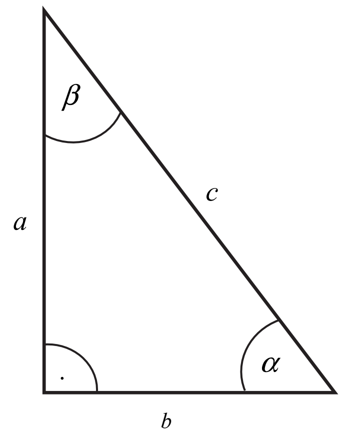
- rozwiąże nierówność $\sin x<-\frac{1}{2}$: $x\in\left(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... **3 p.**
Zdający zauważy, że nierówność $2\sin x - 3 < 0$ spełniona jest dla $x \in R$ i rozwiąże nierówność $\sin x < -\frac{1}{2}$: $x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$.

Zadanie 14. (0–4)
W trójkącie prostokątnym stosunek różnicy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{1}{2}$. Oblicz cosinusy kątów ostrych tego trójkąta.

Rozwiązanie (I sposób)
Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia.



Bez zmniejszania ogólności rozwiązania możemy założyć, że $a > b$. Otrzymujemy zatem równanie

$$\frac{a-b}{c} = \frac{1}{2},$$

które jest równoważne równaniu

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{1}{2}.$$

Oznacza to, że $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$, a stąd wynika, że $\sin\alpha = \cos\alpha + \frac{1}{2}$. Podstawiamy tę zależność do tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i otrzymujemy równanie

$$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - \frac{3}{4} = 0.$$

To równanie ma dwa rozwiązania: $\cos\alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}$.

Ponieważ α jest kątem ostrym, więc drugie rozwiązanie należy odrzucić. Pozostaje obliczyć cosinus drugiego kąta ostrego. Ale $\beta = 90° - \alpha$, więc $\cos\beta = \sin\alpha$.

Z równości

$$\sin\alpha = \cos\alpha + \frac{1}{2}$$

otrzymujemy $\cos\beta = \sin\alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze równość $\frac{a-b}{c} = \frac{1}{2}$ w postaci $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający podstawi równość $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{2}$ do tożsamości $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$ i doprowadzi otrzymane równanie do postaci uporządkowanego równania kwadratowego, np.

$$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - \frac{3}{4} = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze dwa rozwiązania tego równania

$$\cos\alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4},\ \cos\alpha = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}$$

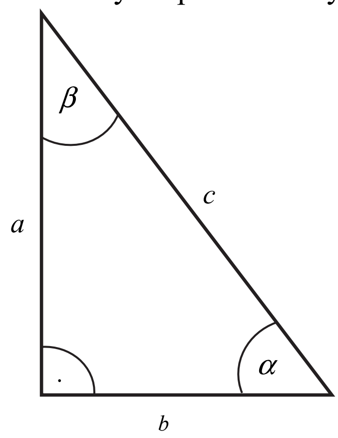
oraz odrzuci ujemne rozwiązanie tego równania i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy i zapisze cosinusy obu kątów ostrych tego trójkąta: $\cos\alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$, $\cos\beta = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$.

Rozwiązanie (II sposób)

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia.



Bez straty ogólności rozwiązania możemy założyć, że $a > b$. Otrzymujemy zatem równanie

$$\frac{a-b}{c} = \frac{1}{2},$$

Z tej równości wyznaczamy $a = b + \frac{c}{2}$. Ponieważ dany trójkąt jest trójkątem prostokątnym, więc stosujemy twierdzenie Pitagorasa i mamy:

$$\left(b + \frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = c^2,$$

które jest równoważne równaniu

$$3c^2 - 4bc - 8b^2 = 0.$$

Otrzymane równanie można potraktować jako równanie kwadratowe z niewiadomą c i parametrem b. Wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie równania

$$\Delta = 112b^2 = \left(4b\sqrt{7}\right)^2,$$

jest liczbą dodatnią ($b > 0$), więc istnieją dwa rozwiązania tego równania:

$$c_1 = \frac{4b + 4b\sqrt{7}}{6} = \frac{2b\left(1+\sqrt{7}\right)}{3} \text{ oraz } c_2 = \frac{4b - 4b\sqrt{7}}{6} = \frac{2b\left(1-\sqrt{7}\right)}{3}.$$

Ponieważ $c_2 < 0$, więc to rozwiązanie należy odrzucić, bo c jest długością boku w trójkącie. Obliczamy zatem cosinusy obu kątów ostrych tego trójkąta, stosując definicję funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{b}{\frac{2b\left(1+\sqrt{7}\right)}{3}} = \frac{3}{2\left(1+\sqrt{7}\right)} = \frac{3\left(1-\sqrt{7}\right)}{-12} = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}.$$

Podstawiamy $c = \frac{2b\left(1+\sqrt{7}\right)}{3}$ do równości $a = b + \frac{c}{2}$ i otrzymujemy $a = \frac{b\left(4+\sqrt{7}\right)}{3}$.

Zatem cosinus drugiego kąta ostrego jest równy:

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{\frac{b\left(4+\sqrt{7}\right)}{3}}{\frac{2b\left(1+\sqrt{7}\right)}{3}} = \frac{4+\sqrt{7}}{2\left(1+\sqrt{7}\right)} = \frac{-3\left(1+\sqrt{7}\right)}{-12} = \frac{1+\sqrt{7}}{4}.$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze równość $\frac{a-b}{c}=\frac{1}{2}$, a następnie wyznaczy z niej jedną zmienną np.

$$a=b+\frac{c}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający skorzysta z twierdzenia Pitagorasa i doprowadzi równanie $\left(b+\frac{c}{2}\right)^2+b^2=c^2$ do równania kwadratowego z niewiadomą c i parametrem b

$$3c^2-4bc-8b^2=0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze dodatnie rozwiązanie tego równania $c_1=\frac{2b\left(1+\sqrt{7}\right)}{3}$, a następnie obliczy cosinus kąta α:

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy i zapisze cosinusy obu kątów ostrych tego trójkąta: $\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$, $\cos\beta=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$.

Zadanie 15. (0–4)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste.

Rozwiązanie (I sposób)

Rozpatrujemy dwa przypadki:

a) Jeśli pierwszą cyfrą jest cyfra nieparzysta, którą możemy wybrać na 5 sposobów, to z czterech pozostałych miejsc wybieramy dwa, na które wstawiamy cyfry nieparzyste. Możemy to zrobić na 5^2 sposobów. Na pozostałych dwóch miejscach umieszczamy cyfry parzyste na 5^2 sposobów. Liczba wszystkich utworzonych w ten sposób liczb pięciocyfrowych wynosi $5\cdot\binom{4}{2}\cdot5^2\cdot5^2=18750$.

b) Jeśli pierwszą cyfrą jest cyfra parzysta, którą możemy wybrać na 4 sposoby, to z czterech pozostałych miejsc wybieramy trzy, na które wstawiamy cyfry nieparzyste. Możemy to zrobić na 5^3 sposobów. Na pozostałym miejscu umieszczamy cyfrę parzystą na 5 sposobów. Liczba wszystkich utworzonych w ten sposób liczb pięciocyfrowych wynosi $4\cdot\binom{4}{3}\cdot 5^3\cdot 5=10000$.

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych spełniających podane w zadaniu warunki jest $18750+10000=28750$.

Rozwiązanie (II sposób)

W pierwszej kolejności obliczymy liczbę wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementami zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ oraz dokładnie 3 wyrazy to cyfry nieparzyste: $\binom{5}{3}\cdot 5^3\cdot 5^2$. Wśród niech jest $\binom{4}{3}\cdot 5^3\cdot 5$ ciągów, których pierwszym wyrazem jest cyfra 0. Pozostałe ciągi reprezentują rozpatrywane liczby.

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych spełniających podane w zadaniu warunki jest: $\binom{5}{3}\cdot 5^3\cdot 5^2-\binom{4}{3}\cdot 5^3\cdot 5=\frac{4\cdot 5}{2}\cdot 5^5-4\cdot 5^4=10\cdot 5\cdot 5^4-4\cdot 5^4=46\cdot 5^4=28750$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający

- rozpatrzy dwa przypadki ze względu na to, czy pierwsza cyfra liczby (licząc od lewej strony) jest parzysta, czy nieparzysta i w każdym z tych przypadków zapisze na ile sposobów można wybrać pierwszą cyfrę: 4 w pierwszy przypadku, 5 w drugim przypadku

albo

- zapisze, że jest $\binom{5}{3}$ możliwości rozmieszczenia trzech cyfr nieparzystych,

albo

- zapisze 10 przypadków rozmieszczenia trzech cyfr nieparzystych:

  N N _ _ _
  N _ N _ _
  N _ _ N _
  N _ _ _ N
  _ N N _ _
  _ N _ N _
  _ N _ _ N
  _ _ N N _
  _ _ N _ N
  _ _ _ N N,

albo

- zapisze, że alby obliczyć liczbę wszystkich rozpatrywanych liczb wystarczy od liczby wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementami zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ oraz dokładnie 3 wyrazy to cyfry nieparzystymi odjąć liczbę wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementy zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ i pierwszym wyrazem ciągu jest cyfra 0

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze liczbę wszystkich

- rozpatrywanych liczb, których pierwsza cyfra jest parzysta: $4\cdot\binom{4}{3}\cdot 5^3\cdot 5$

albo

- rozpatrywanych liczb, których pierwsza cyfra jest nieparzysta: $5\cdot\binom{4}{2}\cdot 5^2\cdot 5^2$,

albo

- liczbę wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementami zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ oraz dokładnie 3 wyrazy to cyfry nieparzystymi: $\binom{5}{3}\cdot 5^3\cdot 5^2$,

albo

- zapisze liczbę wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementy zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ i pierwszym wyrazem ciągu jest cyfra 0: $\binom{4}{3}\cdot 5^3\cdot 5$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający zapisze liczbę wszystkich rozpatrywanych liczb pięciocyfrowych

- $4\cdot\binom{4}{3}\cdot 5^3\cdot 5+5\cdot\binom{4}{2}\cdot 5^2\cdot 5^2$

albo

- $\binom{5}{3}\cdot 5^3\cdot 5^2-\binom{4}{3}\cdot 5^3\cdot 5$,

albo

- obliczy bezbłędnie liczbę liczb pięciocyfrowych spełniających warunki zadania, których pierwszą cyfrą jest cyfra nieparzysta, a liczbę liczb pięciocyfrowych spełniających warunki zadania, których pierwszą cyfrą jest cyfra parzysta obliczy z błędem rachunkowym (lub odwrotnie) i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy liczbę rozpatrywanych liczb.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający, obliczy, że wszystkich liczb pięciocyfrowych spełniających podane w zadaniu warunki jest 28750.

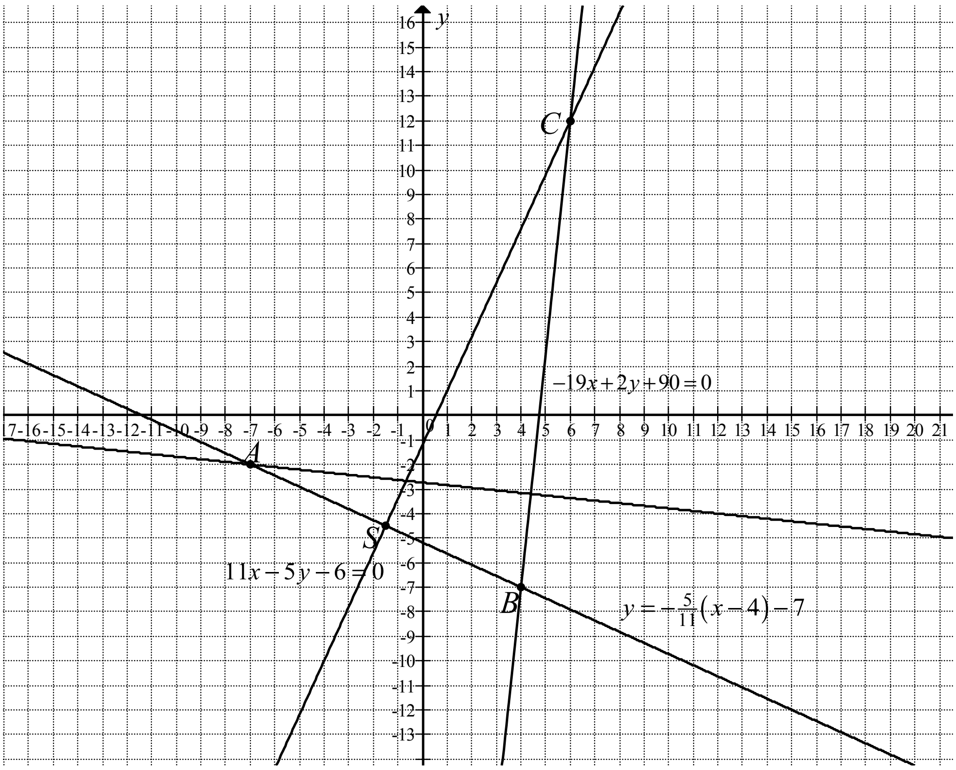
Uwaga:
Jeżeli zdający pominie jeden z 10 przypadków rozmieszczenia trzech cyfr nieparzystych i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 16. (0–5)

Punkty $A=(-7,-2)$ i $B=(4,-7)$ są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego *ABC*, a wysokość opuszczona z wierzchołka *A* tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x+19y+52=0$. Oblicz współrzędne wierzchołka *C*.

Rozwiązanie (I sposób)

Trójkąt *ABC* jest równoramienny, więc wierzchołek *C* leży na symetralnej podstawy *AB* i na prostej *BC*, która jest prostopadła do w prostej o równaniu $2x+19y+52=0$ (wysokości opuszczonej z wierzchołka *A* tego trójkąta).



Niech *S* będzie środkiem odcinka *AB*. Ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-7+4}{2},\frac{-2-7}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{9}{2}\right).$$

Prosta *AB* ma równanie postaci $y=\frac{-7-(-2)}{4-(-7)}(x-4)-7$, czyli $y=-\frac{5}{11}(x-4)-7$.

Symetralna odcinka *AB* jest prostopadła do prostej o równaniu $y=-\frac{5}{11}(x-4)-7$ i przechodzi przez punkt *S*, zatem ma postać $y=\frac{11}{5}\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{9}{2}$, czyli $y=\frac{11}{5}x-\frac{6}{5}$ lub $11x-5y-6=0$.

Prosta *BC* jest prostopadła do prostej o równaniu $2x+19y+52=0$ i przechodzi przez punkt $B=(4,-7)$, więc ma równanie postaci $-19(x-4)+2(y+7)=0$, czyli $-19x+2y+90=0$.

Obliczmy współrzędne punktu C przecięcia tych dwóch prostych, rozwiązując układ równań

$$y=\frac{11}{5}x-\frac{6}{5} \text{ i } -19x+2y+90=0 .$$

Stąd

$$-19x+2\left(\frac{11}{5}x-\frac{6}{5}\right)+90=0,$$
$$-19\cdot 5x+2(11x-6)+90\cdot 5=0,$$
$$73x=438,$$
$$x=6 .$$

Zatem $y=\frac{11}{5}\cdot 6-\frac{6}{5}=\frac{60}{5}=12$, więc $C=(6,12)$.

Uwaga:
Równanie symetralnej podstawy AB trójkąta możemy wyznaczyć nieco inaczej.

Sposób a). Wykorzystamy fakt, że jest ona prostopadła do wektora AB i przechodzi przez środek S odcinka AB. Współrzędne wektora AB są równe $\overrightarrow{AB}=\left[4-(-7),-7-(-2)\right]=[11,-5]$.
Symetralna odcinka AB jest prostopadła wektora AB i przechodzi przez punkt $S=\left(-\frac{3}{2},-\frac{9}{2}\right)$, więc ma ona równanie postaci $11\left(x+\frac{3}{2}\right)-5\left(y+\frac{9}{2}\right)=0$, czyli $11x-5y-6=0$.

Sposób b). Wykorzystamy fakt, że symetralna odcinka jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny równo oddalonych od jego końców. Niech $C=(x,y)$ będzie dowolnym punktem leżącym na symetralnej odcinka AB. Zatem $|AC|=|BC|$. Stąd, otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{(x+7)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+7)^2},$$
$$(x+7)^2+(y+2)^2=(x-4)^2+(y+7)^2,$$
$$x^2+14x+49+y^2+4y+4=x^2-8x+16+y^2+14y+49,$$
$$11x-5y-6=0, \text{ czyli } y=\tfrac{11}{5}x-\tfrac{6}{5}.$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- wyznaczy współrzędne środka S podstawy AB i zapisze równanie prostej AB:
  $S=\left(-\frac{3}{2},-\frac{9}{2}\right)$, $y=-\frac{5}{11}(x-4)-7$

albo

- wyznaczy współrzędne środka S podstawy AB i obliczy współczynnik kierunkowy prostej AB: $S=\left(-\frac{3}{2},-\frac{9}{2}\right)$, $a=-\frac{5}{11}$,

albo

- wyznaczy współrzędne środka S podstawy AB i obliczy współrzędne wektora AB:
  $S=\left(-\frac{3}{2},-\frac{9}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}=[11,-5]$,

albo

- zapisze równanie symetralnej odcinka AB w postaci
  $\sqrt{(x+7)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+7)^2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający wyznaczy:

- równanie prostej SC: $y=\frac{11}{5}x-\frac{6}{5}$ lub $11x-5y-6=0$

albo

- równanie prostej BC: $-19x+2y+90=0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.

Zdający wyznaczy równania prostych SC i BC: $y=\frac{11}{5}x-\frac{6}{5}$ (lub $11x-5y-6=0$), $-19x+2y+90=0$ i zapisze, że C jest punktem przecięcia tych dwóch prostych.

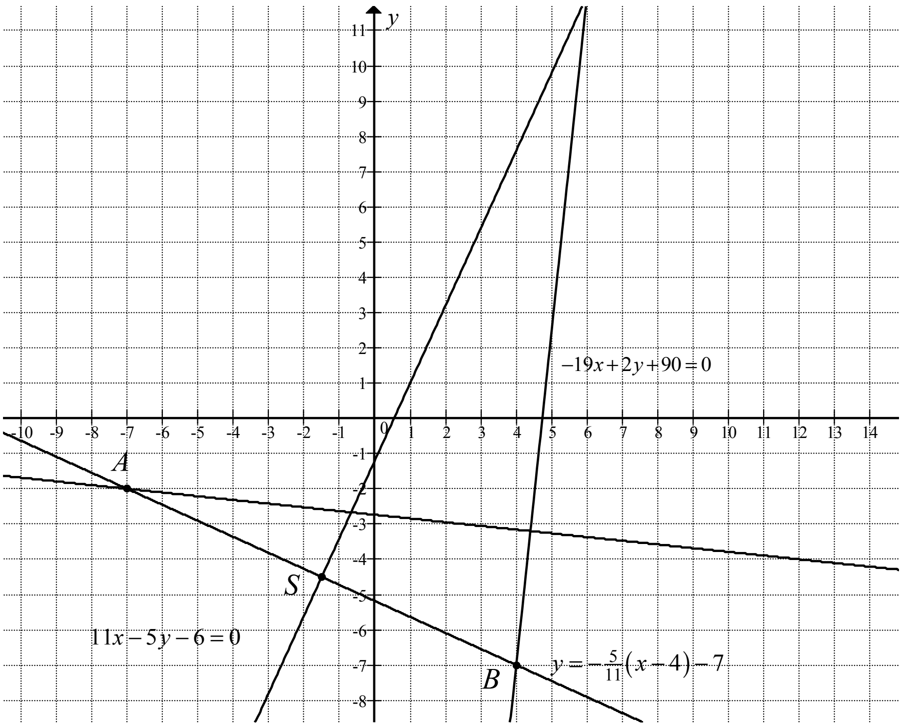
Uwaga:
Jeżeli zdający wyznaczając równania prostych SC i BC popełni błąd rachunkowy, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka C: $(6,12)$.

Rozwiązanie (II sposób)

Trójkąt ABC jest równoramienny, więc $|AC|=|BC|$ i punkt C leży na prostej BC, która jest prostopadła do w prostej o równaniu $2x+19y+52=0$ (wysokości opuszczonej z wierzchołka A tego trójkąta).



Prosta BC jest prostopadła do prostej o równaniu $2x+19y+52=0$ i przechodzi przez punkt $B=(4,-7)$, więc ma równanie postaci

$$-19(x-4)+2(y+7)=0,$$
$$-19x+2y+90=0,$$
$$y=\frac{19}{2}x-45.$$

Zatem punkt C ma współrzędne $C=\left(x_c,\frac{19}{2}x_c-45\right)$.

Trójkąt ABC jest równoramienny i jego podstawą jest AB, zatem $|AC|=|BC|$.

Zatem

$$\sqrt{(x_c+7)^2+\left(\frac{19}{2}x_c-45+2\right)^2}=\sqrt{(x_c-4)^2+\left(\frac{19}{2}x_c-45+7\right)^2}.$$

Stąd

$$(x_c+7)^2+\left(\frac{19}{2}x_c-45+2\right)^2=(x_c-4)^2+\left(\frac{19}{2}x_c-45+7\right)^2,$$

$$(x_c+7)^2+\left(\frac{19}{2}x_c-43\right)^2=(x_c-4)^2+\left(\frac{19}{2}x_c-38\right)^2,$$

$$x_c^2+14x_c+49+\left(\frac{19}{2}x_c\right)^2-2\cdot\frac{19}{2}x_c\cdot 43+1849=x_c^2-8x_c+16+\left(\frac{19}{2}x_c\right)^2-2\cdot\frac{19}{2}x_c\cdot 38+1444,$$

$$14x_c+49-19\cdot 43x_c+1849=-8x_c+16-19\cdot 38x_c+1444,$$

$$14x_c+722x_c-817x_c+8x_c=-1849+16-49+1444,$$

$$-73x=-438,$$

$$x=6.$$

Stąd $y=\frac{19}{2}\cdot 6-45=57-45=12$, więc $C=(6,12)$.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze, że $|AC|=|BC|$ i punkt C leży na prostej BC, która jest prostopadła do prostej o równaniu $2x+19y+52=0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający wyznaczy równanie prostej BC: $-19x+2y+90=0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.

Zdający zapisze współrzędne punktu C w zależności od jednej zmiennej $C=\left(x_c,\frac{19}{2}x_c-45\right)$ oraz zapisze równanie z jedną niewiadomą pozwalające obliczyć współrzędną punktu C, np.:

$$\sqrt{(x_c+7)^2+\left(\frac{19}{2}x_c-45+2\right)^2}=\sqrt{(x_c-4)^2+\left(\frac{19}{2}x_c-45+7\right)^2}.$$

Uwaga:

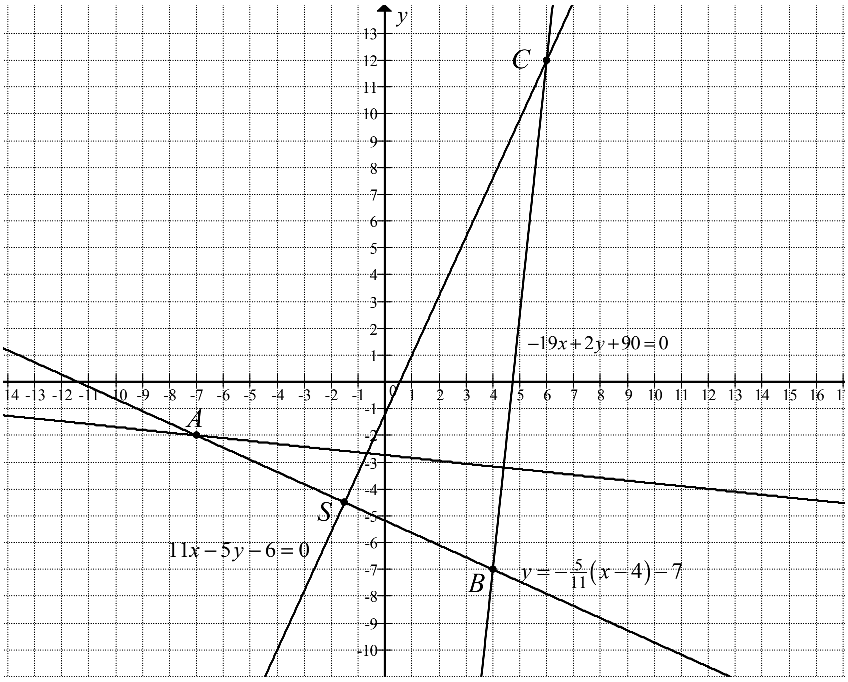
Jeżeli zdający zapisze współrzędne punktu C w zależności od jednej zmiennej $C=\left(x_c,\frac{19}{2}x_c-45\right)$ i nie zapisze równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć współrzędną punktu C, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka C: $(6,12)$.

Rozwiązanie (III sposób)

Trójkąt ABC jest równoramienny, więc wierzchołek C leży na symetralnej podstawy AB



Niech $C=(c_1,c_2)$. Punkt C leży na prostej BC, która jest prostopadła do w prostej o równaniu $2x+19y+52=0$ (zawierającej wysokość opuszczoną z wierzchołka A tego trójkąta). Prosta BC jest prostopadła do prostej o równaniu $2x+19y+52=0$, więc wektor $\overrightarrow{BC}$ ma współrzędne $\overrightarrow{BC}=k\cdot[2,19]$ oraz $\overrightarrow{BC}=[c_1-4,c_2+7]$.

Zatem

$[c_1-4,c_2+7]=k\cdot[2,19]$,

$c_1-4=k\cdot 2,\quad c_2+7=k\cdot 19$,

$c_1=2k+4,\quad c_2=19k-7$.

Punkt C ma współrzędne $C=(2k+4,19k-7)$.

Niech S będzie środkiem odcinka AB. Ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-7+4}{2},\frac{-2-7}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{9}{2}\right).$$

Prosta AB ma równanie postaci $y=\frac{-7-(-2)}{4-(-7)}(x-4)-7$, czyli $y=-\frac{5}{11}(x-4)-7$.

Symetralna odcinka AB jest prostopadła do prostej o równaniu $y=-\frac{5}{11}(x-4)-7$ i przechodzi przez punkt S, zatem ma postać

$$y=\frac{11}{5}\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{9}{2},$$

$$y=\frac{11}{5}x-\frac{6}{5}.$$

Zatem

$$19k-7=\frac{11}{5}(2k+4)-\frac{6}{5},$$
$$95k-35=11(2k+4)-6,$$
$$95k-22k=35=44-6+35,$$
$$73k=73,$$
$$k=1.$$

Uwaga:
Obliczenia, gdy prosta *SC* ma postać $11x-5y-6=0$.

$$11(2k+4)-5(19k-7)-6=0,$$
$$22k+44-95k+35-6=0,$$
$$73k=73,$$
$$k=1.$$

Stąd punkt *C* ma współrzędne $C=(2\cdot 1+4,19\cdot 1-7)=(6,12)$.

Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze:

- prosta *BC* jest prostopadła do prostej o równaniu $2x+19y+52=0$, więc wektor $\overrightarrow{BC}$ ma współrzędne $\overrightarrow{BC}=k\cdot[2,19]$

albo

- współrzędne punktu C, np.: $C=(c_1,c_2)$ oraz współrzędne wektora $\overrightarrow{BC}$ w postaci, np. $\overrightarrow{BC}=[c_1-4,c_2+7]$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu *C* w zależności od parametru *k*,

np. $C=(2k+4,19k-7)$.

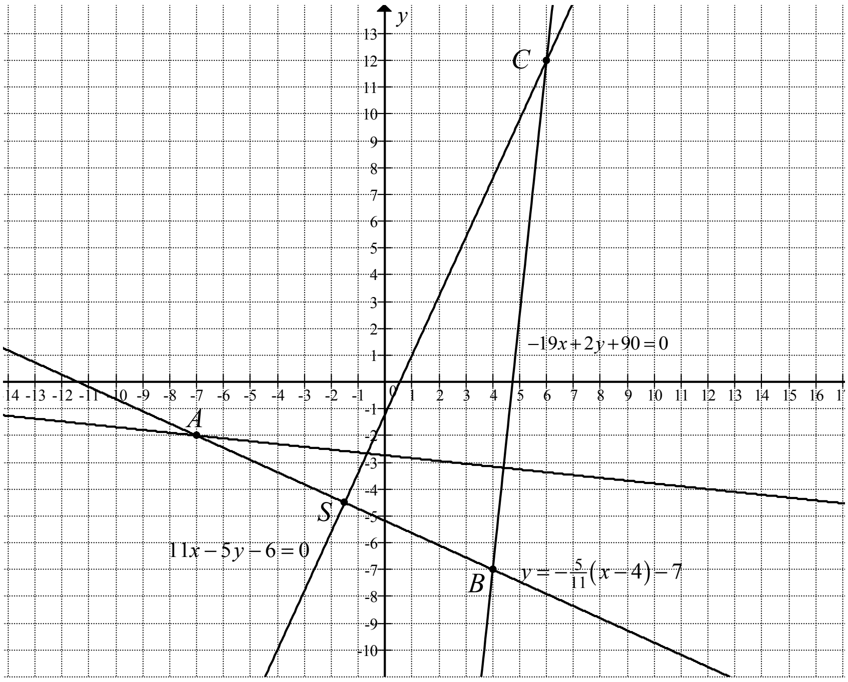
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.

Zdający wyznaczy równanie symetralnej odcinka *AB*: $11x-5y-6=0$ i wstawi współrzędne punktu $C=(2k+4,19k-7)$ do tego równania.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka *C*: $(6,12)$

Uwaga:
Zdający może przeprowadzić następujące rozważania.
Punkt C leży na prostej BC, która jest prostopadła do w prostej o równaniu $2x+19y+52=0$ (wysokości opuszczonej z wierzchołka A tego trójkąta).



Punkt C ma współrzędne $C=(c_1,c_2)$.

Prosta BC jest prostopadła do prostej o równaniu $2x+19y+52=0$, więc wektor $\overrightarrow{BC}$ może mieć współrzędne $\overrightarrow{BC}=[2,19]$ oraz $\overrightarrow{BC}=[c_1-4,c_2+7]$.

Zatem

$$[c_1-4,c_2+7]=[2,19],$$
$$c_1-4=2,\ c_2+7=19,$$
$$c_1=6,\ c_2=12.$$

Punkt C <u>może mieć</u> współrzędne $C=(6,12)$.

Następnie należy sprawdzić jeden z warunków :

a) czy zachodzi równość $|AC|=|BC|$,
b) czy punkt $C=(6,12)$ leży na symetralnej podstawy AB.

Sprawdzenie warunku $|AC|=|BC|$

Obliczamy

$$|AC|=\sqrt{(6+7)^2+(12+2)^2}=\sqrt{13^2+14^2}=\sqrt{169+196}=\sqrt{365}$$

oraz

$$|BC|=\sqrt{(6-4)^2+(12+7)^2}=\sqrt{2^2+19^2}=\sqrt{4+361}=\sqrt{365}\ .$$

Stąd $|AC|=|BC|$ i punkt $C=(6,12)$.

Sprawdzenie czy punkt $C=(6,12)$ leży na symetralnej podstawy *AB*.

Wyznaczamy równanie symetralnej *SC*.

Niech *S* będzie środkiem odcinka *AB*. Ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$S=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-7+4}{2},\frac{-2-7}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{9}{2}\right).$$

Prosta *AB* ma równanie postaci $y=\frac{-7-(-2)}{4-(-7)}(x-4)-7$, czyli $y=-\frac{5}{11}(x-4)-7$.

Symetralna odcinka *AB* jest prostopadła do tej i przechodzi przez punkt *S,* zatem ma postać

$$y=\frac{11}{5}\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{9}{2},$$

$$y=\frac{11}{5}x-\frac{6}{5} \text{ lub } 11x-5y-6=0.$$

Sprawdzamy, czy współrzędne punktu $C=(6,12)$ spełniają równanie symetralnej:

$y=\frac{11}{5}\cdot 6-\frac{6}{5}=\frac{66-6}{5}=12$. Zatem wierzchołek C ma współrzędne: $(6,12)$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający tylko poda współrzędne punktu $C=(6,12)$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający poda współrzędne punktu $C=(6,12)$ i konsekwentnie sprawdzi czy zachodzi równość $|AC|=|BC|$, to może otrzymać **5 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający poda współrzędne punktu $C=(6,12)$, wyznaczy równanie symetralnej podstawy *AB* i konsekwentnie sprawdzi, czy punkt *C* leży na tej symetralnej, to może otrzymać **5 punktów** za całe rozwiązanie.

Zadanie 17. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni całkowitej jest równe 2π. Oblicz promień podstawy tego walca, który ma największą objętość. Podaj tę największą objętość.

Rozwiązanie

Niech r oraz h oznaczają, odpowiednio, promień i wysokość walca ($r > 0$ i $h > 0$). Ponieważ pole P powierzchni całkowitej tego walca jest określone wzorem $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, więc otrzymujemy równanie $2\pi = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, które jest równoważne równaniu $1 = r^2 + rh$. Z tego równania wyznaczamy wysokość walca, $h = \frac{1-r^2}{r}$. Zauważamy, że nierówność $h > 0$ jest równoważna nierówności $0 < r < 1$. Objętość walca równą $V = \pi r^2 h$ zapisujemy jako funkcję zmiennej r:

$$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{1-r^2}{r} = \pi r - \pi r^3 \text{, gdzie } 0 < r < 1.$$

Pochodna tej funkcji jest określona wzorem $V'(r) = \pi\left(1-3r^2\right)$ dla $0 < r < 1$. Dla $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ pochodna funkcji przyjmuje wartość zero. Ponadto, dla $0 < r < \frac{\sqrt{3}}{3}$ pochodna funkcji przyjmuje wartości dodatnie, zaś dla $\frac{\sqrt{3}}{3} < r < 1$ wartości dodatnie. Oznacza to, że w punkcie $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ objętość V tego walca osiąga maksimum lokalne. To maksimum lokalne jest jednocześnie największą wartością funkcji $V(r) = \pi r - \pi r^3$ w przedziale $(0, 1)$, ponieważ dla $0 < r \le \frac{\sqrt{3}}{3}$ funkcja V jest rosnąca, a dla $\frac{\sqrt{3}}{3} \le r < 1$ jest malejąca.

Zatem, przy danym polu powierzchni całkowitej, największą objętość ma walec, którego promień podstawy równa się $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Jeżeli $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$, to $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Największa objętość tego walca jest więc równa $V = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) **Pierwszy etap** składa się z trzech części:

- zapisanie równania $2\pi = 2\pi r^2 + 2\pi rh$,
- zapisanie objętości danego walca jako funkcji jednej zmiennej, np.
  $V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{1-r^2}{r} = \pi r - \pi r^3$,
- zapisanie, że dziedziną funkcji $V(r)$ jest przedział $(0,1)$.

Za zapisanie poprawnego równania w **pierwszej** części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**. Za poprawne zapisanie objętości rozważanego walca w **drugiej** części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt,** o ile pierwsza część etapu została zrealizowana bezbłędnie. Punkt za **trzecią** część zdający otrzymuje niezależnie od realizacji dwóch pierwszych części.

b) **Drugi etap** składa się z trzech części:

- zapisanie wzoru pochodnej funkcji $V(r)$, np.: $V'(r) = \pi(1-3r^2)$,
- zapisanie, że w przedziale $(0,1)$ pochodna funkcji V ma jedno miejsce zerowe $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
- zapisanie, że funkcja $V(r)$ osiąga w punkcie $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ maksimum lokalne i uzasadnienie, że to maksimum lokalne jest jednocześnie największą wartością tej funkcji.

Za poprawne rozwiązanie **każdej** z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt,** o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) **Trzeci etap**:

1 punkt zdający otrzyma za zapisanie, że dla $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ walec ma największą objętość równą $V = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$.

Uwaga:
Punkty za realizację danego etapu przyznajemy tylko wówczas, gdy zdający rozwiązał poprawnie poprzedni etap zadania.