

Matura 2026, poziom podstawowy, sierpień

Rozwiązania i odpowiedzi, arkusz MMAP-P0-100-2608 z 24 sierpnia 2026

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadania zamknięte:

1. A 2. B 3. B 4. C 6. C 7. B 8. A
13.1 F, P 13.2 D 14.1 C 14.2 D 16. C 17. C 18. B
20. C 21. C 22.1 D 22.2 A 23.1 A 23.2 A 24. C
25. D 26. D 27. D 28. C

Wyniki zadań otwartych:

5. dowód 9. $x \in (-\frac{1}{3}, 1)$ 10. $x = 8,30$ zł 12. $a = -3$
11. $\langle -3, 1 \rangle$; $\langle -2, 4 \rangle$; $\langle -5, -3 \rangle$ 15. $a_1 = 36$, $r = -6$ 19. $|BC| = 25$
29. mediana 7,5; dominanta 8; prawdopodobieństwo 0,1
30. $P(r) = 20\pi r - 4\pi r^2$, $D = (0, 5)$, $r = 2,5$, pole największe 25π

Zadanie 1. (1 pkt), odpowiedź A

Sposób I: z definicji pierwiastka nieparzystego stopnia

Szukamy liczby, której trzecia potęga daje -27 : $(-3)^3 = -27$, więc $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Szukamy liczby, której piąta potęga daje -1 : $(-1)^5 = -1$, więc $\sqrt[5]{-1} = -1$.

Stąd $\sqrt[3]{-27} + \sqrt[5]{-1} = -3 + (-1) = -4$.

Sposób II: wyłączenie znaku przed pierwiastek

Dla nieparzystego stopnia n zachodzi $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, zatem

$$\sqrt[3]{-27} + \sqrt[5]{-1} = -\sqrt[3]{27} - \sqrt[5]{1} = -3 - 1 = -4$$

Sposób III: zapis potęgowy

$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$ oraz $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$, więc suma wynosi -4 .

Zadanie 2. (1 pkt), odpowiedź B

Sposób I: działania na potęgach

$$\frac{3^{-1} \cdot 4^{0,5}}{3^{-2} \cdot 2^{-1}} = \frac{3^{-1} \cdot 2}{3^{-2} \cdot 2^{-1}} = 3^{-1-(-2)} \cdot 2^{1-(-1)} = 3^1 \cdot 2^2 = 12$$

Skorzystaliśmy z tego, że $4^{0,5} = \sqrt{4} = 2$.

Sposób II: osobno licznik i mianownik

$$\text{Licznik: } 3^{-1} \cdot 4^{0,5} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Mianownik: } 3^{-2} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}.$$

$$\text{Iloraz: } \frac{2}{3} : \frac{1}{18} = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12.$$

Sposób III: sprowadzenie do jednej podstawy w każdym czynniku

$$\frac{3^{-1}}{3^{-2}} \cdot \frac{2^1}{2^{-1}} = 3 \cdot 4 = 12$$

Zadanie 3. (1 pkt), odpowiedź B

Sposób I: wzory na sumę i różnicę logarytmów

$$\log_8 4 + \log_8 32 - \log_8 2 = \log_8 \frac{4 \cdot 32}{2} = \log_8 64 = 2$$

bo $8^2 = 64$.

Sposób II: każdy logarytm osobno

$$\log_8 4 = \frac{2}{3}, \text{ bo } 8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 4.$$

$$\log_8 32 = \frac{5}{3}, \text{ bo } 8^{5/3} = 2^5 = 32.$$

$$\log_8 2 = \frac{1}{3}, \text{ bo } 8^{1/3} = 2.$$

$$\text{Razem: } \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Sposób III: zamiana podstawy na 2

$$\log_8 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = \frac{\log_2 x}{3}, \text{ więc}$$

$$\frac{\log_2 4 + \log_2 32 - \log_2 2}{3} = \frac{2+5-1}{3} = 2$$

Zadanie 4. (1 pkt), odpowiedź C

Sposób I: wzory skróconego mnożenia

$$(a + 1)^2 - (a - 1)^2 = (a^2 + 2a + 1) - (a^2 - 2a + 1) = 4a$$

Sposób II: różnica kwadratów

$$(a + 1)^2 - (a - 1)^2 = [(a + 1) - (a - 1)] \cdot [(a + 1) + (a - 1)] = 2 \cdot 2a = 4a$$

Sposób III: sprawdzenie liczbowe i eliminacja

$$\text{Dla } a = 1: (1 + 1)^2 - (1 - 1)^2 = 4 - 0 = 4.$$

Odpowiedź A daje 0, B daje 2, C daje 4, D daje 6, więc poprawna jest odpowiedź C.

Zadanie 5. (2 pkt), dowód

Wykaż, że dla każdej nieparzystej liczby całkowitej n liczba $3n^2 + 6n + 15$ jest podzielna przez 12.

Sposób I: podstawienie $n = 2k + 1$

Niech $n = 2k + 1$, gdzie k jest liczbą całkowitą (taką postać ma każda liczba nieparzysta). Wtedy

$$3(2k + 1)^2 + 6(2k + 1) + 15 = 3(4k^2 + 4k + 1) + 12k + 6 + 15$$

$$= 12k^2 + 12k + 3 + 12k + 21 = 12k^2 + 24k + 24 = 12(k^2 + 2k + 2)$$

Liczba $k^2 + 2k + 2$ jest całkowita, więc cała liczba jest podzielna przez 12, co kończy dowód.

Sposób II: zwinienie do kwadratu

$$3n^2 + 6n + 15 = 3(n^2 + 2n + 5) = 3[(n + 1)^2 + 4]$$

Skoro n jest nieparzysta, to $n + 1$ jest parzysta, czyli $n + 1 = 2m$ dla pewnej liczby całkowitej m . Zatem

$$3[(2m)^2 + 4] = 3(4m^2 + 4) = 12(m^2 + 1)$$

co jest liczbą podzielną przez 12.

Sposób III: podzielność przez 3 i przez 4 osobno

Czynnik 3 wyłączamy od razu: $3n^2 + 6n + 15 = 3(n^2 + 2n + 5)$.

Wystarczy pokazać, że $n^2 + 2n + 5$ dzieli się przez 4. Dla $n = 2k + 1$:

$$n^2 + 2n + 5 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k + 2 + 5 = 4k^2 + 8k + 8 = 4(k^2 + 2k + 2)$$

Czyli badana liczba jest równa $3 \cdot 4(k^2 + 2k + 2) = 12(k^2 + 2k + 2)$ i dzieli się przez 12.

Zadanie 6. (1 pkt), odpowiedź C

Sposób I: mnożenie obu stron przez 15

$$\frac{7+2x}{5} \geq \frac{4}{15} \quad / \cdot 15$$

$$3(7 + 2x) \geq 4 \Rightarrow 21 + 6x \geq 4 \Rightarrow 6x \geq -17 \Rightarrow x \geq -\frac{17}{6}$$

Ponieważ $-\frac{17}{6} \approx -2,83$, najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność jest -2 .

Sposób II: przeniesienie wyrazu wolnego

$$\frac{7}{5} + \frac{2x}{5} \geq \frac{4}{15} \Rightarrow \frac{2x}{5} \geq \frac{4}{15} - \frac{21}{15} = -\frac{17}{15}$$

$$x \geq -\frac{17}{15} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{17}{6} \approx -2,83$$

Najmniejsza liczba całkowita w tym zbiorze to -2 .

Sposób III: sprawdzenie kandydatów

Dla $x = -3$: $\frac{7-6}{5} = \frac{1}{5} = \frac{3}{15} < \frac{4}{15}$, nierówność nie jest spełniona.

Dla $x = -2$: $\frac{7-4}{5} = \frac{3}{5} = \frac{9}{15} \geq \frac{4}{15}$, nierówność jest spełniona.

Lewa strona rośnie wraz z x , więc -2 jest najmniejszą taką liczbą całkowitą.

Zadanie 7. (1 pkt), odpowiedź B

Sposób I: rozkład na czynniki

$$(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \text{ lub } x^2 = 9$$

Rozwiązania: $x = -2$, $x = 2$, $x = -3$, $x = 3$.

Suma: $-2 + 2 - 3 + 3 = 0$.

Sposób II: symetria pierwiastków

Równanie zawiera tylko parzyste potęgi x , więc każdy pierwiastek występuje razem z liczbą do niego

przeciwną: pary -2 i 2 oraz -3 i 3 . Suma każdej pary wynosi 0 , więc suma wszystkich rozwiązań też jest równa 0 .

Sposób III: wzory Viète'a dla równania czwartego stopnia

Po wymnożeniu: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Współczynnik przy x^3 jest równy 0 , a suma pierwiastków wielomianu stopnia czwartego to $-\frac{a_3}{a_4} = -\frac{0}{1} = 0$.

Zadanie 8. (1 pkt), odpowiedź A

Sposób I: rozkład mianowników i mnożenie przez odwrotność

$$\frac{4}{x^2+2x} \cdot \frac{5x}{4-x^2} = \frac{4}{x(x+2)} \cdot \frac{4-x^2}{5x} = \frac{4}{x(x+2)} \cdot \frac{(2-x)(2+x)}{5x}$$

Skracamy czynnik $(x+2)$:

$$= \frac{4(2-x)}{5x^2} = \frac{8-4x}{5x^2}$$

Sposób II: podstawienie liczbowe i eliminacja

Dla $x = 1$ wyrażenie wyjściowe daje $\frac{4}{3} : \frac{5}{3} = \frac{4}{5}$.

Sprawdzamy odpowiedzi dla $x = 1$: A daje $\frac{8-4}{5} = \frac{4}{5}$ (zgodne), B daje $-\frac{4}{5}$, C daje $\frac{20}{9 \cdot (-1)} = -\frac{20}{9}$, D daje $\frac{20}{9}$.

Poprawna jest odpowiedź A.

Sposób III: zapis jednym ułamkiem piętrowym

$$\frac{\frac{4}{x(x+2)}}{\frac{5x}{(2-x)(2+x)}} = \frac{4(2-x)(2+x)}{5x^2(x+2)} = \frac{4(2-x)}{5x^2} = \frac{8-4x}{5x^2}$$

Zadanie 9. (2 pkt), rozwiązanie nierówności

Rozwiąż nierówność $x(3x - 2) < 1$.

Sposób I: postać ogólna i wyróżnik

$$x(3x - 2) < 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 < 0$$

Dla trójmianu $3x^2 - 2x - 1$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$.

$$x_1 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2+4}{6} = 1$$

Ramiona paraboli skierowane są w górę, więc wartości ujemne trójmian przyjmuje między miejscami zerowymi:

$$x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$$

Sposób II: rozkład na czynniki

$$3x^2 - 2x - 1 = 3x^2 - 3x + x - 1 = 3x(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(3x + 1)$$

Iloczyn $(x - 1)(3x + 1)$ jest ujemny, gdy czynniki mają różne znaki, czyli dla $-\frac{1}{3} < x < 1$.

Odpowiedź: $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$.

Sposób III: odgadnięty pierwiastek i wzory Viète'a

Dla $x = 1$ mamy $3 - 2 - 1 = 0$, więc $x_1 = 1$ jest miejscem zerowym. Z iloczynu pierwiastków $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$ wynika $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Parabola o dodatnim współczynniku przy x^2 leży poniżej osi między pierwiastkami, stąd $x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right)$.

Zadanie 10. (2 pkt), cena czekolady 8,30 zł

Układ: $8x + 4y = 82$ oraz $3x + 9y = 60$, gdzie x to cena czekolady, y to cena batonu.

Sposób I: metoda podstawiania

Drugie równanie dzielimy przez 3: $x + 3y = 20$, czyli $x = 20 - 3y$. Wstawiamy do pierwszego:

$$8(20 - 3y) + 4y = 82 \Rightarrow 160 - 24y + 4y = 82 \Rightarrow -20y = -78$$

$$y = 3,9 \Rightarrow x = 20 - 3 \cdot 3,9 = 20 - 11,7 = 8,3$$

Czekolada kosztuje 8,30 zł (baton 3,90 zł).

Sprawdzenie: $8 \cdot 8,3 + 4 \cdot 3,9 = 66,4 + 15,6 = 82$.

Sposób II: metoda przeciwnych współczynników

Pierwsze równanie mnożymy przez 9, drugie przez 4:

$$72x + 36y = 738, \quad 12x + 36y = 240$$

Odejmujemy stronami: $60x = 498$, czyli $x = 8,3$.

Cena czekolady wynosi 8,30 zł.

Sposób III: wyznaczniki (metoda Cramera)

$$W = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 72 - 12 = 60, \quad W_x = \begin{vmatrix} 82 & 4 \\ 60 & 9 \end{vmatrix} = 738 - 240 = 498$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{498}{60} = 8,3$$

Sposób IV: sprowadzenie do wspólnej liczby batonów

Drugie równanie mnożymy przez $\frac{4}{9}$, aby przy y stał współczynnik 4:

$$\frac{4}{3}x + 4y = \frac{80}{3}$$

Odejmujemy je od pierwszego równania:

$$8x - \frac{4}{3}x = 82 - \frac{80}{3} \Rightarrow \frac{20}{3}x = \frac{166}{3} \Rightarrow x = 8,3$$

Zadanie 11. (3 pkt), odczyt własności funkcji

Funkcja dana kawałkami: $f(x) = 1$ dla $x \in (-5, -3)$, $f(x) = -x - 2$ dla $x \in (-3, 1)$, $f(x) = x - 4$ dla $x \in (1, 5)$.

Sposób I: odczyt z wykresu

1. Najniższy punkt wykresu to $(1, -3)$ i ta wartość jest osiągnięta, najwyższa wartość to 1 (odcinek poziomy po lewej stronie). Wszystkie wartości pomiędzy są przyjmowane, więc zbiorem wartości jest przedział $\langle -3, 1 \rangle$.
2. Wykres leży poniżej osi Ox między miejscami zerowymi $x = -2$ oraz $x = 4$, czyli dla $x \in (-2, 4)$.
3. Największa wartość 1 jest przyjmowana na całym odcinku poziomym, czyli dla $x \in (-5, -3)$.

Sposób II: rachunkowo, ze wzoru

Na $(-5, -3)$ funkcja przyjmuje stałą wartość 1.

Na $(-3, 1)$ funkcja $-x - 2$ maleje od wartości bliskich 1 (dla x bliskich -3) do -3 dla $x = 1$, więc daje przedział $\langle -3, 1 \rangle$.

Na $(1, 5)$ funkcja $x - 4$ rośnie od wartości bliskich -3 do wartości bliskich 1, więc daje przedział $(-3, 1)$.

Suma tych zbiorów to $\langle -3, 1 \rangle$.

Wartości ujemne: $-x - 2 < 0 \Leftrightarrow x > -2$, czyli $x \in (-2, 1)$; oraz $x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$, czyli $x \in (1, 4)$. Razem $x \in (-2, 4)$.

Największa wartość to 1, przyjmowana dla $x \in (-5, -3)$, bo na pozostałych częściach $-x - 2 < 1$ oraz $x - 4 < 1$.

Odpowiedzi

1. $\langle -3, 1 \rangle$
2. $(-2, 4)$
3. $(-5, -3)$

Zadanie 12. (2 pkt), $a = -3$

$f(x) = 5x + a^2 + 6a$, wykres przecina oś Oy w punkcie $(0, -9)$.

Sposób I: warunek $f(0) = -9$ i wzór skróconego mnożenia

$$f(0) = 5 \cdot 0 + a^2 + 6a = a^2 + 6a = -9$$

$$a^2 + 6a + 9 = 0 \Rightarrow (a + 3)^2 = 0 \Rightarrow a = -3$$

Sposób II: wyróżnik równania kwadratowego

Z równania $a^2 + 6a + 9 = 0$ mamy $\Delta = 36 - 36 = 0$, więc jedyne rozwiązanie to

$$a = \frac{-6}{2} = -3$$

Sposób III: minimum funkcji kwadratowej zmiennej a

Wyraz wolny funkcji liniowej to $a^2 + 6a$ i ma być równy -9 . Funkcja $g(a) = a^2 + 6a$ ma wierzchołek w $a = -\frac{6}{2} = -3$ i wartość najmniejszą $g(-3) = -9$. Wartość -9 jest więc przyjmowana dokładnie raz, dla $a = -3$.

Zadanie 13.1 (1 pkt), odpowiedzi F, P

$$f(x) = 2(x - 2)^2 + 4.$$

Sposób I: analiza postaci kanonicznej

Wierzchołek paraboli to $W = (2, 4)$, a współczynnik $a = 2 > 0$, więc najmniejsza wartość funkcji wynosi 4. Funkcja nie przyjmuje wartości 0, czyli nie ma miejsc zerowych, zdanie pierwsze jest **fałszywe (F)**. Oś symetrii wykresu jest prosta $x = p$, czyli $x = 2$, zdanie drugie jest **prawdziwe (P)**.

Sposób II: wyróżnik postaci ogólnej

Po przekształceniu $f(x) = 2x^2 - 8x + 12$, więc $\Delta = 64 - 96 = -32 < 0$, czyli brak miejsc zerowych (F). Oś symetrii: $x = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$ (P).

Sposób III: rozwiązanie równania $f(x) = 0$ i badanie symetrii

$$2(x - 2)^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = -2$$

Kwadrat nie może być ujemny, więc równanie nie ma rozwiązań (F). Ponadto $f(2 + t) = f(2 - t) = 2t^2 + 4$ dla każdego t , czyli oś symetrii jest prosta $x = 2$ (P).

Zadanie 13.2 (1 pkt), odpowiedź D

Sposób I: wymnożenie postaci kanonicznej

$$f(x) = 2(x - 2)^2 + 4 = 2(x^2 - 4x + 4) + 4 = 2x^2 - 8x + 8 + 4 = 2x^2 - 8x + 12$$

Sposób II: przeliczenie współczynników

Z postaci kanonicznej $a = 2$, $p = 2$, $q = 4$. Wtedy $b = -2ap = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$ oraz $c = ap^2 + q = 2 \cdot 4 + 4 = 12$, czyli $f(x) = 2x^2 - 8x + 12$.

Sposób III: sprawdzenie wartości i eliminacja

$f(0) = 2 \cdot 4 + 4 = 12$, co odrzuca odpowiedzi A oraz B.

$f(1) = 2 \cdot 1 + 4 = 6$; odpowiedź C daje $2 - 4 + 12 = 10$, odpowiedź D daje $2 - 8 + 12 = 6$.

Poprawna jest odpowiedź D.

Zadanie 14.1 (1 pkt), odpowiedź C

$$a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5} \text{ dla } n \geq 1.$$

Sposób I: podstawienie $n = 3$

$$a_3 = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-5} = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 32 \cdot 4 = 128$$

Sposób II: cofanie się od piątego wyrazu

Dla $n = 5$ mamy $a_5 = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 32$. Iloraz ciągu wynosi $\frac{1}{2}$, więc cofając się mnożymy przez 2:
 $a_4 = 64, \quad a_3 = 128$

Sposób III: uproszczenie wzoru

$$a_n = 32 \cdot 2^{5-n} = 2^5 \cdot 2^{5-n} = 2^{10-n}$$

$$\text{Stąd } a_3 = 2^7 = 128.$$

Zadanie 14.2 (1 pkt), odpowiedź D

Sposób I: iloraz kolejnych wyrazów

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}}{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}} = \frac{1}{2}$$

Iloraz jest stały, więc ciąg jest geometryczny. Wszystkie wyrazy są dodatnie, a $q = \frac{1}{2} \in (0, 1)$, więc ciąg jest malejący.

Sposób II: kilka pierwszych wyrazów

$$a_1 = 2^9 = 512, a_2 = 256, a_3 = 128, a_4 = 64.$$

Różnice nie są stałe ($-256, -128, -64$), więc ciąg nie jest arytmetyczny; ilorazy są stałe i równe $\frac{1}{2}$, a wyrazy maleją, więc ciąg jest geometryczny i malejący.

Sposób III: uproszczona postać wzoru

Wykładnik $10 - n$ maleje wraz ze wzrostem n , a funkcja 2^t jest rosnąca, więc wyrazy maleją. Iloraz $\frac{2^{9-n}}{2^{10-n}} = \frac{1}{2}$ jest stały, czyli ciąg jest geometryczny i malejący.

Zadanie 15. (3 pkt), pierwszy wyraz 36, różnica -6

Ciąg arytmetyczny: $S_{10} = 90$, średnia arytmetyczna wyrazów a_1, a_7, a_8 wynosi 10.

Sposób I: wzór na sumę i zapis wyrazów przez pierwszy wyraz oraz różnicę

$$S_{10} = \frac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10 = 90 \Rightarrow 2a_1 + 9r = 18$$

$$\frac{a_1 + a_7 + a_8}{3} = 10 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 6r) + (a_1 + 7r) = 30 \Rightarrow 3a_1 + 13r = 30$$

Z pierwszego równania $a_1 = 9 - 4,5r$. Podstawiamy:

$$3(9 - 4,5r) + 13r = 30 \Rightarrow 27 - 13,5r + 13r = 30 \Rightarrow -0,5r = 3$$

$$r = -6, \quad a_1 = 9 - 4,5 \cdot (-6) = 36$$

$$\text{Sprawdzenie: } S_{10} = 5(72 - 54) = 90, a_7 = 0, a_8 = -6, \text{ więc } \frac{36+0-6}{3} = 10.$$

Sposób II: suma przez pierwszy i ostatni wyraz

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 5(a_1 + a_{10}) = 90 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 18$$

Podstawiając $a_{10} = a_1 + 9r$, otrzymujemy $2a_1 + 9r = 18$, a drugi warunek daje $3a_1 + 13r = 30$.

Rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników: pierwsze równanie mnożymy przez 3, drugie przez 2

:

$$6a_1 + 27r = 54, \quad 6a_1 + 26r = 60$$

Odejmując stronami: $r = -6$, stąd $a_1 = \frac{18 - 9 \cdot (-6)}{2} = 36$.

Sposób III: wykorzystanie wyrazów środkowych

W ciągu arytmetycznym $a_1 + a_{10} = a_5 + a_6$, więc $S_{10} = 5(a_5 + a_6) = 90$, czyli $a_5 + a_6 = 18$.

Z drugiego warunku $a_1 + a_7 + a_8 = 30$, a ponieważ $a_7 + a_8 = a_5 + a_6 + 4r = 18 + 4r$, mamy

$$a_1 + 18 + 4r = 30 \Rightarrow a_1 + 4r = 12$$

Razem z $2a_1 + 9r = 18$ daje to $r = -6$ oraz $a_1 = 36$.

Zadanie 16. (1 pkt), odpowiedź C

Ciąg $(x, x + 4, 2x + 8)$ o wyrazach dodatnich jest geometryczny.

Sposób I: własność wyrazu środkowego

$$(x + 4)^2 = x(2x + 8) \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 2x^2 + 8x \Rightarrow x^2 = 16$$

Wyrazy są dodatnie, więc $x = 4$. Ciąg ma postać $(4, 8, 16)$, a jego iloraz wynosi $q = \frac{8}{4} = 2$.

Sposób II: równość ilorazów

$$\frac{x+4}{x} = \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = 2$$

Stąd $x + 4 = 2x$, czyli $x = 4$, a iloraz $q = 2$.

Sposób III: zapis przez iloraz

Jeśli q jest ilorazem, to $x + 4 = xq$ oraz $2x + 8 = xq^2$. Dzieląc drugie równanie przez pierwsze:

$$q = \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = 2$$

Zadanie 17. (1 pkt), odpowiedź C

Kąt ostry α spełnia $\sin \alpha + \sin^2 \alpha = \cos \alpha - \cos^2 \alpha + 1$.

Sposób I: jedynka trygonometryczna

Przenosimy $\cos^2 \alpha$ na lewą stronę:

$$\sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \cos \alpha + 1$$

Ponieważ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, otrzymujemy

$$\sin \alpha + 1 = \cos \alpha + 1 \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha$$

Dla kąta ostrego $\cos \alpha > 0$, więc dzieląc obie strony przez $\cos \alpha$: $\operatorname{tg} \alpha = 1$.

Sposób II: grupowanie wyrazów

$$\sin \alpha - \cos \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha + 1 - 1 = 0$$

czyli $\sin \alpha = \cos \alpha$, co dla kąta ostrego daje $\alpha = 45^\circ$ i $\operatorname{tg} \alpha = 1$.

Sposób III: sprawdzenie odpowiedzi

Jeśli $\operatorname{tg} \alpha = 1$, to $\alpha = 45^\circ$, a wtedy $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lewa strona: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$. Prawa strona: $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$.

Równość zachodzi, więc poprawna jest odpowiedź C.

Zadanie 18. (1 pkt), odpowiedź B

AC jest średnicą okręgu, β to miara kąta DBC, γ to miara kąta ACD.

Sposób I: kąt oparty na średnicy

Kąt ADC jest kątem wpisanym opartym na średnicy AC, więc $|\angle ADC| = 90^\circ$.

Kąty DBC oraz DAC są kątami wpisanymi opartymi na tym samym łuku DC, zatem $|\angle DAC| = \beta$.

W trójkącie ADC suma kątów wynosi 180° :

$$\beta + 90^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta + \gamma = 90^\circ$$

Sposób II: miary łuków

Kąt wpisany ma miarę połowy łuku, na którym jest oparty:

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot |\widehat{DC}|, \quad \gamma = \frac{1}{2} \cdot |\widehat{AD}|$$

Łuki AD oraz DC tworzą razem półokrąg, bo AC jest średnicą, czyli ich miary sumują się do 180° . Stąd $\beta + \gamma = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$

Sposób III: trójkąty równoramienne z promieni

Punkt S jest środkiem okręgu, więc $|SA| = |SD| = |SC| = r$. Trójkąt ASD jest równoramienny, więc $|\angle SAD| = |\angle SDA|$, a trójkąt DSC jest równoramienny, więc $|\angle SDC| = |\angle SCD| = \gamma$.

Suma kątów trójkąta ADC daje $|\angle DAC| + \gamma + (|\angle DAC| + \gamma) = 180^\circ$, czyli $|\angle DAC| + \gamma = 90^\circ$. Ponieważ $|\angle DAC| = \beta$ (kąty wpisane oparte na łuku DC), otrzymujemy $\beta + \gamma = 90^\circ$.

Zadanie 19. (4 pkt), ramię o długości 25

Trapez równoramienny ABCD: przekątna $AC = 39$ tworzy z dłuższą podstawą AB kąt α o $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, różnica podstaw wynosi 40.

Sposób I: wysokość trapezu i rzuty na dłuższą podstawę

Z jedynki trygonometrycznej: $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$.

Niech E będzie spodkiem wysokości poprowadzonej z C na podstawę AB. W trójkącie prostokątnym AEC:

$$h = |CE| = |AC| \sin \alpha = 39 \cdot \frac{5}{13} = 15, \quad |AE| = |AC| \cos \alpha = 39 \cdot \frac{12}{13} = 36$$

W trapezie równoramiennym rzut ramienia na dłuższą podstawę wynosi $\frac{|AB| - |CD|}{2} = \frac{40}{2} = 20$, czyli $|EB| = 20$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie CEB:

$$|BC| = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$$

Sposób II: twierdzenie cosinusów w trójkącie ABC

Jak wyżej: $|AE| = 36$ oraz $|EB| = 20$, więc $|AB| = 56$ (a wtedy $|CD| = 16$).

W trójkącie ABC znamy $|AB| = 56$, $|AC| = 39$ oraz kąt α między tymi bokami:

$$|BC|^2 = 56^2 + 39^2 - 2 \cdot 56 \cdot 39 \cdot \frac{12}{13} = 3136 + 1521 - 4032 = 625$$

$$|BC| = 25$$

Sposób III: metoda współrzędnych

Umieszczamy trapez w układzie współrzędnych: $A = (0, 0)$, $B = (56, 0)$ (bo $|AB| = 36 + 20 = 56$), $C = (36, 15)$, $D = (20, 15)$.

Wtedy

$$|BC| = \sqrt{(56 - 36)^2 + (0 - 15)^2} = \sqrt{400 + 225} = 25$$

Sprawdzenie: $|AD| = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$, czyli trapez rzeczywiście jest równoramienny, $|CD| = 16$ oraz $|AB| - |CD| = 40$.

Zadanie 20. (1 pkt), odpowiedź C

Sposób I: twierdzenie Pitagorasa

Niech a oznacza długość przyprostokątnej. Wtedy

$$a^2 + a^2 = 8^2 \Rightarrow 2a^2 = 64 \Rightarrow a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Obwód: } 2 \cdot 4\sqrt{2} + 8 = 8\sqrt{2} + 8 = 8(\sqrt{2} + 1).$$

Sposób II: własności trójkąta o kątach 45, 45, 90 stopni

W takim trójkącie przeciwprostokątna jest $\sqrt{2}$ razy dłuższa od przyprostokątnej, więc

$$a = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Obwód wynosi } 8\sqrt{2} + 8 = 8(\sqrt{2} + 1).$$

Sposób III: funkcje trygonometryczne

$$a = 8 \cos 45^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Obwód: } 2a + 8 = 8\sqrt{2} + 8 = 8(\sqrt{2} + 1).$$

Zadanie 21. (1 pkt), odpowiedź C

Sposób I: skala podobieństwa z obwodów

Obwód trójkąta ABC: $6 + 9 + 12 = 27$. Skala podobieństwa:

$$k = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$$

Najkrótszy bok trójkąta KLM: $6 \cdot \frac{4}{3} = 8$.

Sposób II: proporcja

$$\frac{x}{6} = \frac{36}{27} \Rightarrow 27x = 216 \Rightarrow x = 8$$

Sposób III: podział obwodu na części

Boki trójkąta KLM są proporcjonalne do $6 : 9 : 12 = 2 : 3 : 4$. Suma części wynosi 9, więc jedna część to $\frac{36}{9} = 4$, a najkrótszy bok to $2 \cdot 4 = 8$.

Zadanie 22.1 (1 pkt), odpowiedź D

$A = (0, -6)$, $B = (4, 2)$, $C = (0, 4)$.

Sposób I: współczynnik kierunkowy i wyraz wolny

$$a = \frac{2 - (-6)}{4 - 0} = \frac{8}{4} = 2$$

Prosta przechodzi przez $A = (0, -6)$, więc wyraz wolny wynosi $b = -6$, czyli $y = 2x - 6$.

Sposób II: podstawienie punktów do odpowiedzi

Punkt $A = (0, -6)$ spełniają tylko równania z wyrazem wolnym -6 , czyli odpowiedzi B oraz D.

Sprawdzamy punkt $B = (4, 2)$: w odpowiedzi B otrzymujemy $-4 - 6 = -10 \neq 2$, w odpowiedzi D otrzymujemy $2 \cdot 4 - 6 = 2$, co się zgadza.

Sposób III: równanie prostej przez dwa punkty

$$\frac{y - (-6)}{x - 0} = \frac{2 - (-6)}{4 - 0} \Rightarrow y + 6 = 2x \Rightarrow y = 2x - 6$$

Zadanie 22.2 (1 pkt), odpowiedź A

Tangens kąta ostrego CAB w trójkącie prostokątnym o wierzchołkach $A = (0, -6)$, $B = (4, 2)$, $C = (0, 4)$.

Sposób I: kąt prosty przy wierzchołku B i definicja tangensa

Sprawdzamy, gdzie jest kąt prosty. Wektory $\vec{BA} = (-4, -8)$ oraz $\vec{BC} = (-4, 2)$ mają iloczyn skalarny $(-4)(-4) + (-8)(2) = 16 - 16 = 0$, więc kąt prosty jest przy wierzchołku B.

Długości przyprostokątnych:

$$|AB| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}, \quad |BC| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Dla kąta CAB przyprostokątna BC leży naprzeciw, a AB przy kącie:

$$\operatorname{tg} |\angle CAB| = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

Sposób II: nachylenie ramienia AB względem pionowego ramienia AC

Punkty A oraz C mają tę samą pierwszą współrzędną, więc ramię AC jest pionowe.

Idąc od A do B pokonujemy 4 jednostki w poziomie i 8 jednostek w pionie, zatem

$$\operatorname{tg} |\angle CAB| = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Sposób III: pole trójkąta jako kontrola

$|AC| = 4 - (-6) = 10$, a odległość punktu B od prostej AC , czyli od osi Oy , wynosi 4, więc $P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$.

Z drugiej strony $\frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 20$, co potwierdza, że kąt prosty jest przy wierzchołku B.

Stąd

$$\operatorname{tg} |\angle CAB| = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 23.1 (1 pkt), odpowiedź A

$S = (-8, -6)$ jest środkiem odcinka AB , $A = (4, -15)$, $B = (-20, y_B)$.

Sposób I: wzór na środek odcinka

$$y_S = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -6 = \frac{-15 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = -12 + 15 = 3$$

Sprawdzenie pierwszej współrzędnej: $\frac{4 + (-20)}{2} = -8$, zgadza się.

Sposób II: przesunięcie o ten sam wektor

Od A do S: $\vec{AS} = (-8 - 4, -6 + 15) = (-12, 9)$.

Punkt B powstaje przez powtórzenie tego przesunięcia:

$$B = S + \vec{AS} = (-8 - 12, -6 + 9) = (-20, 3)$$

czyli $y_B = 3$.

Sposób III: równa odległość od środka

Promień okręgu to $|SA| = \sqrt{(4 + 8)^2 + (-15 + 6)^2} = \sqrt{144 + 81} = 15$.

Dla punktu $B = (-20, y_B)$: $144 + (y_B + 6)^2 = 225$, czyli $(y_B + 6)^2 = 81$, skąd $y_B = 3$ (drugie rozwiązanie $y_B = -15$ odpada, bo wtedy B nie leżałby na średnicy poprowadzonej z A).

Zadanie 23.2 (1 pkt), odpowiedź A

Sposób I: promień jako odległość środka od punktu okręgu

$$r = |SA| = \sqrt{(4 + 8)^2 + (-15 + 6)^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15$$

Równanie okręgu o środku $S = (-8, -6)$ i promieniu 15:

$$(x + 8)^2 + (y + 6)^2 = 225$$

Sposób II: promień jako połowa średnicy

$$|AB| = \sqrt{(4 + 20)^2 + (-15 - 3)^2} = \sqrt{576 + 324} = \sqrt{900} = 30, \text{ więc } r = 15 \text{ oraz } r^2 = 225.$$

$$\text{Stąd } (x + 8)^2 + (y + 6)^2 = 225.$$

Sposób III: eliminacja odpowiedzi

Środek $(-8, -6)$ wymusza zapis $(x + 8)^2 + (y + 6)^2$, co odrzuca odpowiedzi C oraz D.

Sprawdzamy punkt $A = (4, -15)$: $(4 + 8)^2 + (-15 + 6)^2 = 144 + 81 = 225$, więc poprawna jest odpowiedź A.

Zadanie 24. (1 pkt), odpowiedź C

$$k: y = (m - 3)x + (m + 4), l: y = -5x + 1.$$

Sposób I: równość współczynników kierunkowych

Proste są równoległe, gdy mają równe współczynniki kierunkowe:

$$m - 3 = -5 \Rightarrow m = -2$$

Sprawdzenie, że proste nie pokrywają się: dla $m = -2$ wyraz wolny prostej k wynosi $m + 4 = 2 \neq 1$, więc proste są równoległe i różne.

Sposób II: warunek braku rozwiązań układu

Z układu równań otrzymujemy

$$(m - 3)x + (m + 4) = -5x + 1 \Rightarrow (m + 2)x = -3 - m$$

Układ nie ma rozwiązań (proste równoległe i różne), gdy $m + 2 = 0$ oraz $-3 - m \neq 0$, czyli $m = -2$.

Sposób III: sprawdzenie odpowiedzi

Dla $m = -5$: $m - 3 = -8$; dla $m = -3$: $m - 3 = -6$; dla $m = -2$: $m - 3 = -5$, co zgadza się z prostą l ; dla $m = 1$: $m - 3 = -2$.

Poprawna jest odpowiedź C.

Zadanie 25. (1 pkt), odpowiedź D

Sposób I: podstawa jako sześć trójkątów równobocznych

Pole trójkąta równobocznego o boku 3: $\frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Pole podstawy: $P_p = 6 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$.

Objętość: $V = P_p \cdot H = \frac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

Sposób II: gotowy wzór na pole sześciokąta foremnego

$$P_p = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{81\sqrt{3}}{2}$$

Sposób III: sześciokąt jako dwa trapezy

Sześciokąt foremny o boku 3 dzieli się na dwa przystające trapezy o podstawach 3 i 6 oraz wysokości $\frac{3\sqrt{3}}{2}$:

$$P_p = 2 \cdot \frac{3+6}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Objętość: } V = \frac{81\sqrt{3}}{2}$$

Zadanie 26. (1 pkt), odpowiedź D

Sposób I: sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej

Wysokość ostrosłupa, połowa przekątnej podstawy i krawędź boczna tworzą trójkąt prostokątny, w którym krawędź boczna jest przeciwprostokątną, a kąt nachylenia wynosi 60° :

$$H = 12 \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Sposób II: trójkąt o kątach 30, 60, 90 stopni

W tym trójkącie prostokątnym krótsza przyprostokątna (połowa przekątnej podstawy) leży naprzeciw kąta 30° , więc wynosi $\frac{12}{2} = 6$, a dłuższa przyprostokątna, czyli wysokość ostrosłupa, jest $\sqrt{3}$ razy dłuższa:

$$H = 6\sqrt{3}$$

Sposób III: twierdzenie Pitagorasa

Połowa przekątnej podstawy: $d = 12 \cos 60^\circ = 6$. Wtedy

$$H = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

Zadanie 27. (1 pkt), odpowiedź D

Sposób I: równanie z liczbą boków podstawy

Ostrosłup o podstawie będącej n kątem ma $2n$ krawędzi (n w podstawie i n bocznych) oraz $n + 1$ wierzchołków. Z warunku zadania:

$$2n = (n + 1) + 9 \Rightarrow n = 10$$

Podstawą jest dziesięciokąt.

Sposób II: różnica liczby krawędzi i wierzchołków

Różnica $2n - (n + 1) = n - 1$ ma być równa 9, więc $n - 1 = 9$, czyli $n = 10$.

Sposób III: sprawdzenie odpowiedzi

Sześciokąt: 12 krawędzi i 6 wierzchołków, różnica 6.

Ośmiokąt: 16 i 8, różnica 8.

Dziesięciokąt: 20 i 10, różnica 10.

Dziesięciokąt: 20 i 11, różnica 9, zgodnie z warunkiem zadania.

Zadanie 28. (1 pkt), odpowiedź C

Sposób I: wypisanie zdarzeń sprzyjających

Wszystkich wyników jest $6 \cdot 6 = 36$ i są jednakowo prawdopodobne.

Suma większa od 10 oznacza sumę 11 lub 12: (5, 6), (6, 5), (6, 6), czyli 3 wyniki.

$$P(A) = \frac{3}{36}$$

Sposób II: analiza po pierwszym rzucie

Suma większa od 10 jest możliwa tylko wtedy, gdy pierwszy rzut daje 5 albo 6.

Dla 5 pasuje jedynie 6 (jeden wynik), dla 6 pasują 5 i 6 (dwa wyniki). Razem 3 wyniki sprzyjające na 36 możliwych, więc $P(A) = \frac{3}{36}$.

Sposób III: tabela sum

W tabeli 6×6 sum oczek wartości większe od 10 zajmują prawy dolny narożnik: dwa pola z sumą 11 i jedno z sumą 12, czyli 3 pola z 36. Stąd $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Zadanie 29. (3 pkt), mediana 7,5; dominanta 8; prawdopodobieństwo 0,1

Godziny snu: 4 (6 osób), 5 (4), 6 (14), 7 (36), 8 (38), 9 (10), 10 (12); razem 120 osób.

Sposób I: licznosci skumulowane

Dodajemy liczebności po kolei: 6, 10, 24, 60, 98, 108, 120.

Próba liczy 120 osób, czyli parzyście wiele, więc mediana jest średnią wyników na pozycjach 60 oraz 61.

Pozycja 60 przypada na wartość 7 (licznosc skumulowana do 7 wynosi dokładnie 60), a pozycja 61 na wartość 8:

$$\text{mediana} = \frac{7+8}{2} = 7,5$$

Dominanta to wartość o największej liczebności, czyli 8 (zadeklarowana przez 38 osób).

Prawdopodobieństwo wyboru osoby deklarującej 10 godzin:

$$P = \frac{12}{120} = 0,1$$

Sposób II: uporządkowany ciąg danych

Ustawiając odpowiedzi rosnąco: pozycje od 1 do 6 to czwórki, od 7 do 10 piątki, od 11 do 24 szóstki, od 25 do 60 siódemki, od 61 do 98 ósemki.

Średnie wyniki (pozycje 60 i 61) to 7 oraz 8, więc mediana wynosi 7,5.

Najliczniejsza grupa to 38 osób przy 8 godzinach, czyli dominanta wynosi 8, a szansa trafienia na osobę deklarującą 10 godzin to stosunek 12 do 120, czyli 0,1.

Odpowiedzi

1. Mediana: 7,5
2. Dominanta: 8
3. Prawdopodobieństwo: $\frac{12}{120} = \frac{1}{10} = 0,1$

Zadanie 30. (4 pkt), pole boczne walca

Suma średnicy podstawy i wysokości walca wynosi 10; $P(r)$ to pole powierzchni bocznej.

Wyznaczenie wzoru i dziedziny

Z warunku $2r + H = 10$ otrzymujemy $H = 10 - 2r$. Pole powierzchni bocznej walca:

$$P(r) = 2\pi rH = 2\pi r(10 - 2r) = 20\pi r - 4\pi r^2$$

Dziedzina: promień musi być dodatni ($r > 0$), a wysokość musi być dodatnia ($10 - 2r > 0$, czyli $r < 5$), zatem

$$D = (0, 5)$$

Sposób I: wierzchołek paraboli ze wzoru na pierwszą współrzędną

Funkcja $P(r) = -4\pi r^2 + 20\pi r$ jest kwadratowa o współczynniku $a = -4\pi < 0$, więc osiąga wartość największą w wierzchołku:

$$r = -\frac{20\pi}{2 \cdot (-4\pi)} = \frac{20\pi}{8\pi} = 2,5$$

Liczba 2,5 należy do dziedziny $(0, 5)$. Największe pole:

$$P(2,5) = 20\pi \cdot 2,5 - 4\pi \cdot 6,25 = 50\pi - 25\pi = 25\pi$$

Sposób II: postać kanoniczna

$$P(r) = -4\pi \left(r^2 - 5r\right) = -4\pi \left[\left(r - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] = -4\pi \left(r - \frac{5}{2}\right)^2 + 25\pi$$

Składnik $-4\pi \left(r - \frac{5}{2}\right)^2$ jest niedodatni i równy zero tylko dla $r = 2,5$, więc dla tego promienia pole jest największe i wynosi 25π .

Sposób III: symetria względem miejsc zerowych

Miejsca zerowe funkcji $P(r) = 4\pi r(5 - r)$ to $r = 0$ oraz $r = 5$. Wierzchołek paraboli leży w połowie odległości między nimi:

$$r = \frac{0+5}{2} = 2,5$$

Ramiona paraboli są skierowane w dół, więc jest to maksimum, a $P(2,5) = 4\pi \cdot 2,5 \cdot 2,5 = 25\pi$.

Sposób IV: iloczyn liczb o stałej sumie

Dla $r \in (0, 5)$ mamy $P(r) = 4\pi \cdot r(5 - r)$. Iloczyn dwóch liczb dodatnich o stałej sumie $r + (5 - r) = 5$ jest największy, gdy liczby te są równe, czyli gdy $r = 5 - r$, a więc $r = 2,5$. Wtedy $P = 4\pi \cdot 2,5^2 = 25\pi$.