CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-700, MMAP-R0-K00, MMAP-R0-Q00, MMAU-R0-100
Termin egzaminu:	12 maja 2025 r.
Data publikacji dokumentu:	27 czerwca 2025 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Wymagania określone w podstawie programowej[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną […] do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 25%.

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą k, np. $15\,625 = 10\,000 \cdot k^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający odgadnie wynik i sprawdzi, że wartość 25% spełnia warunki zadania oraz uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie (np. powołując się na to, że funkcja wykładnicza jest rosnąca), to otrzymuje **2 punkty**; natomiast jeżeli takiego uzasadnienia nie przedstawi, to otrzymuje **1 punkt**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Z warunków zadania $N(0) = 10\,000$, więc $10\,000 = N_0 \cdot k^0$ i stąd $N_0 = 10\,000$.
Ponieważ $N(2) = 15\,625$, więc $15\,625 = 10\,000 \cdot k^2$ i stąd $k = 1{,}25$. Zatem

$$\frac{N(t+1)}{N(t)} = \frac{N_0 \cdot k^{t+1}}{N_0 \cdot k^t} = k = 1{,}25$$

dla każdego $t \geq 0$. To oznacza, że w ciągu każdej godziny liczebność populacji zwiększała się o 25% .

[1]Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zadanie 2. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: II.R5) korzysta ze wzorów na: […] $(a+b)^n$ […].

Zasady oceniania

3 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania (tj. spełnienie kryterium za 2 punkty **oraz** zapisanie, że $a+2b>0$ **oraz** uzasadnienie, że dla liczb spełniających warunek $b \neq \frac{1}{2}a$ zachodzi $(a-2b)^2>0$).

2 pkt – przekształcenie nierówności do postaci $(a-2b)^2(a+2b)>0$

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $(a-2b)^2>0$,

ALBO

– uzasadnienie, że funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla $a=2b$.

1 pkt – zastosowanie wzoru na sześcian sumy i przekształcenie nierówności do postaci $a^2(a-2b)-4b^2(a-2b)>0$

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $(a+2b)[(a+2b)^2-8ab]>0$,

ALBO

– przekształcenie nierówności do postaci $(a+2b)^2>8ab$,

ALBO

– rozważenie funkcji $f(a)=a^3-2ba^2-4b^2a+8b^3$ określonej dla $a>0$ oraz obliczenie pochodnej tej funkcji i miejsca zerowego tej pochodnej: $f'(a)=3a^2-4ba-4b^2$ oraz $a=2b$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości a i b, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy równoważnie nierówność, korzystając ze wzoru na sześcian sumy:

$$(a+2b)^3>8a^2b+16ab^2$$

$$a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3-8a^2b-16ab^2>0$$

$$a^3-2a^2b-4ab^2+8b^3>0$$

$$a^2(a-2b)-4b^2(a-2b)>0$$

$$(a-2b)(a^2-4b^2)>0$$

$$(a-2b)^2(a+2b) > 0$$

Z założenia $a > 0$ i $b > 0$, więc $a + 2b > 0$.
Ponieważ $b \neq \frac{1}{2}a$, więc $a - 2b \neq 0$ i wtedy $(a-2b)^2 > 0$ jako kwadrat liczby rzeczywistej różnej od zera.
Zatem $(a-2b)^2(a+2b)$ jest dodatnie jako iloczyn liczb dodatnich, więc nierówność $(a-2b)^2(a+2b) > 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To oznacza, że również nierówność $(a+2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$ jest prawdziwa dla każdej dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy równoważnie nierówność, korzystając ze wzorów na kwadrat sumy i różnicy:

$$(a+2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

$$(a+2b)^3 > 8ab(a+2b)$$

$$(a+2b)^3 - 8ab(a+2b) > 0$$

$$(a+2b)[(a+2b)^2 - 8ab] > 0$$

$$(a+2b)(a^2 - 4ab + 4b^2) > 0$$

$$(a-2b)^2(a+2b) > 0$$

Z założenia $a > 0$ i $b > 0$, więc $a + 2b > 0$.
Ponieważ $b \neq \frac{1}{2}a$, więc $a - 2b \neq 0$ i wtedy $(a-2b)^2 > 0$ jako kwadrat liczby rzeczywistej różnej od zera.
Zatem $(a-2b)^2(a+2b)$ jest dodatnie jako iloczyn liczb dodatnich, więc nierówność $(a-2b)^2(a+2b) > 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To oznacza, że również nierówność $(a+2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$ jest prawdziwa dla każdej dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$. To należało wykazać.

Sposób III

Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(a) = (a+2b)^3 - 8a^2b - 16ab^2$ dla każdego $a \in (0, +\infty)$.
Obliczamy pochodną funkcji f oraz jej miejsca zerowe:

$$f'(a) = 3(a+2b)^2 - 16ba - 16b^2$$

$$3a^2 + 12ab + 12b^2 - 16ba - 16b^2 = 0 \quad \wedge \quad a > 0$$

$$3a^2 - 4ba - 4b^2 = 0 \quad \wedge \quad a > 0$$

$$\left(a = -\frac{2}{3}b \quad \vee \quad a = 2b\right) \quad \wedge \quad a > 0$$

Gdy $b > 0$, to $f'(a) > 0$ dla $a \in (2b, +\infty)$ oraz $f'(a) < 0$ dla $a \in (0, 2b)$. Zatem przy b dodatnim funkcja f jest malejąca w przedziale $(0, 2b]$ oraz rosnąca w przedziale $[2b, +\infty)$, czyli funkcja f osiąga wartość najmniejszą dla argumentu dodatniego $a = 2b$. Ta najmniejsza wartość jest równa $f(2b) = (2b + 2b)^3 - 8 \cdot (2b)^2 \cdot b - 16 \cdot 2b \cdot b^2 = 0$. Zatem dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $a \neq 2b$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 - 8a^2b - 16ab^2 > 0$$

To należało wykazać.

Zadanie 3. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: VII.R8) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

Zasady oceniania (dla *sposobów I* oraz *VI*)

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $45°$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – jednym z kątów: CAD, BAD, CDA, ADB, w którym wszystkie funkcje trygonometryczne są tego samego argumentu, np.

$\frac{\sin 60° \cdot \cos\alpha - \cos 60° \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, gdzie $\alpha = |\sphericalangle CAD|$,

ALBO

– obliczenie współczynnika kierunkowego prostej AD: $2 - \sqrt{3}$.

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą – jednym z kątów: CAD, BAD, CDA, ADB,

np. $\frac{\sin(60° - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, gdzie $\alpha = |\sphericalangle CAD|$,

ALBO

– zapisanie związku $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla *sposobu II*)

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $45°$.

2 pkt – wyznaczenie długości czterech spośród pięciu odcinków: BD, CD, CE, DE, AE, w zależności od jednej zmiennej, np. $|CD| = x$ i $|BD| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x$ i $|CE| = \frac{1}{2}x$ i $|AE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

ALBO

– wyznaczenie długości odcinków: BD, CD, CE, w zależności od długości odcinka AE i tangensa kąta DAC, np. $|CE| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg}\alpha$ i $|CD| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg}\alpha$ i $|BD| = |AE| - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg}\alpha$, gdzie α jest kątem DAC.

1 pkt – zapisanie związku $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$,

ALBO

– wyznaczenie długości dwóch odcinków spośród BD, BC i CD w zależności od jednej zmiennej, np. $|CD| = x$ i $|BD| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x$,

ALBO

– wyznaczenie długości boków trójkąta CED w zależności od jednej zmiennej, np. $|CD| = x$, $|CE| = \frac{1}{2}x$, $|DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$,

ALBO

– wyznaczenie długości odcinka CE (albo CD) w zależności od długości odcinka AE i tangensa kąta DAC: $|CE| = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg}\alpha$ (albo $|CD| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot |AE| \cdot \operatorname{tg}\alpha$), gdzie α jest kątem DAC.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla *sposobów III–V*)

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $45°$.

2 pkt – obliczenie $\frac{|BD|}{|DF|}$ oraz $\frac{|AB|}{|AF|}$: $\frac{|BD|}{|DF|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

ALBO

– wyznaczenie długości odcinków AD oraz CD w zależności od jednej zmiennej, np. $|AD| = \sqrt{6}m$ oraz $|CD| = 2m$.

1 pkt – wyznaczenie długości odcinków BD i CD w zależności od jednej zmiennej, np. $|CD| = 2m$ i $|BD| = (\sqrt{3}-1)m$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

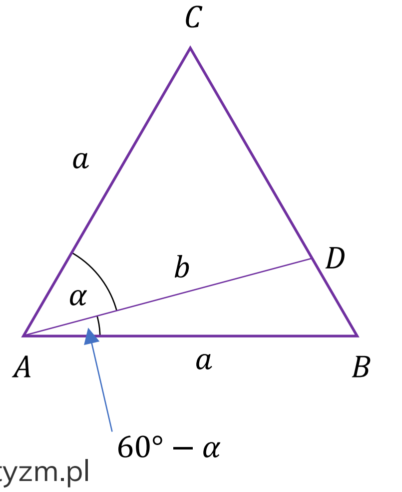
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość boku trójkąta ABC,

b – długość odcinka AD,

α – miara kąta DAC

(zobacz rysunek).



Korzystając ze wzoru na pole trójkąta oraz uwzględniając warunki zadania, otrzymujemy:

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin(60^\circ-\alpha)}{\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Stąd i ze wzoru na sinus różnicy kątów otrzymujemy kolejno:

$$\frac{\sin 60^\circ\cdot\cos\alpha-\cos 60^\circ\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\sin 60^\circ\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 1$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Zatem kąt DAC ma miarę 45°.

Sposób II

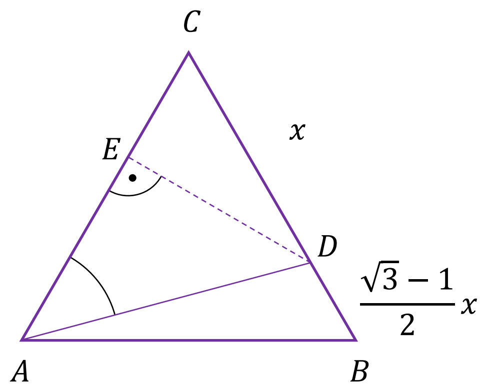
Trójkąty ABD i ACD mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka A, więc

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

zatem

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Oznaczmy $x=|CD|$. Wtedy $|BD| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}x$. Niech E będzie spodkiem wysokości trójkąta ADC poprowadzonej z wierzchołka D (zobacz rysunek).



Z własności trójkąta o kątach $30°, 60°, 90°$ otrzymujemy $|DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ oraz $|EC| = \frac{1}{2}x$.
Ponieważ $|AE| + |EC| = |CD| + |DB|$, więc

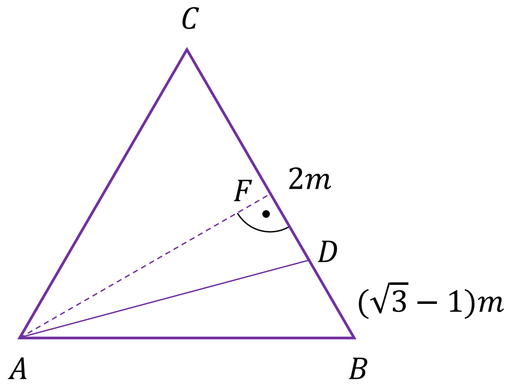
$$|AE| + \frac{1}{2}x = x + \frac{\sqrt{3}-1}{2}x$$

$$|AE| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Zatem $|AE| = |DE|$. To oznacza, że trójkąt prostokątny DEA jest równoramienny i kąt DAC ma miarę $45°$.

Sposób III (z twierdzenia o dwusiecznej)

Niech F będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka A.
Trójkąty ABD i ADC mają wspólną wysokość AF, więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem $|BD| = (\sqrt{3}-1)m$ oraz $|CD| = 2m$, przy pewnym $m > 0$ (zobacz rysunek).

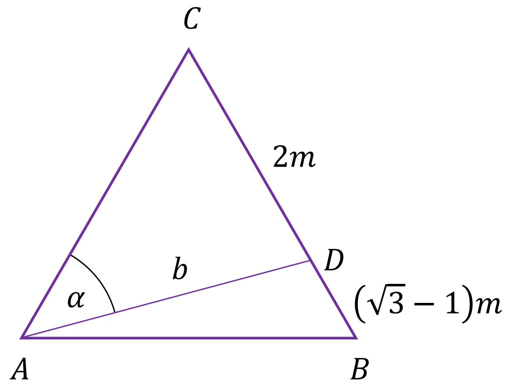


Wtedy $|AB| = |BC| = (\sqrt{3}+1)m$, $|AF| = \frac{(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{3}}{2}m$ oraz
$|BF| = \frac{1}{2}\cdot|AB| = \frac{\sqrt{3}+1}{2}m$. Stąd

$$|DF| = |BF| - |BD| = \frac{\sqrt{3}+1}{2}m - (\sqrt{3}-1)m = \frac{3-\sqrt{3}}{2}m$$

Ponieważ $\frac{|BD|}{|DF|} = \frac{(\sqrt{3}-1)m}{\frac{(3-\sqrt{3})m}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{(\sqrt{3}+1)m}{\frac{(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{3}m}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, więc półprosta AD jest dwusieczną kąta BAF. To oznacza, że
$|\sphericalangle DAF| = \frac{1}{2}\cdot|\sphericalangle BAF| = \frac{1}{2}\cdot 30° = 15°$ oraz $|\sphericalangle DAC| = 30° + |\sphericalangle DAF| = 45°$.

Sposób IV (z twierdzenia cosinusów i sinusów / dwukrotnie z twierdzenia cosinusów)
Oznaczmy kąt CAD przez α, natomiast długość odcinka AD oznaczmy przez b. Trójkąty ABD i ADC mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A na prostą BC, więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem $|BD| = (\sqrt{3} - 1)m$ oraz $|CD| = 2m$, przy pewnym $m > 0$ (zobacz rysunek).



Wtedy $|AB| = |BC| = |CA| = (\sqrt{3} + 1)m$.
Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ADC:

$$b^2 = |AC|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \cos 60^\circ$$

$$b^2 = \left[(\sqrt{3}+1)m\right]^2 + (2m)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3}+1)m \cdot 2m \cdot \frac{1}{2}$$

$$b^2 = (4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} - 2) \cdot m^2$$

$$b = \sqrt{6}m$$

Stosujemy twierdzenie sinusów do trójkąta ADC i otrzymujemy

$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{2m}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\sqrt{6}m}{\sin 60^\circ} = \frac{2m}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem $|\sphericalangle DAC| = 45^\circ$.

Uwaga.
Zamiast $\sin\alpha$ możemy też obliczyć $\cos\alpha$, korzystając po raz drugi z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADC:

$$|CD|^2 = |AC|^2 + b^2 - 2 \cdot |AC| \cdot b \cdot \cos\alpha$$

$$(2m)^2 = \left[(\sqrt{3}+1)m\right]^2 + \left(\sqrt{6}m\right)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3}+1)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos\alpha$$

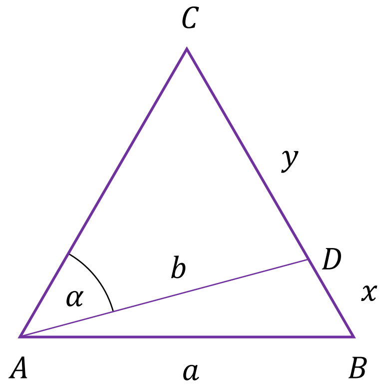
$$2 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos\alpha = \left[\left(\sqrt{3}+1\right)m\right]^2 + \left(\sqrt{6}m\right)^2 - (2m)^2$$

$$\cos\alpha = \frac{\left(3+2\sqrt{3}+1\right)+6-4}{2\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{6+2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem $|\sphericalangle DAC| = 45°$.

Sposób V (z twierdzenia Stewarta)

Przyjmijmy następujące oznaczenia:
a – długość boku trójkąta ABC,
b – długość odcinka AD,
x – długość odcinka BD,
y – długość odcinka CD,
α – miara kąta DAC
(zobacz rysunek).



Trójkąty ABD i ADC mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A na prostą BC, więc stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi długości odpowiednich podstaw. Zatem $x = \left(\sqrt{3}-1\right)m$ oraz $y = 2m$, przy pewnym $m > 0$.
Wtedy $a = \left(\sqrt{3}+1\right)m$.
Stosujemy twierdzenie Stewarta

$$a^2 \cdot x + a^2 \cdot y = (x+y)(b^2+xy)$$

$$a^2 = b^2 + xy$$

$$\left[\left(\sqrt{3}+1\right)m\right]^2 = b^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)m \cdot 2m$$

$$b = \sqrt{6}m$$

Stosujemy twierdzenie cosinusów do trójkąta ADC i otrzymujemy:

$$y^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos\alpha$$

$$(2m)^2 = \left(\sqrt{6}m\right)^2 + \left[\left(\sqrt{3}+1\right)m\right]^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)m \cdot \sqrt{6}m \cdot \cos\alpha$$

$$4m^2 = 6m^2 + \left(4+2\sqrt{3}\right)m^2 - 2\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) \cdot m^2 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\left(6+2\sqrt{3}\right)}{2\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{2\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}$$

Zatem $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha = 45°$.

Sposób VI (analitycznie)

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a – długość boku trójkąta ABC,

α – miara kąta DAC,

β – miara kąta BAD.

Umieszczamy trójkąt ABC w układzie współrzędnych tak, żeby $A=(0,0)$, $B=(a,0)$ i C leżał w I ćwiartce układu współrzędnych. Wtedy $C=\left(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

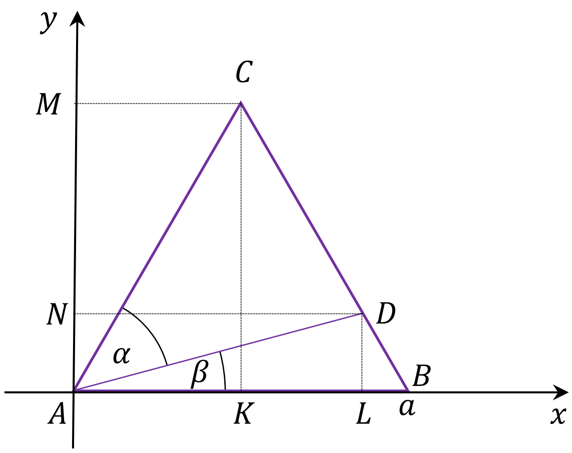
Trójkąty ABD i ACD mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka A, więc

$$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{|BD|}{|CD|}$$

zatem

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Oznaczmy teraz rzuty prostokątne punktów C i D na oś odciętych przez – odpowiednio – K oraz L, a rzuty prostokątne punktów C i D na oś rzędnych przez – odpowiednio – M oraz N (zobacz rysunek).



Z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{|KL|}{|KB|} = \frac{|CD|}{|BC|} = \frac{2}{2+\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}-1 \text{ oraz } \frac{|AN|}{|AM|} = \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}-1} = 2-\sqrt{3}$$

zatem

$$|KL| = \left(\sqrt{3}-1\right)\cdot|KB| = \left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\frac{a}{2} \quad \text{oraz} \quad |AN| = \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot|AM| = \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Stąd

$$D = \left(\frac{a}{2} + \left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\frac{a}{2}, \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}\right)$$

Współczynnik kierunkowy prostej AD jest równy

$$a_{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2-\sqrt{3}$$

Zatem

$$\operatorname{tg}\beta = a_{AD} = 2-\sqrt{3}$$

Ze wzoru na tangens różnicy kątów otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(60^\circ-\beta) = \frac{\operatorname{tg}60^\circ - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}\cdot(2-\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}-2} = 1$$

Zatem $\alpha = 45^\circ$.

Zadanie 4. (0–3)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe […].

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{9}{25}$ (lub $\frac{54}{150}$).

2 pkt – wyznaczenie mocy zdarzeń B oraz $A\cap B$, np. $|B| = \binom{4}{2}\cdot 5\cdot 5$ oraz $|A\cap B| = \binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot 4 + \binom{4}{2}$.

1 pkt – wyznaczenie mocy zdarzenia B, np. $|B| = \binom{4}{2}\cdot 5\cdot 5$,

ALBO

– wyznaczenie mocy zdarzenia $A\cap B$, np. $|A\cap B| = \binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot 4 + \binom{4}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.

Jeżeli zdający, obliczając $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ (lub $\frac{|A\cap B|}{|B|}$), pominie w liczniku i mianowniku czynnik $\binom{4}{2}$ bez stosownego komentarza, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie czteroelementowe wariacje z powtórzeniami ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Niech Ω oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.

Oznaczmy przez A zdarzenie polegające na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, natomiast przez B – że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek.

Obliczamy moc zdarzenia B: $|B| = \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 150$.

Obliczamy moc zdarzenia $A \cap B$: $|A \cap B| = \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 4 + \binom{4}{2} = 54$.

Obliczamy prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{54}{150} = \frac{9}{25}$$

Zadanie 5. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: III.R4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x \in (-\infty, -10) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

3 pkt – zapisanie trzech przedziałów: $(-\infty, -3)$ i $[-3, 2)$ i $[2, +\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przedziałów **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród tych przedziałów - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności z rozpatrywanymi przedziałami,

ALBO

– zapisanie czterech przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 < 0$ i $x - 2 \geq 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród trzech następujących przypadków: $x + 3 < 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 < 0$, $x + 3 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$ - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności,

ALBO

– zapisanie, że przypadek $x+3<0$ i $x-2\geq 0$ jest sprzeczny **oraz** zapisanie trzech przypadków: $x+3<0$ i $x-2<0$, $x+3\geq 0$ i $x-2<0$, $x+3\geq 0$ i $x-2\geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** rozwiązanie nierówności w dwóch spośród tych trzech przypadków - tj. wyznaczenie części wspólnych zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności,

ALBO

– zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności: $x-2<-2+2\cdot|x+3|$ i $x-2>-(-2+2\cdot|x+3|)$, a następnie w postaci równoważnej koniunkcji alternatyw nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:
($x+3>\frac{1}{2}x$ lub $x+3<-\frac{1}{2}x$) i ($x+3>\frac{4-x}{2}$ lub $x+3<-\frac{4-x}{2}$),

ALBO

– odczytanie z wykresów funkcji f oraz g pierwszych współrzędnych punktów ich przecięcia: $x=-\frac{2}{3}$ oraz $x=-10$ i sprawdzenie rachunkiem poprawności odczytanych współrzędnych.

2 pkt – zapisanie trzech przedziałów: $(-\infty,-3)$ i $[-3,2)$ i $[2,+\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) oraz zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przedziałów

ALBO

– zapisanie czterech przypadków: $x+3<0$ i $x-2<0$, $x+3<0$ i $x-2\geq 0$, $x+3\geq 0$ i $x-2<0$, $x+3\geq 0$ i $x-2\geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków,

ALBO

– zapisanie trzech przypadków: $x+3<0$ i $x-2<0$, $x+3\geq 0$ i $x-2<0$, $x+3\geq 0$ i $x-2\geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie nierówności bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w każdym z tych przypadków **oraz** zapisanie, że przypadek $x+3<0$ i $x-2\geq 0$ jest sprzeczny,

ALBO

– zapisanie nierówności w postaci równoważnej koniunkcji dwóch nierówności: $x-2<-2+2\cdot|x+3|$ i $x-2>-(-2+2\cdot|x+3|)$,

ALBO

– narysowanie wykresów funkcji $f(x)=|x-2|$ oraz $g(x)=2\cdot|x+3|-2$.

1 pkt – zapisanie trzech przedziałów: $(-\infty,-3)$ i $[-3,2)$ i $[2,+\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie danej nierówności w jednym z tych przedziałów bez użycia symbolu wartości bezwzględnej

ALBO

– zapisanie jednego z przedziałów: $(-\infty,-3)$, $[-3,2)$, $[2,+\infty)$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** rozwiązanie danej nierówności w tym przedziale - tj. wyznaczenie części wspólnej zbioru rozwiązań zapisanej nierówności z rozpatrywanym przedziałem,

ALBO

– zapisanie czterech przypadków: $x+3<0$ i $x-2<0$, $x+3<0$ i $x-2\geq 0$, $x+3\geq 0$ i $x-2<0$, $x+3\geq 0$ i $x-2\geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** zapisanie danej nierówności w jednym z tych przypadków bez użycia wartości bezwzględnej,

ALBO

– zapisanie jednego z trzech przypadków: $x+3<0$ i $x-2<0$, $x+3\geq 0$ i $x-2<0$, $x+3\geq 0$ i $x-2\geq 0$ (z dokładnością do domknięcia) **oraz** rozwiązanie danej nierówności w tym przypadku - tj. wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań zapisanych nierówności.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający, zapisując nierówność bez użycia wartości bezwzględnej, popełni błąd, który nie jest rachunkowy, tylko w jednym z rozpatrywanych przypadków/przedziałów i rozwiąże zadanie do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.

2. Jeżeli zdający nie rozpatruje przedziałów, które wyczerpują zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i w których nierówność ma różne postaci (lub rozpatruje przypadki wyznaczone jedynie przez nierówności ostre, które nie wyczerpują zbioru $\mathbb{R}$), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający przy rozwiązaniu graficznym poda zbiór rozwiązań $(-\infty,-10)\cup\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$, ale nie sprawdzi rachunkiem pierwszych współrzędnych punktów przecięcia wykresów funkcji f i g, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Wyznaczamy przedziały, które wyczerpują zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i w których nierówność ma różne postaci: $(-\infty,-3)$ i $[-3,2)$ i $[2,+\infty)$.

Rozważamy trzy przypadki.

Przypadek 1. (gdy $x\in(-\infty,-3)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $-x+2+2(x+3)<-2$, czyli $x<-10$.

Stąd otrzymujemy $x\in(-\infty,-10)$.

Przypadek 2. (gdy $x\in[-3,2)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $-x+2-2(x+3)<-2$, czyli $x>-\frac{2}{3}$.

Stąd otrzymujemy $x\in\left(-\frac{2}{3},2\right)$.

Przypadek 3. (gdy $x\in[2,+\infty)$)

W tym przypadku nierówność ma postać $x-2-2(x+3)<-2$, czyli $x>-6$.

Stąd otrzymujemy $x\in[2,+\infty)$.

Ostatecznie rozwiązaniami nierówności $|x-2|-2\cdot|x+3|<-2$ są wszystkie liczby ze zbioru $(-\infty,-10)\cup(-\frac{2}{3},+\infty)$.

Sposób II (poprzez koniunkcję nierówności)

Dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwe są równoważności:

(1) $|x|<a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x<a$ i $x>-a$

oraz

(2) $|x|>a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x>a$ lub $x<-a$.

Przekształcamy nierówność $|x-2|-2\cdot|x+3|<-2$, korzystając z równoważności (1):

$$x-2<-2+2\cdot|x+3| \quad \text{i} \quad x-2>-(-2+2\cdot|x+3|)$$

$$|x+3|>\frac{1}{2}x \quad \text{i} \quad |x+3|>\frac{4-x}{2}$$

Rozwiązujemy każdą z otrzymanych nierówności, korzystając z równoważności (2):

$$\left(x+3>\frac{1}{2}x \quad \text{lub} \quad x+3<-\frac{1}{2}x\right) \quad \text{i} \quad \left(x+3>\frac{4-x}{2} \quad \text{lub} \quad x+3<-\frac{4-x}{2}\right)$$

$$(x>-6 \quad \text{lub} \quad x<-2) \quad \text{i} \quad \left(x>-\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x<-10\right)$$

$$x\in\mathbb{R} \quad \text{i} \quad \left(x>-\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x<-10\right)$$

$$x>-\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x<-10$$

Rozwiązaniami nierówności $|x-2|-2\cdot|x+3|<-2$ są wszystkie liczby ze zbioru $(-\infty,-10)\cup\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$.

Zadanie 6. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{27}{2}$ lub 27.

3 pkt – obliczenie a_1 oraz q: $(a_1, q) = \left(18, \frac{1}{3}\right)$, $(a_1, q) = \left(18, -\frac{1}{3}\right)$, $(a_1, q) = (2, 3)$, $(a_1, q) = (2, -3)$

ALBO

– obliczenie a_3 oraz q: $(a_3, q) = \left(2, \frac{1}{3}\right)$, $(a_3, q) = \left(2, -\frac{1}{3}\right)$, $(a_3, q) = (18, 3)$, $(a_3, q) = (18, -3)$,

ALBO

– obliczenie a_2 oraz q: $(a_2, q) = (-6, -3)$, $(a_2, q) = \left(-6, -\frac{1}{3}\right)$, $(a_2, q) = \left(6, \frac{1}{3}\right)$, $(a_2, q) = (6, 3)$ (dla *sposobu III*),

ALBO

– wyznaczenie jednej z par (a_1, q), dla której szereg geometryczny jest zbieżny i obliczenie sumy tego szeregu, np. $(a_1, q) = \left(18, \frac{1}{3}\right)$ i $S = 27$, $(a_1, q) = \left(18, -\frac{1}{3}\right)$ i $S = \frac{27}{2}$,

ALBO

– wyznaczenie jednej z par (a_3, q), dla której szereg geometryczny jest zbieżny i obliczenie sumy tego szeregu, np. $(a_3, q) = \left(2, \frac{1}{3}\right)$ i $S = 27$, $(a_3, q) = \left(2, -\frac{1}{3}\right)$ i $S = \frac{27}{2}$,

ALBO

– wyznaczenie jednej z par (a_2, q), dla której szereg geometryczny jest zbieżny i obliczenie sumy tego szeregu, np. $(a_2, q) = \left(6, \frac{1}{3}\right)$ i $S = 27$, $(a_2, q) = \left(-6, -\frac{1}{3}\right)$ i $S = \frac{27}{2}$ (dla *sposobu III*).

2 pkt – obliczenie a_1 : $a_1 = 2$ oraz $a_1 = 18$

ALBO

– obliczenie a_3 : $a_3 = 18$ oraz $a_3 = 2$,

ALBO

– obliczenie q^2: $q^2 = 9$ oraz $q^2 = \frac{1}{9}$,

ALBO

– zapisanie alternatywy równań $-\frac{6}{q} - 6q = 20$ lub $\frac{6}{q} + 6q = 20$ (dla *sposobu III*),

ALBO

– zapisanie równania $\frac{36}{q^2} + 36q^2 = 328$ (dla *sposobu III*).

1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (a_1 lub a_3 , lub q), np.

$a_1^2 + (20 - a_1)^2 = 328$, $(20 - a_3)^2 + a_3^2 = 328$, $\frac{400}{(q^2+1)^2} \cdot (1 + q^4) = 328$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą a_2 , np. $a_2^2 = 36$, $20^2 - 2a_2^2 = 328$ (dla *sposobu III*).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający odrzuci otrzymane wartości $q = 3$ oraz $q = -3$ (lub parę $(a_1\,, a_3) = (2, 18)$) bez komentarza, to może otrzymać **4 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający nie odrzuci wartości $q = 3$ oraz $q = -3$ i zastosuje wzór na sumę szeregu geometrycznego dla $q = 3$ (albo dla $q = -3$), to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

3. a) Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy, ale otrzyma co najmniej jeden iloraz spełniający warunek $|q| < 1$ oraz co najmniej jeden iloraz spełniający warunek $|q| \geq 1$ i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (2 punkty za pary (a_1, q) oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów q spełniających warunek $|q| < 1$, o ile nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$).

3. b) Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy, ale otrzyma co najmniej dwa ilorazy i wszystkie z nich spełniają warunek $|q| < 1$ oraz rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pary (a_1, q) oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów q), o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.

4. Jeżeli zdający popełni błąd, który nie jest rachunkowy, ale otrzyma co najmniej jeden iloraz spełniający warunek $|q| < 1$ i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pary (a_1, q) oraz 1 punkt za obliczenie sum szeregów dla wszystkich otrzymanych ilorazów q spełniających warunek $|q| < 1$, o ile nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$), o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.

5. Jeżeli zdający odgadnie rozwiązanie układu równań $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$: $(a_1\,, a_3) = (18, 2)$ oraz obliczy poprawnie obie sumy szeregu: $S = 27$ i $S = \frac{27}{2}$ i nie obliczy sumy szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

6. Jeżeli zdający odgadnie rozwiązania układu równań $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$: $(a_1\,, a_3) = (18, 2)$ oraz $(a_1\,, a_3) = (2, 18)$, ale nie obliczy poprawnie obu sum szeregu: $S = 27$ i $S = \frac{27}{2}$ lub obliczy sumę szeregu dla ilorazu spełniającego warunek $|q| \geq 1$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n). Z warunków $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$ otrzymujemy:

$$a_1^2 + (20 - a_1)^2 = 328$$

$$2a_1^2 - 40a_1 + 72 = 0$$

$$a_1 = 2 \quad \vee \quad a_1 = 18$$

Gdy $a_1 = 2$, to $a_3 = 20 - a_1 = 18$ i wtedy $q^2 = 9$, więc $q = -3$ lub $q = 3$. Dla każdej z tych wartości ilorazu ciąg (a_n) jest rozbieżny i tym samym nie są spełnione warunki zadania.

Gdy $a_1 = 18$, to $a_3 = 20 - a_1 = 2$ i wtedy $q^2 = \frac{1}{9}$, więc $q = -\frac{1}{3}$ lub $q = \frac{1}{3}$. Dla każdej z tych wartości q ciąg (a_n) jest zbieżny, a ponieważ $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ oraz $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, więc dla obu tych wartości ilorazu istnieje suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n).

Dla $a_1 = 18$ i $q = -\frac{1}{3}$ suma S wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Dla $a_1 = 18$ i $q = \frac{1}{3}$ suma S wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = 27$$

Sposób II

Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n). Z warunku $a_1 + a_3 = 20$ otrzymujemy $a_1 + a_1q^2 = 20$, więc $a_1 = \frac{20}{q^2+1}$ i $a_1 \neq 0$.

Stąd i z warunku $a_1^2 + a_3^2 = 328$ otrzymujemy:

$$a_1^2 + (a_1q^2)^2 = 328$$

$$a_1^2 \cdot (1 + q^4) = 328$$

$$\frac{400}{(q^2+1)^2} \cdot (1 + q^4) = 328$$

$$72q^4 - 656q^2 + 72 = 0$$

$$9q^4 - 82q^2 + 9 = 0$$

$$\Delta = (-82)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9 = 6400$$

$$q^2 = \frac{82-80}{2 \cdot 9} = \frac{1}{9} \quad \vee \quad q^2 = \frac{82+80}{2 \cdot 9} = 9$$

$$q = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad q = \frac{1}{3} \quad \vee \quad q = -3 \quad \vee \quad q = 3$$

Ponieważ $a_1 \neq 0$, więc dla $q = -3$ oraz $q = 3$ ciąg (a_n) nie jest zbieżny.

Gdy $q = -\frac{1}{3}$, to $a_1 = \frac{20}{q^2+1} = 18$ i ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Gdy $q = \frac{1}{3}$, to $a_1 = \frac{20}{q^2+1} = 18$ i ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = 27$$

Sposób III (poprzez a_2)

Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n). Z warunków $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$ otrzymujemy:

$$a_1^2 + a_3^2 = 328$$

$$(a_1 + a_3)^2 - 2a_1 \cdot a_3 = 328$$

$$20^2 - 2a_1 \cdot a_3 = 328$$

Stąd, po zastosowaniu własności ciągu geometrycznego, dostajemy

$$20^2 - 2a_2^2 = 328$$

$$a_2 = -6 \quad \vee \quad a_2 = 6$$

Przypadek 1. (gdy $a_2 = -6$).

Warunek $a_1 + a_3 = 20$ zapisujemy w postaci $\frac{a_2}{q} + a_2 \cdot q = 20$ i obliczamy iloraz ciągu:

$$-\frac{6}{q} - 6q = 20$$

$$-6q^2 - 20q - 6 = 0$$

$$q = \frac{20-16}{-12} = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad q = \frac{20+16}{-12} = -3$$

Gdy $q = -\frac{1}{3}$ i $a_2 = -6$, to ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{\frac{a_2}{q}}{1-q} = \frac{18}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{27}{2}$$

Gdy $q = -3$ i $a_2 = -6$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny, więc warunki zadania nie są spełnione.

Przypadek 2. (gdy $a_2 = 6$).

Warunek $a_1 + a_3 = 20$ zapisujemy w postaci $\frac{a_2}{q} + a_2 \cdot q = 20$ i obliczamy iloraz ciągu:

$$\frac{6}{q} + 6q = 20$$

$$6q^2 - 20q + 6 = 0$$

$$q = \frac{20-16}{12} = \frac{1}{3} \quad \vee \quad q = \frac{20+16}{12} = 3$$

Gdy $q = \frac{1}{3}$ i $a_2 = 6$, to ciąg (a_n) jest zbieżny. Ponadto $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, więc istnieje suma S wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego i jest ona równa

$$S = \frac{\frac{a_2}{q}}{1-q} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = 27$$

Gdy $q = 3$ i $a_2 = 6$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny, więc warunki zadania nie są spełnione.

Zadanie 7. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.

Zasady oceniania (dla *sposobów I* oraz *Ia*)

4 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

3 pkt – zapisanie związku między długościami podstaw trapezu, np. $\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{2}+b\right)}{\frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{a+b}{2}\right)} = \frac{1}{2}$.

2 pkt – zapisanie równań $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(d+b)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\frac{h}{2}}$ oraz $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{1}{2}$ oraz $d = \frac{a+b}{2}$

ALBO

– spełnienie dwóch spośród czterech poniższych warunków:

1) zapisanie równań $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(d+b)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\frac{h}{2}}$ albo $\frac{\frac{1}{2}\cdot(d+b)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}$,

2) zapisanie równań $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(d+b)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h}$ albo $\frac{\frac{1}{2}\cdot(d+b)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h} = \frac{1}{3}$,

3) zapisanie równań $\frac{P_{ABFE}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h}$ albo $\frac{\frac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h} = \frac{2}{3}$,

4) zapisanie równania $\frac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\cdot(b+d)\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h$.

1 pkt – spełnienie jednego spośród czterech poniższych warunków:

1) zapisanie równań $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot(d+b)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\frac{h}{2}}$ albo $\frac{\frac{1}{2}\cdot(d+b)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\frac{h}{2}}=\frac{1}{2}$,

2) zapisanie równań $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot(d+b)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h}$ albo $\frac{\frac{1}{2}\cdot(d+b)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h}=\frac{1}{3}$,

3) zapisanie równań $\frac{P_{ABFE}}{P_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h}$ albo $\frac{\frac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h}=\frac{2}{3}$,

4) zapisanie równania $\frac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\frac{h}{2}+\frac{1}{2}\cdot(b+d)\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h$,

ALBO

– zapisanie równania $d=\frac{a+b}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli w rozwiązaniu zdający błędnie zakłada, że trapezy $ABFE$ i $EFCD$ są podobne i na tym opiera rozwiązanie, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za zapisanie związku między długościami podstaw trapezu i odcinka łączącego środki jego ramion.

2. Jeżeli zdający rozpatruje trapez o konkretnych wymiarach i na tym opiera całe rozwiązanie, to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.

3. Jeżeli zdający zapisze jednocześnie $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{2}+b\right)}{\frac{1}{2}\cdot\left(a+\frac{a+b}{2}\right)}$ oraz $\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}}=\frac{1}{2}$, to może otrzymać **3 punkty**.

Zasady oceniania (dla *sposobu II*)

4 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

3 pkt – wyznaczenie stosunku pól trójkątów AKE i KFC: $1:5$.

2 pkt – zapisanie pól trapezów $EFCD$ i $ABFE$ w zależności od pól trójkątów AKE i KFC.

1 pkt – zapisanie zależności pomiędzy polami trójkątów podobnych ACD i AKE **oraz** zapisanie zależności pomiędzy polami trójkątów podobnych ABC i KFC.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a, b – długość – odpowiednio – dłuższej i krótszej podstawy trapezu,

d – długość odcinka łączącego środki ramion trapezu,

h – wysokość trapezu.

Z własności trapezu otrzymujemy $d = \frac{a+b}{2}$. Trapezy $EFCD$ i $ABFE$ mają równe wysokości oraz stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{1}{2}$, więc

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot(d+b)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d+b}{a+d} = \frac{1}{2}$$

$$2d + 2b = a + d$$

$$d + 2b = a$$

Stąd i z zależności $d = \frac{a+b}{2}$ otrzymujemy

$$a + b + 4b = 2a$$

$$5b = a$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{5}$$

To należało wykazać.

Sposób Ia

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a, b – długość – odpowiednio – dłuższej i krótszej podstawy trapezu,
d – długość odcinka łączącego środki ramion trapezu,
h – wysokość trapezu.

Trapezy $EFCD$ i $ABFE$ mają równe wysokości oraz stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{1}{2}$, więc

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot(d+b)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+d)\cdot\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d+b}{a+d} = \frac{1}{2}$$

$$2d + 2b = a + d$$

$$d = a - 2b$$

Ponadto stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABCD$ jest równy $\frac{1}{3}$, więc

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot(d+b)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{d+b}{2(a+b)}=\frac{1}{3}$$

$$3d+3b=2a+2b$$

$$3d=2a-b$$

Stąd i zależności $d=a-2b$ otrzymujemy

$$3(a-2b)=2a-b$$

$$a=5b$$

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{5}$$

To należało wykazać.

Sposób II (przez pola trójkątów podobnych)

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

a, b – długość – odpowiednio – dłuższej i krótszej podstawy trapezu,

K – punkt przecięcia przekątnej AC z odcinkiem EF,

n, m – pole – odpowiednio – trójkąta AKE i KFC.

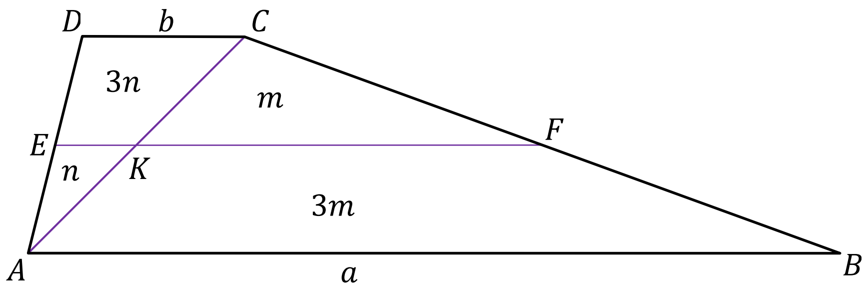
Trójkąty ACD i AKE oraz trójkąty ABC i KFC są podobne (cecha kkk), a skala każdego z tych podobieństw jest równa 2, gdyż E i F to środki boków AD oraz BC. Zatem

$$P_{ACD}=2^2\cdot P_{AKE}=4n \text{ oraz } P_{ABC}=2^2\cdot P_{KFC}=4m$$

Stąd

$$P_{EKCD}=3n \text{ oraz } P_{ABFK}=3m$$

(zobacz rysunek).



Zatem

$$P_{EFCD}=3n+m \text{ oraz } P_{ABFE}=n+3m$$

Trójkąty ACD i ABC mają wspólną wysokość, więc

$$\frac{P_{ACD}}{P_{ABC}} = \frac{b}{a} = \frac{4n}{4m} = \frac{n}{m}$$

Z warunków zadania otrzymujemy

$$\frac{P_{EFCD}}{P_{ABFE}} = \frac{3n+m}{n+3m} = \frac{1}{2}$$

Stąd

$$6n + 2m = n + 3m$$

$$5n = m$$

Zatem

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{m} = \frac{n}{5n} = \frac{1}{5}$$

To należało wykazać.

Zadanie 8. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów; IX.R3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$, $B = (-1,-2)$ oraz $M = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

4 pkt – zapisanie równania $\left[x_M - \frac{16}{5}, y_M - \left(-\frac{13}{5}\right)\right] = -2 \cdot [x_M - (-1), y_M - (-2)]$

ALBO

– zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi, który pozwala obliczyć współrzędne punktu M, np. $\sqrt{(-1-x_M)^2 + (-2-y_M)^2} = \sqrt{2}$ oraz $\sqrt{(x_M - 3{,}2)^2 + (y_M + 2{,}6)^2} = 2\sqrt{2}$,

ALBO

– obliczenie współrzędnych punktów A oraz B: $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$ i $B = (-1,-2)$ **oraz** zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$.

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A oraz B: $A = \left(\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$ oraz $B = (-1, -2)$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą, pozwalającego obliczyć pierwsze (lub drugie) współrzędne punktów przecięcia okręgów, np. $(-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45$ **oraz** zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą, pozwalającego obliczyć pierwsze (lub drugie) współrzędne punktów przecięcia okręgów, np. $(-7y - 15 - 2)^2 + (y - 4)^2 = 45$,

ALBO

– wyznaczenie równania prostej AB, np. $2x + 14y = -30$ **oraz** zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$,

ALBO

– zapisanie współrzędnych punktu B: $B = (-1, -2)$ i sprawdzenie rachunkiem, że punkt B jest punktem przecięcia okręgów **oraz** wyznaczenie równania prostej AB,

ALBO

– zapisanie współrzędnych punktu B: $B = (-1, -2)$ i sprawdzenie rachunkiem, że punkt B jest punktem przecięcia okręgów **oraz** obliczenie współrzędnych środka odcinka AB: $\left(\frac{11}{10}, -\frac{23}{10}\right)$.

1 pkt – wyznaczenie równania prostej AB, np. $2x + 14y = -30$

ALBO

– zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$,

ALBO

– zapisanie współrzędnych punktu B: $B = (-1, -2)$ i sprawdzenie rachunkiem, że punkt B jest punktem przecięcia okręgów **oraz** zapisanie/obliczenie współczynnika kierunkowego prostej przechodzącej przez środki okręgów: 7.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający błędnie identyfikuje punkt A jako $(-1, -2)$, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma punkty A oraz B, których pierwsze współrzędne są liczbami dodatnimi, i konsekwentnie do popełnionych błędów rozwiązuje zadanie do końca, rozważając dwa przypadki, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i otrzyma punkty A oraz B, których pierwsze współrzędne są liczbami ujemnymi, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (trzeci punkt otrzymuje za zapisanie równości $x_M = \frac{1}{3}x_A + \frac{2}{3}x_B$ oraz $y_M = \frac{1}{3}y_A + \frac{2}{3}y_B$).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy współrzędne punktów A oraz B, w których przecinają się okręgi $\mathcal{O}_1$ oraz $\mathcal{O}_2$:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2=5 \\ (x-2)^2+(y-4)^2=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2-(x-2)^2-(y-4)^2=5-45 \\ (x-2)^2+(y-4)^2=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x+1+y^2+6y+9-x^2+4x-4-y^2+8y-16=-40 \\ (x-2)^2+(y-4)^2=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+14y=-30 \quad /:2 \\ (x-2)^2+(y-4)^2=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+7y=-15 \\ (x-2)^2+(y-4)^2=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-7y-15 \\ (x-2)^2+(y-4)^2=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-7y-15 \\ (-7y-15-2)^2+(y-4)^2=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-7y-15 \\ 50y^2+230y+260=0 \end{cases}$$

Stąd

$$y=-\frac{13}{5} \quad \text{lub} \quad y=-2$$

Gdy $y=-\frac{13}{5}$ to wtedy $x=-7\cdot\left(-\frac{13}{5}\right)-15=\frac{16}{5}$.

Gdy $y=-2$ to wtedy $x=-7\cdot(-2)-15=-1$.

Ponieważ pierwsza współrzędna punktu A jest dodatnia, więc $A=\left(\frac{16}{5},-\frac{13}{5}\right)$ oraz $B=(-1,-2)$.

Oznaczmy przez x_M i y_M odpowiednie współrzędne punktu M, tj. $M=(x_M,y_M)$. Wtedy

$$\overrightarrow{AM}=-2\cdot\overrightarrow{BM}$$

$$\left[x_M-\frac{16}{5},y_M-\left(-\frac{13}{5}\right)\right]=-2\cdot[x_M-(-1),y_M-(-2)]$$

$$\left[x_M-\frac{16}{5},y_M+\frac{13}{5}\right]=[-2x_M-2,-2y_M-4]$$

$$x_M-\frac{16}{5}=-2x_M-2 \quad \wedge \quad y_M+\frac{13}{5}=-2y_M-4$$

$$x_M = \frac{2}{5} \quad \wedge \quad y_M = -\frac{11}{5}$$

Zatem $M = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

Zadanie 9. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne.

Zasady oceniania (dla *sposobów I–III*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$.

4 pkt – zapisanie założenia $\cos x \neq 0$ oraz rozwiązanie alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ (dla *sposobów I* oraz *III*)

ALBO

– rozwiązanie jednego z równań alternatywy $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, gdzie $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ i $k \in \mathbb{Z}$, w przedziale $[-\pi, \pi]$, np.

$\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ i $\frac{\pi}{3}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

$\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\frac{5\pi}{6}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),

oraz uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania $3\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla *sposobów I* oraz *III*),

ALBO

– rozwiązanie alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ oraz $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, **oraz** uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania $3\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla *sposobów I* oraz *III*),

ALBO

– zapisanie założenia $\cos(2x) \neq 0$ oraz rozwiązanie równania $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ (dla *sposobu II*),

ALBO

– rozwiązanie równania $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, **oraz** uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ (dla *sposobu II*).

3 pkt – zapisanie założenia $\cos x \neq 0$ oraz rozwiązanie alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$:
$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ oraz $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla *sposobów I* oraz *III*)
ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w przedziale $[-\pi, \pi]$, np.
$\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ i $\frac{\pi}{3}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),
$\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ i $\frac{5\pi}{6}$ (rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi, \pi]$),
(dla *sposobów I* oraz *III*),
ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ **oraz** uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla *sposobów I* oraz *III*)
ALBO

– zapisanie założenia $\cos(2x) \neq 0$ oraz rozwiązanie równania $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla *sposobu II*),
ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ **oraz** uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ (dla *sposobu II*).

2 pkt – przekształcenie równania do alternatywy równań $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (dla *sposobów I* oraz *III*)
ALBO

– przekształcenie równania do postaci $-3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0$ **oraz** uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla *sposobu I*),
ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\operatorname{tg}(2x) = -\sqrt{3}$ (dla *sposobu II*).

1 pkt – przekształcenie równania do postaci $-3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0$ (dla *sposobu I*)
ALBO

– zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równania $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ (dla *sposobu II*),
ALBO

– zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta oraz wzorów skróconego mnożenia i przekształcenie równania do postaci
$(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\sin x) = 0$ (dla *sposobu III*),
ALBO

– uzasadnienie, że liczby postaci $\frac{\pi}{2}+\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie spełniają równania $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ (dla *sposobów I* oraz *III*).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla *sposobów IV–V*)

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \left(-\frac{\pi}{6}\right), \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$.

4 pkt – rozwiązanie równania $\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)=0$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla *sposobu IV*),

ALBO

– rozwiązanie równania $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=0$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $x=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi k}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla *sposobu IV*),

ALBO

– rozwiązanie obydwu równań alternatywy $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$ lub $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$ w zbiorze $\mathbb{R}$:
$x=\frac{\pi}{3}+\pi k$ oraz $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ (dla *sposobu V*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$ lub $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w przedziale $[-\pi,\pi]$, np.
$\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ i $\frac{\pi}{3}$ (rozwiązania równania $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$ w przedziale $[-\pi,\pi]$),
$\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\frac{5\pi}{6}$ (rozwiązania równania $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ w przedziale $[-\pi,\pi]$),
(dla *sposobu V*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ lub $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$ **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w przedziale $[-\pi,\pi]$, np.
$\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ i $\frac{\pi}{3}$ (rozwiązania równania $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ w przedziale $[-\pi,\pi]$),
$\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\frac{5\pi}{6}$ (rozwiązania równania $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$ w przedziale $[-\pi,\pi]$),
(dla *sposobu V*).

3 pkt – przekształcenie równania do postaci $\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)=0$ (dla *sposobu IV*)

ALBO

– przekształcenie równania do postaci $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=0$ (dla *sposobu IV*),

ALBO

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$ lub $\sqrt{3}\cos x+3\sin x=0$ **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w zbiorze $\mathbb{R}$, np.
$x=\frac{\pi}{3}+\pi k$ (rozwiązania równania $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$ w zbiorze $\mathbb{R}$),
$x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$ (rozwiązania równania $\sqrt{3}\cos x+3\sin x=0$ w zbiorze $\mathbb{R}$),
gdzie $k\in\mathbb{Z}$ (dla *sposobu V*),

– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań $\sqrt{3}\cos x-\sin x=0$ lub $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$ **oraz** rozwiązanie jednego z równań tej alternatywy w zbiorze $\mathbb{R}$, np.
$x=\frac{\pi}{3}+\pi k$ (rozwiązania równania $\sqrt{3}\cos x-\sin x=0$ w zbiorze $\mathbb{R}$),
$x=-\frac{\pi}{6}+\pi k$ (rozwiązania równania $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$ w zbiorze $\mathbb{R}$), gdzie $k\in\mathbb{Z}$ (dla *sposobu V*).

2 pkt – przekształcenie równania do postaci $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)=0$ (dla *sposobu IV*)
ALBO
– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań
$\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$ lub $\sqrt{3}\cos x+3\sin x=0$ (dla *sposobu V*),
ALBO
– przekształcenie równania do postaci alternatywy równań
$\sqrt{3}\cos x-\sin x=0$ lub $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0$ (dla *sposobu V*).

1 pkt – zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisanie równania
$3\cos(2x)+\sqrt{3}\sin(2x)=0$ (dla *sposobu IV*)
ALBO
– zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta oraz wzorów skróconego mnożenia i przekształcenie równania do postaci
$(\sqrt{3}\cos x+\sin x-2\sin x)(\sqrt{3}\cos x+\sin x+2\sin x)=0$ (dla *sposobu V*),
ALBO
– zastosowanie wzoru na sinus podwojonego kąta i obliczenie wyróżnika Δ trójmianu kwadratowego $3\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-3\sin^2 x$ zmiennej np. $\cos x$:
$\Delta=\left(4\sqrt{3}\sin x\right)^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:
a) niepoprawne zastosowanie wzoru na sumę/różnicę cosinusów/sinusów,
b) niepoprawne zastosowanie wzoru na iloczyn cosinusów/sinusów,
c) błędne zastosowanie nieparzystości/parzystości funkcji trygonometrycznej,

ale zdający otrzyma elementarne równania trygonometryczne postaci $\sin(ax+b)=c$, $\cos(ax+b)=c$, gdzie $a\neq 0$, $a^2\neq 1$, $b\neq 0$, $c\in[-1,1]$, i rozwiązanie doprowadzi konsekwentnie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie nabył prawa do innej punktacji zgodnej z zasadami oceniania.

2. Jeżeli zdający błędnie stosuje metodę analizy starożytnych, np. podnosi obie strony równania $3\cos(2x) = -\sqrt{3}\sin(2x)$ do kwadratu i nie sprawdza rachunkiem, czy wszystkie otrzymane liczby są rozwiązaniami, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**; natomiast jeżeli odrzuci co najmniej jedno rozwiązanie „obce” (ale nie odrzuci wszystkich rozwiązań „obcych”), to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez wyrażenie $a(x)$ zawierające niewiadomą x i nie zapisze założenia $a(x) \neq 0$, ani też nie rozważa przypadku $a(x) = 0$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez sinus podwojonego kąta i tangens)

Stosujemy wzory na sinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ do postaci

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 3\sin^2 x = 0$$

Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1. (gdy $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Dzielimy obie strony równania $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 3\sin^2 x = 0$ przez $\cos^2 x$ i otrzymujemy

$$3 + \frac{2\sqrt{3}\sin x}{\cos x} - \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$3 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x - 3\,\mathrm{tg}^2 x = 0$$

$$-3\,\mathrm{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x + 3 = 0$$

$$\Delta = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot(-3)\cdot 3 = 48$$

$$\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3} \quad \vee \quad \mathrm{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązaniami równania $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $\frac{\pi}{3} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ i $\frac{\pi}{3}$.

Rozwiązaniami równania $\mathrm{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Przypadek 2. (gdy $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Ponieważ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ oraz $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, więc równanie $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$ przyjmuje postać

$$3 \cdot 0^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 0$$

czyli $-3 = 0$. To oznacza, że wśród liczb postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie ma rozwiązań równania $3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób II (poprzez cosinus podwojonego kąta i tangens)

Stosujemy wzory na cosinus podwojonego kąta i przekształcamy równanie $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ do postaci

$$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$$

Należy rozważyć dwa przypadki.

Przypadek 1. (gdy $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Dzielimy obie strony równania $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ przez $\cos(2x)$ i otrzymujemy

$$3 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = 0$$

$$\mathrm{tg}(2x) = -\sqrt{3}$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Stąd otrzymujemy cztery rozwiązania w przedziale $[-\pi, \pi]$: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Przypadek 2. (gdy $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Ponieważ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, więc równanie $3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0$ przyjmuje postać

$$3 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$$

i stąd $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=0$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$. Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=1$$

$$0^2+0^2=1$$

czyli $0=1$. To oznacza, że wśród liczb postaci $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$, nie ma rozwiązań równania $3\cos(2x)+\sqrt{3}\sin(2x)=0$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3\cos^2 x+\sqrt{3}\sin(2x)-3\sin^2 x=0$ w przedziale $[-\pi,\pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób III

Przekształcamy równanie $3\cos^2 x+\sqrt{3}\sin(2x)-3\sin^2 x=0$ równoważnie, stosując wzór na sinus podwojonego kąta i wzory skróconego mnożenia:

$$3\cos^2 x+\sqrt{3}\sin(2x)-3\sin^2 x=0$$

$$3\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-3\sin^2 x=0$$

$$\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)^2-4\sin^2 x=0$$

$$(\sqrt{3}\cos x+\sin x-2\sin x)(\sqrt{3}\cos x+\sin x+2\sin x)=0$$

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=0 \quad \vee \quad \sqrt{3}\cos x+3\sin x=0$$

$$\sin x=\sqrt{3}\cos x \quad \vee \quad \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x$$

Przypadek 1. (gdy $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$).
Dzielimy strony równań alternatywy przez $\cos x$ i otrzymujemy

$$\operatorname{tg} x=\sqrt{3} \quad \vee \quad \operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $\frac{\pi}{3}+\pi k$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $[-\pi,\pi]$ są liczby $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ i $\frac{\pi}{3}$.

Rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ w zbiorze $\mathbb{R}$ są wszystkie liczby postaci $-\frac{\pi}{6}+\pi k$, gdzie $k\in\mathbb{Z}$. Zatem rozwiązaniami alternatywy równań $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ w przedziale $[-\pi,\pi]$ są liczby $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Przypadek 2. (gdy $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).

Ponieważ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$, więc równania alternatywy $\sin x = \sqrt{3}\cos x$ lub $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x$ przyjmują postać

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \sqrt{3}\cdot 0 \quad \text{oraz} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 0$$

i stąd $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 0$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Korzystając z jedynki trygonometrycznej, otrzymujemy

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$$

$$0^2 + 0^2 = 1$$

czyli $0 = 1$. To oznacza, że wśród liczb postaci $\frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, nie ma rozwiązań równania $\sin x = \sqrt{3}\cos x$ i nie ma rozwiązań równania $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób IV (poprzez cosinus podwojonego kąta i sinus sumy)

Przekształcamy równanie $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ równoważnie, stosując wzór na cosinus podwojonego kąta i sinus sumy kątów:

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

$$3\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = 0 \quad /: 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Sposób V

Przekształcamy równanie $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ równoważnie, stosując wzór na sinus podwojonego kąta i wzory skróconego mnożenia:

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 3\sin^2 x = 0$$

$$\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right)^2 - 4\sin^2 x = 0$$

$$(\sqrt{3}\cos x + \sin x - 2\sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2\sin x) = 0$$

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$$

Rozwiązujemy równanie $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \quad /:2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd rozwiązaniami równania $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ oraz $\frac{\pi}{3}$.

Rozwiązujemy równanie $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0 \quad /:2\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd rozwiązaniami równania $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Ostatecznie rozwiązaniami równania $3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$ w przedziale $[-\pi, \pi]$ są liczby: $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 10. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: X.3) rozpoznaje w […] ostrosłupach kąty między odcinkami […] oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów; X.5) oblicza […] pola powierzchni […] ostrosłupów […].

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 918.

4 pkt – obliczenie długości krawędzi SC i BE: $|SC| = 34$ i $|BE| = 15$

ALBO

– obliczenie długości krawędzi SC i BS: $|SC| = 34$ i $|BS| = 5\sqrt{34}$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi BS: $|BS| = 5\sqrt{34}$ i zapisanie, że trójkąt SBC jest prostokątny (albo z rozwiązania wynika, że zdający rozpatruje trójkąt SBC jako prostokątny),

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS i SB: $|AS| = 4\sqrt{34}$ i $|BS| = 5\sqrt{34}$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS i SC: $|AS| = 4\sqrt{34}$ i $|SC| = 34$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS i BE: $|AS| = 4\sqrt{34}$ i $|BE| = 15$,

ALBO

– obliczenie długości krawędzi AS: $|AS| = 4\sqrt{34}$ i zapisanie, że trójkąt SBC jest prostokątny (albo z rozwiązania wynika, że zdający rozpatruje trójkąt SBC jako prostokątny).

3 pkt – obliczenie długości odcinka CE: $|CE| = 9$ **oraz** zapisanie równania pozwalającego obliczyć długość jednego z odcinków: SC, SB, SA, SE, np.:

$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|SC|}$ ($|SC|$ z podobieństwa trójkątów BCS i ECB),

$\frac{|CE|}{|OC|} = \frac{|AC|}{|SC|}$ ($|SC|$ z podobieństwa trójkątów ECO i ACS),

$\frac{|CE|}{|BE|} = \frac{|BC|}{|SB|}$ ($|SB|$ z podobieństwa trójkątów BCS i ECB),

$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|SB|}$ ($|SB|$ z podobieństwa trójkątów ESB i EBC),

$\frac{|CE|}{|OE|} = \frac{|AC|}{|SA|}$ ($|SA|$ z podobieństwa trójkątów ECO i ACS),

$|SE| \cdot |CE| = |BE|^2$ ($|SE|$ z podobieństwa trójkątów ESB i EBC),
ALBO
– zapisanie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, w którym jedną z niewiadomych jest długość krawędzi BS, a drugą długość krawędzi SC, np.
$|BS|^2 + \left(3\sqrt{34}\right)^2 = |SC|^2$ i $\frac{15}{3\sqrt{34}} = \frac{|BS|}{|SC|}$,
ALBO
– zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością krawędzi BS albo długością krawędzi SC, albo długością krawędzi AS), np. $\left(\frac{15}{|BS|}\right)^2 + \left(\frac{15}{3\sqrt{34}}\right)^2 = 1$,
$\left(\frac{3\sqrt{34}}{|SC|}\right)^2 + \left(\frac{15}{3\sqrt{34}}\right)^2 = 1$, $\left(\frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{34}\cdot\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{12\sqrt{2}}{|AS|}\right)^2 = 1$.

2 pkt – obliczenie długości x odcinka BE (lub DE): $x = 15$
ALBO
– obliczenie długości y odcinka EO: $y = 6\sqrt{2}$,
ALBO
– spełnienie warunku 2) i jednego z warunków 3),4) określonych w zasadach oceniania za 1 punkt.

1 pkt – spełnienie jednego z poniższych warunków 1)-4):

1) obliczenie wartości funkcji trygonometrycznej kąta $\frac{\beta}{2} = |\sphericalangle BEO|$ (gdzie O jest punktem przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$), np.: $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{34}}{4}$, $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$;
2) zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta BED i zapisanie równania $\left(3\sqrt{34}\cdot\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right)$;
3) zdający zapisze, że trójkąt SBC (lub SDC) jest prostokątny i wskaże właściwy wierzchołek kąta prostego lub wynika to z rozwiązania, np.:
   – zapisze równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa: $|SC|^2 = |BS|^2 + |BC|^2$,
   – zapisze, że trójkąty CBS oraz CEB są podobne,
   – zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów CBS oraz CEB, np.: $\frac{|BS|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|EC|}$,
   – zapisze, że trójkąty BES oraz CEB są podobne,
   – zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów BES oraz CEB, np.: $\frac{|ES|}{|BE|} = \frac{|BE|}{|EC|}$;
4) zapisze, że trójkąt OEC jest prostokątny lub wynika to z rozwiązania, np.:
   – zdający zapisze równość $|OC|^2 = |OE|^2 + |EC|^2$,
   – zapisze, że trójkąty OEC oraz SAC są podobne,
   – zapisze równość wynikającą z podobieństwa trójkątów OEC oraz SAC, np.: $\frac{|OE|}{|OC|} = \frac{|AS|}{|CS|}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający w rozwiązaniu rozpatruje ostrosłup prawidłowy czworokątny, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** (za poprawną interpretację kąta między ścianami bocznymi oraz za zapisanie równania wynikającego z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BDE).

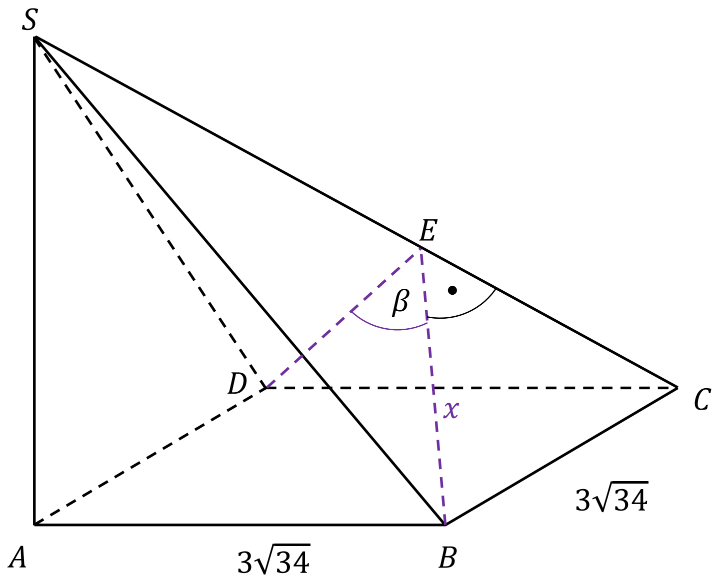
2. Jeżeli zdający w rozwiązaniu błędnie interpretuje kąt między ścianami bocznymi BCS i CDS, np. zakłada, że jest to kąt BSD, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** (za spełnienie warunku 3) z kryterium za 1 punkt).

3. Jeżeli zdający w rozwiązaniu rozpatruje inną bryłę i nie jest nią ostrosłup prawidłowy czworokątny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I (poprzez BE, CS, AS)

Niech E będzie spodkiem wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B. Oznaczmy $x = |BE|$ (zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne BCS i CDS są trójkątami przystającymi, więc $|DE| = |BE| = x$.
Stosujemy do trójkąta BED twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$|BD|^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos\beta$$

$$\left(3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}\right)^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right)$$

$$x = 15$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BEC i obliczamy długość odcinka CE:

$$|CE|^2 = |BC|^2 - |BE|^2$$

$$|CE|^2 = \left(3\sqrt{34}\right)^2 - 15^2$$

$$|CE| = 9$$

Trójkąt BCS jest prostokątny, co wynika z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, gdyż $AB \perp BC$ i odcinek AB jest rzutem prostokątnym odcinka SB na płaszczyznę $ABCD$.
Trójkąty BCS i ECB są podobne (na podstawie cechy kkk podobieństwa trójkątów), więc

$$\frac{|CE|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|SC|}$$

$$\frac{9}{3\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{|SC|}$$

$$|SC| = 34$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ACS i obliczamy długość odcinka AS:

$$|AS|^2 = |SC|^2 - |AC|^2$$

$$|AS|^2 = 34^2 - \left(3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}\right)^2$$

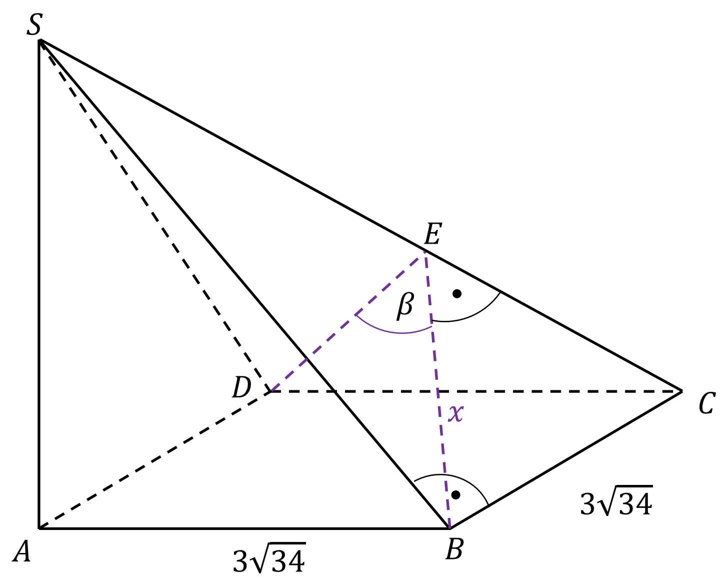
$$|AS| = 4\sqrt{34}$$

Obliczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot |SC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 15 \cdot 34 = 918$$

Sposób Ia (poprzez BE, CE, BS, AS)

Niech E będzie spodkiem wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B. Oznaczmy $x = |BE|$ (zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne BCS i CDS są trójkątami przystającymi, więc $|DE| = |BE| = x$.
Stosujemy do trójkąta BED twierdzenie cosinusów i otrzymujemy

$$|BD|^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos\beta$$

$$\left(3\sqrt{34} \cdot \sqrt{2}\right)^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right)$$

$$x = 15$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BEC i obliczamy długość odcinka CE:

$$|CE|^2 = |BC|^2 - |BE|^2$$

$$|CE|^2 = \left(3\sqrt{34}\right)^2 - 15^2$$

$$|CE| = 9$$

Trójkąt BCS jest prostokątny, co wynika z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, gdyż $AB \perp BC$ i odcinek AB jest rzutem prostokątnym odcinka SB na płaszczyznę $ABCD$. Ponieważ kąt ostry przy wierzchołku C jest wspólnym kątem trójkątów prostokątnych BCE i BCS, więc są to trójkąty podobne. Stąd otrzymujemy:

$$\frac{|BS|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|EC|}$$

$$\frac{|BS|}{3\sqrt{34}} = \frac{15}{9}$$

$$|BS| = 5\sqrt{34}$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkąta ABS obliczamy długość odcinka AS:

$$|AS|^2 = |BS|^2 - |AB|^2$$

$$|AS|^2 = \left(5\sqrt{34}\right)^2 - \left(3\sqrt{34}\right)^2 = \left(4\sqrt{34}\right)^2$$

$$|AS| = 4\sqrt{34}$$

Obliczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AS| + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BS| \cdot |BC| = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 5\sqrt{34} \cdot 3\sqrt{34} = 918$$

Sposób II (poprzez EO, SC, AS, BS)

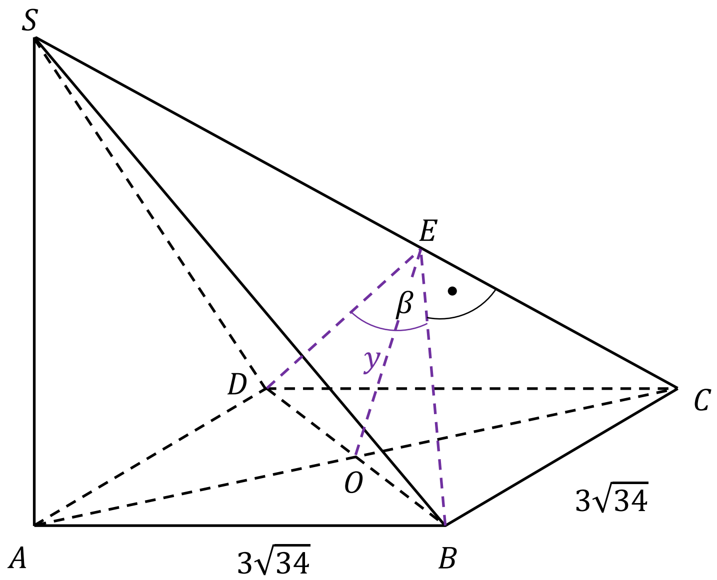
Przyjmijmy następujące oznaczenia:

E – spodek wysokości ściany bocznej BCS poprowadzonej z wierzchołka B,

O – punkt przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$,

y – długość odcinka EO

(zobacz rysunek).



Ponieważ ściany boczne BCS i CDS są trójkątami przystającymi, więc $|DE| = |BE|$.
Obliczamy sinus i cosinus kąta ostrego BEO:

$$\cos\beta = -\frac{9}{25}$$

$$1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2} = -\frac{9}{25} \text{ oraz } 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1 = -\frac{9}{25}$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{17}}{5} \text{ oraz } \cos\frac{\beta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Obliczamy tangens kąta ostrego BEO:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{5}}{\frac{2\sqrt{2}}{5}} = \frac{\sqrt{34}}{4}$$

Obliczamy długość y odcinka EO:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{|BO|}{|EO|}$$

$$\frac{\sqrt{34}}{4} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{34}\cdot\sqrt{2}}{y}$$

$$y = 6\sqrt{2}$$

Ponieważ kąty SCA i OCE mają równe miary, więc korzystając z jedynki trygonometrycznej oraz definicji sinusa i cosinusa, otrzymujemy

$$\sin^2|\sphericalangle OCE| + \cos^2|\sphericalangle SCA| = 1$$

$$\left(\frac{y}{|OC|}\right)^2 + \left(\frac{|AC|}{|SC|}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{34}\cdot\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{34}\cdot\sqrt{2}}{|SC|}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{6\sqrt{17}}{|SC|}\right)^2 = \frac{9}{17}$$

$$|SC| = 34$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ACS i obliczamy długość krawędzi AS:

$$|AS|^2 + |AC|^2 = |SC|^2$$

$$|AS|^2 = 34^2 - \left(3\sqrt{34}\cdot\sqrt{2}\right)^2$$

$$|AS| = 4\sqrt{34}$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ABS i obliczamy długość krawędzi BS:

$$|BS|^2 = |AS|^2 + |AB|^2$$

$$|BS|^2 = \left(4\sqrt{34}\right)^2 + \left(3\sqrt{34}\right)^2$$

$$|BS| = 5\sqrt{34}$$

Obliczamy pole P_b powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AS| + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot|BS|\cdot|BC| = 3\sqrt{34}\cdot 4\sqrt{34} + 5\sqrt{34}\cdot 3\sqrt{34} = 918$$

Zadanie 11. (0–6)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami […].

Zasady oceniania
Rozwiązanie zadania składa się z czterech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga.
Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m, dla których miejsca zerowe funkcji f są tego samego znaku. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
1 pkt – zapisanie i poprawne rozwiązanie nierówności $\frac{m+8}{2-m} > 0$: $m \in (-8, 2)$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.
Podział punktów za trzeci etap rozwiązania:
3 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$: $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$.
2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$, np.

$$\left[\frac{2(2m+1)}{2-m}\right]^2 - 4 \cdot \frac{m+8}{2-m} \leq 180$$

1 pkt – przekształcenie nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np. $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 180$
ALBO
– przekształcenie nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci $\frac{\Delta}{a^2} \leq 180$ (lub $\frac{b^2 - 4ac}{a^2} \leq 180$).
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Czwarty etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie warunki: $m \neq 2$ oraz $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ oraz $m \in (-8, 2)$ oraz $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$:
$m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$.
Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie warunki $m \neq 2$ oraz $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ oraz $m \in (-8, 2)$ oraz $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$: $m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający w którymś z etapów I–III popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za IV etap otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający w etapach I–III nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I–III i warunku $m \neq 2$, to za IV etap otrzymuje **1 punkt**; natomiast jeżeli otrzyma zbiory rozwiązań, które są rozłączne lub co najmniej jeden z nich jest zbiorem liczb rzeczywistych, to za IV etap otrzymuje **0 punktów**.

3. Jeżeli zdający w III etapie rozwiązania popełni błąd – przyjmie, że $x_1 + x_2 = \pm\frac{m+8}{2-m}$ lub $x_1 \cdot x_2 = \pm\frac{2(2m+1)}{2-m}$, lub $x_1 + x_2 = \pm\frac{b}{2a}$, to za III etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za przekształcenie nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za <u>konsekwentne</u> rozwiązanie nierówności do końca), a za IV etap otrzymuje **0 punktów**.

4. Jeżeli zdający wprowadza dodatkowe założenie, które nie wynika z warunków zadania (np. $x_1 + x_2 > 0$), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów** (co najwyżej 1 punkt za I etap, co najwyżej 1 punkt za II etap i co najwyżej 3 punkty za III etap).

5. Jeżeli zdający podczas przekształcania nierówności $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na zastosowanie wzorów Viète'a popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, ale otrzyma nierówność postaci $(x_1 + x_2)^2 + k \cdot x_1 \cdot x_2 \leq 180$, gdzie $k \neq -4$, to za III etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty** (1 punkt za poprawne zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za konsekwentne rozwiązanie nierówności do końca), a za IV etap otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe tylko wówczas, gdy $2 - m \neq 0$ i wyróżnik Δ trójmianu $(2-m)x^2 - 2(2m+1)x + m + 8$ jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta > 0$:

$$[-2(2m+1)]^2 - 4 \cdot (2-m)(m+8) > 0$$

$$16m^2 + 16m + 4 + 4m^2 + 24m - 64 > 0$$

$$20m^2 + 40m - 60 > 0$$

$$20(m-1)(m+3) > 0$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$$

Miejsca zerowe funkcji f mają ten sam znak tylko wtedy, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$. Rozwiązujemy tę nierówność, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$\frac{m+8}{2-m} > 0$$

$$(m+8)(2-m) > 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$m \in (-8, 2)$$

Przekształcamy warunek $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a i rozwiązujemy uzyskaną nierówność z niewiadomą m:

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \leq 180$$

$$\left[\frac{-2(2m+1)}{2-m}\right]^2 - 4 \cdot \frac{m+8}{2-m} \leq 180$$

$$\frac{16m^2 + 16m + 4}{(m-2)^2} + 4 \cdot \frac{(m+8)(m-2)}{(m-2)^2} - \frac{180(m-2)^2}{(m-2)^2} \leq 0$$

$$\frac{16m^2 + 16m + 4 + 4m^2 + 24m - 64 - 180m^2 + 720m - 720}{(m-2)^2} \leq 0$$

$$\frac{-160m^2 + 760m - 780}{(m-2)^2} \leq 0$$

$$-160m^2 + 760m - 780 \leq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$8m^2 - 38m + 39 \geq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$\Delta_m = (-38)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 39 = 196$$

$$m = \frac{38 - 14}{16} = \frac{3}{2} \quad \vee \quad m = \frac{38 + 14}{16} = \frac{13}{4}$$

$$8\left(m - \frac{3}{2}\right)\left(m - \frac{13}{4}\right) \geq 0 \quad \wedge \quad m \neq 2$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$$

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, które jednocześnie spełniają warunki:

- $m \neq 2$
- $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
- $m \in (-8, 2)$
- $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$:

$$m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$$

Funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek $(x_1 - x_2)^2 \leq 180$, tylko wtedy, gdy $m \in (-8, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$.

Zadanie 12.1. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: X.5) oblicza objętości […] stożka […].

Zasady oceniania

2 pkt – poprawne przekształcenia i przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – zapisanie związku między promieniem podstawy stożka a wysokością stożka, np.

$$\frac{1}{2}rh = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{h^2 + r^2},\ \left(\frac{5}{r}\right)^2 + \left(\frac{5}{h}\right)^2 = 1,\ \frac{r}{5} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 25}}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Rozpatrzmy dowolny z rozważanych stożków. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A, B, C – wierzchołki trójkąta, który jest przekrojem osiowym stożka,

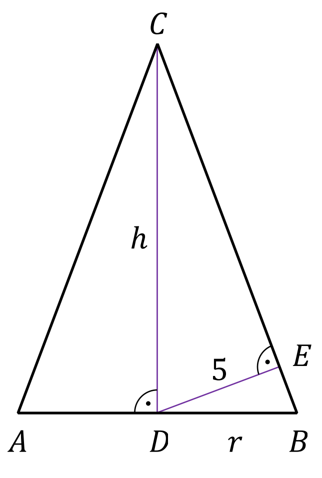
D – środek podstawy stożka,

E – spodek wysokości trójkąta DBC opuszczonej z wierzchołka D na bok BC,

r – promień podstawy stożka,

h – wysokość stożka

(zobacz rysunek).



Zapisujemy pole trójkąta DBC na dwa sposoby i stosujemy twierdzenie Pitagorasa, otrzymując:

$$\frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |DC| = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DE|$$

$$\frac{1}{2}rh = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{h^2 + r^2} \cdot 5$$

$$r^2h^2 = 25h^2 + 25r^2$$

$$r^2 = \frac{25h^2}{h^2 - 25}$$

Zatem objętość V stożka jest równa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{25h^2}{h^2 - 25} \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

To należało wykazać.

Zadanie 12.2. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu […]; XIII.R5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja V przyjmuje wartość najmniejszą dla $h = 5\sqrt{3}$ oraz obliczenie objętości stożka o takiej wysokości: $V(5\sqrt{3}) = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V przyjmuje wartość najmniejszą dla $h = 5\sqrt{3}$.

2 pkt – obliczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji V (lub funkcji $\frac{3}{\pi} \cdot V$): $h = 5\sqrt{3}$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji V (lub funkcji $\frac{3}{\pi} \cdot V$), np.

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{75h^2 \cdot (h^2 - 25) - 25h^3 \cdot 2h}{(h^2 - 25)^2}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający wyznacza pochodną ilorazu jako iloraz pochodnych, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli z rozwiązania wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji oraz zdający poprawnie wyznacza pochodne funkcji $25h^3$ oraz $h^2 - 25$ i dalej popełnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $a \cdot \frac{75h^2(h^2-25)-25h^3\cdot 2h}{(h^2-25)}$ (gdzie $a \neq 0$) lub $\frac{B(h)}{(h^2-25)^2}$, gdzie B jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(5, +\infty)$ ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (za miejsce zerowe pochodnej, za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji, za obliczenie najmniejszej wartości funkcji V).
Jeżeli z rozwiązania nie wynika, że zdający poprawnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji lub zdający błędnie wyznacza pochodną funkcji $25h^3$ lub $h^2 - 25$ i dalej popełnia błędy, otrzymując pochodną w postaci $\frac{75h^2(h^2-25)-25h^3\cdot 2h}{(h^2-25)}$ lub $\frac{B(h)}{(h^2-25)^2}$, gdzie B jest wielomianem stopnia czwartego, który w przedziale $(5, +\infty)$ ma dokładnie jeden pierwiastek, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji i za obliczenie najmniejszej wartości funkcji V).

3. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja osiąga wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości h, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej
ORAZ:
– opisuje (słownie lub graficznie – np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji V
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości h funkcja V ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość,
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości h funkcja V ma minimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.
Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku (np. znakami „+” i „-”) znak pochodnej.

4. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie (nie otrzymuje punktu za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości).

5. Jeżeli zdający, uzasadniając najmniejszą wartość funkcji, rozpatruje funkcję w $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{R}_+$, to może uzyskać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

6. Jeżeli zdający nie uzasadnia istnienia najmniejszej wartości funkcji, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (1 punkt za pochodną i 1 punkt za miejsce zerowe pochodnej).

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy argument, dla którego funkcja V określona wzorem $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$ dla $h \in (5, +\infty)$ osiąga wartość najmniejszą.

Wyznaczamy pochodną funkcji V: $V'(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{75h^2 \cdot \left(h^2 - 25\right) - 25h^3 \cdot 2h}{\left(h^2 - 25\right)^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2\left(h^2 - 75\right)}{\left(h^2 - 25\right)^2}$

dla $h \in (5, +\infty)$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji V:

$$V'(h) = 0$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2 - 75)}{(h^2 - 25)^2} = 0$$

$$25h^2(h^2 - 75) = 0$$

$$h = 0 \notin (5, +\infty) \quad \vee \quad h = -5\sqrt{3} \notin (5, +\infty) \quad \vee \quad h = 5\sqrt{3} \in (5, +\infty)$$

Badamy znak pochodnej:

$$V'(h) < 0$$

$$\frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^2(h^2 - 75)}{(h^2 - 25)^2} < 0 \quad \wedge \quad h \in (5, +\infty)$$

$$h^2(h^2 - 75) < 0 \quad \wedge \quad h \in (5, +\infty)$$

$$h^2 < 75 \quad \wedge \quad h \in (5, +\infty)$$

$$h \in \left(5, 5\sqrt{3}\right)$$

więc $V'(h) < 0$ dla $h \in \left(5, 5\sqrt{3}\right)$ oraz $V'(h) > 0$ dla $h \in \left(5\sqrt{3}, +\infty\right)$.

Zatem funkcja V jest malejąca w przedziale $\left(5, 5\sqrt{3}\right]$ i rosnąca w przedziale $\left[5\sqrt{3}, +\infty\right)$.

Stąd funkcja V osiąga wartość najmniejszą dla $h = 5\sqrt{3}$. Wtedy

$$V\left(5\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25\left(5\sqrt{3}\right)^3}{\left(5\sqrt{3}\right)^2 - 25} = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$$

Uwaga.

Funkcja V jest różniczkowalna, więc jest ciągła. Ponadto $\lim\limits_{h \to 5^+} V(h) = +\infty$ oraz $\lim\limits_{h \to +\infty} V(h) = +\infty$, więc uwzględniając wartość funkcji V w punkcie stacjonarnym $h = 5\sqrt{3}$ równą $V\left(5\sqrt{3}\right) = \frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$, można wyciągnąć wniosek, że funkcja V osiąga wartość najmniejszą równą $\frac{125\sqrt{3}\pi}{2}$ dla argumentu $h = 5\sqrt{3}$.