CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	MMA-P1_1P-204, MMA-P1_2P-204, MMA-P1_3P-204, MMA-P1_4P-204 MMA-P1_6P-204, MMA-P1_7P-204, MMA-P1_QP-204,
Termin egzaminu:	Termin poprawkowy – wrzesień 2020 r.
Data publikacji dokumentu:	

Warszawa 2020

Wersja A/C

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	C	A	D	C	A	C	C	B	A	D	C	C	D	A	D	B	B	A	D	D	B	A	D	D	C

Zadania otwarte

Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania polega na obliczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego: $-2x^2+5x+3$.

Pierwiastki trójmianu kwadratowego: $-2x^2+5x+3$

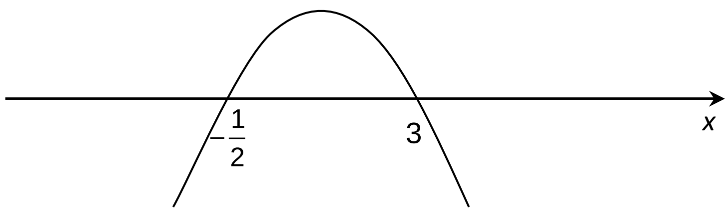
- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=3$ lub zaznaczając pierwiastki trójmianu na wykresie

albo

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu, a następnie stosujemy wzory na pierwiastki: $\Delta=49$, $x_1=\frac{-5+7}{-4}=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{-5-7}{-4}=3$.

Drugi etap rozwiązania polega na wyznaczeniu zbioru rozwiązań nierówności: $-2x^2+5x+3\le 0$.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle 3,+\infty\right)$, np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=-2x^2+5x+3$.



Zasady oceniania
Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania
  - obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = -\frac{1}{2}$ i $x_2 = 3$
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji *f* określonej wzorem $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

albo

- realizując pierwszy etap błędnie wyznaczy pierwiastki (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle 3, +\infty\right)$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

<u>Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki (dysleksja) – dot. zadania 26;</u> w pozostałych zadaniach otwartych 27-34 nie ma żadnych dodatkowych kryteriów oceniania dla dyslektyków.

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$ i zapisze, np. $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle 3, +\infty\right)$ lub $x \in \left(-\infty, 3\right\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{2}, +\infty\right)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \left\langle 3, -\infty\right) \cup \left\langle -\frac{1}{2}, +\infty\right)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Uwagi

1. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu i zapisze np. $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle 3, +\infty\right)$ popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji pierwszego etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik Δ jest niedodatni, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zadanie 27. (0–2)

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie

$$(4x+2)^2=(x+2)(x+11),$$

$$16x^2+16x+4=x^2+13x+22,$$

$$15x^2+3x-18=0,$$

$$5x^2+x-6=0,$$

$$(x-1)(5x+6)=0,$$

$$x=1 \text{ lub } x=-\tfrac{6}{5}.$$

Dla $x=1$ otrzymujemy ciąg geometryczny $(3,6,12)$ o ilorazie 2.

Dla $x=-\frac{6}{5}$ otrzymujemy ciąg geometryczny $\left(\frac{4}{5},-\frac{14}{5},\frac{49}{5}\right)$ o ilorazie $-\frac{7}{2}$.

II sposób

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego. Wtedy ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego otrzymujemy układ równań:

$$4x+2=(x+2)q \text{ i } x+11=(x+2)q^2.$$

Zauważmy, że dla $x=-2$ otrzymujemy ciąg $(0,-6,9)$, który nie jest geometryczny. Zatem $x\neq -2$.

Wtedy mamy

$$q=\frac{4x+2}{x+2} \text{ i } x+11=(x+2)\cdot\left(\frac{4x+2}{x+2}\right)^2$$

Stąd

$$x+11=\frac{(4x+2)^2}{x+2},$$

$$(x+2)(x+11)=(4x+2)^2,$$

$$16x^2+16x+4=x^2+13x+22,$$

$$15x^2+3x-18=0,$$

$$5x^2+x-6=0,$$

$$(x-1)(5x+6)=0,$$

$$x=1 \text{ lub } x=-\tfrac{6}{5}.$$

Dla $x=1$ otrzymujemy ciąg $(3,6,12)$ geometryczny o ilorazie 2, zaś dla $x=-\frac{6}{5}$ otrzymujemy ciąg $\left(\frac{4}{5},-\frac{14}{5},\frac{49}{5}\right)$ geometryczny o ilorazie $-\frac{7}{2}$.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy zapisze

- równanie z niewiadomą x wynikające z własności ciągu geometrycznego, np.:
  $(4x+2)^2=(x+2)(x+11)$

albo

- układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, z których jedną z niewiadomych jest *x*, np.: $4x+2=(x+2)q$ i $x+11=(x+2)q^2$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy wszystkie wartości x: $x=1$, $x=-\frac{6}{5}$.

Uwaga
Jeżeli zdający poda $x=1$ i zapisze, że ciąg (3,6,12) jest geometryczny, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 28. (0–2)

Przykładowe rozwiązania

I sposób
Przekształcamy tezę równoważnie

$$a(a+b)+b^2>3ab$$
$$a^2+ab+b^2>3ab$$
$$a^2-2ab+b^2>0$$
$$(a-b)^2>0\,.$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny. Wyrażenie $(a-b)^2$ jest dodatnie, ponieważ z założenia $a\neq b$ i kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej różnej od zera jest dodatni.

To kończy dowód.

II sposób

Przekształcamy równoważnie nierówność i otrzymujemy: $a^2+ab+b^2>3ab$
$$a^2-2ab+b^2>0\,.$$
Wyrażenie $a^2-2ab+b^2$ traktujemy jako trójmian kwadratowy jednej zmiennej np. *a*.
Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $a^2-2ab+b^2$:
$$\Delta=4b^2-4b^2=0\,.$$
Zatem, dla każdej liczby rzeczywistej *b*, parabola, będąca wykresem trójmianu kwadratowego $a^2-2ab+b^2$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z osią *Ox*. Jest nim punkt
o współrzędnych $(b,0)$.

Oznacza to, że gdy $a=b$ trójmian kwadratowy $a^2-2ab+b^2$ przyjmuje wartość równą zeru. Jeśli natomiast $a\neq b$, to, biorąc pod uwagę fakt, że ramiona paraboli będącej wykresem tego trójmianu są skierowane „do góry”, oznacza to, że ten trójmian przyjmuje wartości dodatnie.

To kończy dowód.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy:

- przekształci podaną nierówność do postaci $(a-b)^2 > 0$

albo

- wyznaczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $a^2 - 2ab + b^2 > 0$, np.: $\Delta = 0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy zapisze pełne uzasadnienie.

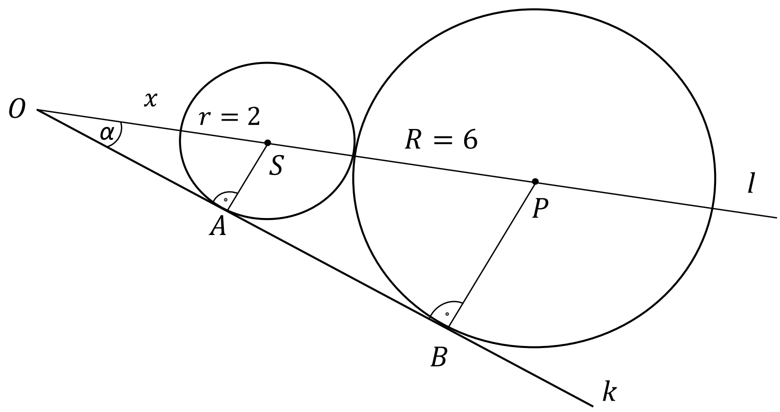
Uwaga
Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości *a* i *b*, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zadanie 29. (0–2)

Przykładowe rozwiązanie

I sposób

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt ASO jest podobny do trójkąta BPO na podstawie cechy podobieństwa (*kąt*, *kąt*, *kąt*).

Oznaczamy $|SO| = x$. Ponieważ okręgi o środkach *S* i *P* są styczne zewnętrznie, więc $|SP| = R + r = 6 + 2 = 8$.

Zapisujemy proporcję wynikająca z podobieństwa trójkątów $\frac{|BP|}{|PO|} = \frac{|AS|}{|SO|}$

$\sin\alpha = \frac{6}{8+x} = \frac{2}{x}$, stąd $x = 4$.

Otrzymujemy $\sin\alpha = \frac{6}{12} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Kąt α jest kątem ostrym, stąd $\alpha = 30^\circ$.

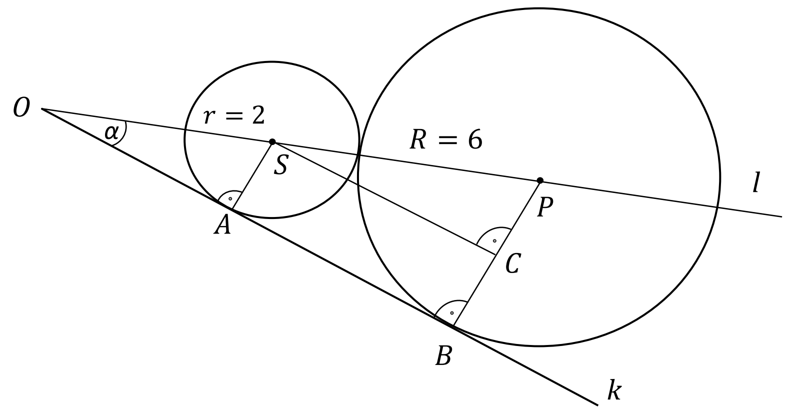
Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....**1 p.**
gdy zauważy, że trójkąt ASO jest podobny do trójkąta BPO i zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa tych trójkątów, np. $\frac{|BP|}{|PO|} = \frac{|AS|}{|SO|}$
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 p.
gdy przeprowadzi poprawnie dalsze rozumowanie.

<u>II sposób</u>

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



Prowadzimy odcinek SC równoległy do prostej *k*, stąd $|AS| = |BC| = r = 2$, zaś $|CP| = R - r = 6 - 2 = 4$.

Trójkąt ASO jest podobny do trójkąta CPS na podstawie cechy podobieństwa (*kąt, kąt, kąt*), $|\sphericalangle CSP| = |\sphericalangle AOS| = \alpha$.

Ponieważ okręgi są styczne zewnętrznie, więc $|SP| = R + r = 6 + 2 = 8$.

W trójkącie CPS mamy $\sin\alpha = \frac{|CP|}{|SP|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, a stąd mamy $\alpha = 30^\circ$.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....**1 p.**
gdy zauważy, że trójkąt ASO jest podobny do trójkąta CPS i zapisze równość: $\sin\alpha = \frac{|CP|}{|SP|}$
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....**2 p.**
gdy przeprowadzi poprawnie dalsze rozumowanie.

Zadanie 30. (0–2)

Przykładowe rozwiązanie

Iloczyn jest równy zero, jeśli przynajmniej jeden z czynników jest równy zero.
Zatem $x^3+8=0$ lub $x^2-9=0$.
Równanie $x^3+8=0$ ma jedno rozwiązanie: $x=-2$.
Równanie $x^2-9=0$ ma dwa rozwiązania: $x=-3$ lub $x=3$.

Zatem rozwiązaniami równania $\left(x^3+8\right)\left(x^2-9\right)=0$ są liczby: $x=-3$, $x=-2$, $x=3$.

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy
- zapisze dwa równania $x^3+8=0$ i $x^2-9=0$ lub z zapisu wynika, że rozwiązuje te równania

albo

- obliczy lub poda rozwiązania jednego z równań:
  $x^3+8=0$ $(x=-2)$ lub $x^2-9=0$ $(x=-3,\ x=3)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $x=-3$, $x=-2$, $x=3$, ale nie uzyska ich w wyniku błędnej metody.

Uwagi
1. Jeżeli zdający poda wszystkie rozwiązania równania, bez zapisanych obliczeń lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający poprawnie zapisze lewą stronę równania w postaci sumy jednomianów i doprowadzając ją do postaci iloczynu popełni błędy, ale skorzysta z własności iloczynu równego zero, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

Zadanie 31. (0–2)

Rozwiązanie

I sposób

Doświadczenie polega na losowaniu jednej kuli z pudełka.

Liczba wszystkich kul w pudełko po dołożeniu *n* kul białych jest równa $8+n$, stąd $|\Omega|=8+n$.

Liczba wszystkich kul białych w pudełku po dołożeniu n kul białych jest równa $5+n$, stąd $|A|=5+n$.

A – oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu jednej kuli białej z pudełka.

Prawdopodobieństwo zdarzenia *A*: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$, czyli $\frac{5+n}{8+n}=\frac{11}{12}$.

Stąd $88+11n=60+12n$, czyli $n=28$.

Do pudełka dołożono 28 białych kul.

Zasady oceniania
Zdający otrzymuje ....**1 p.**
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą np.: $\frac{5+n}{8+n}=\frac{11}{12}$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....**2 p.**
gdy wyznaczy liczbę białych kul, które należy dołożyć do pudełka: 28.

II sposób

Zauważmy, że czarne kule, których jest 3, stanowią $1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$ całej puli.

Niech *x* – oznacza liczbę wszystkich kul w pudełku. Tym samym $\frac{1}{12}x=3$, czyli $x=36$.

Tym samym do pudełka dołożono $36-8=28$ kul białych.

Zasady oceniania
Zdający otrzymuje ....**1 p.**
gdy rozwiąże równanie $\frac{1}{12}x=3$: $x=36$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....**2 p.**
gdy wyznaczy liczbę białych kul, które należy dołożyć do pudełka: $36-8=28$.

III sposób

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe $\frac{11}{12}=\frac{22}{24}=\frac{33}{36}$

Ponieważ w ułamku $\frac{33}{36}$ różnica pomiędzy licznikiem i mianownikiem jest równa 3, czyli liczbie kul czarnych, to 33 stanowi liczbę kul białych wśród 36 kul. Stąd odejmując początkową liczbę kul białych w puli otrzymujemy $33-5=28$ kule dodane do pudełka.

Zasady oceniania
Zdający otrzymuje ....**1 p.**
gdy rozszerzy ułamek do postaci $\frac{11}{12}=\frac{22}{24}=\frac{33}{36}$ i ustali liczbę kul białych w pudełku: 33 i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

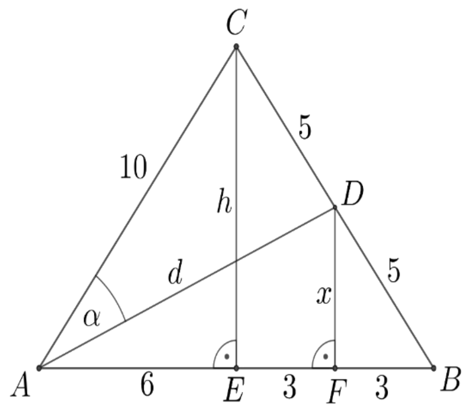
Zdający otrzymuje ....**2 p.**
gdy wyznaczy liczbę białych kul, które należy dołożyć do pudełka: $33-5=28$.

Uwaga
Jeżeli zdający zapisze tylko liczbę 28 bez żadnych obliczeń albo wyjaśnień, to otrzymuje **0 punktów.**

Zadanie 32. (0–4)

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *AEC* otrzymujemy

$$10^2=6^2+h^2,$$
$$h^2=100-36=64.$$
$$h=8.$$

Pole trójkąta *ABC* jest równe

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48.$$

Trójkąt *BDF* jest podobny do trójkąta *BCE* w skali $\frac{1}{2}$, więc

$$x=\frac{1}{2}\cdot h=4 \text{ oraz } |FB|=\frac{1}{2}\cdot|EB|=3.$$

Zatem $|AF|=6+3=9$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *AFD* otrzymujemy

$$d^2=9^2+4^2=81+16=97,$$
$$d=\sqrt{97}.$$

Środkowa dzieli trójkąt na dwa trójkąty o równych polach, więc pole trójkąta *ADC* jest równe

$$P_{ADC}=\frac{1}{2}\cdot P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 48=24.$$

Pole tego trójkąta możemy też zapisać w postaci

$$P_{ADC}=\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|AC|\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{97}\cdot 10\cdot\sin\alpha=5\sqrt{97}\cdot\sin\alpha$$

lub

Otrzymujemy więc równanie

$$5\sqrt{97}\cdot\sin\alpha=24,$$
$$\sin\alpha=\frac{24}{5\sqrt{97}}.$$

Uwaga

- Pole trójkąta *ABC* możemy obliczyć wykorzystując wzór Herona.

$$p=\frac{1}{2}\cdot(12+10+10)=16,\quad p-a=16-12=4,\quad p-b=p-c=16-10=6,$$

$$P_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{16\cdot 4\cdot 6\cdot 6}=48.$$

- Długość środkowej trójkąta możemy obliczyć korzystając ze wzoru

$$d_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 12^2+2\cdot 10^2-10^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 12^2+2\cdot 10^2-10^2}=\sqrt{97}.$$

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 p.**

Zdający obliczy

- wysokość trójkąta *ABC* opuszczoną na podstawę: $h=8$

albo

- długość odcinka *FB*: $|FB| = 3$

albo

- cosinus kąta *ABC*: $\cos\sphericalangle ABC = \frac{3}{5}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie w którym jest istotny postęp .... **2 p.**

Zdający

- obliczy wysokość trójkąta *ABC* opuszczoną na podstawę oraz długość jednego z odcinków *FB*, *AF*: $|FB| = 3$, $|AF| = 9$

albo

- pole trójkąta *ADC*: $P_{ADC} = 24$

albo

- długość środkowej *AD* trójkąta (lub kwadrat tej długości): $|AD| = \sqrt{97}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**

Zdający obliczy długość środkowej *AD* trójkąta (lub kwadrat tej długości) oraz pole trójkąta *ADC*: $|AD| = \sqrt{97}$, $P_{ADC} = 24$.

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

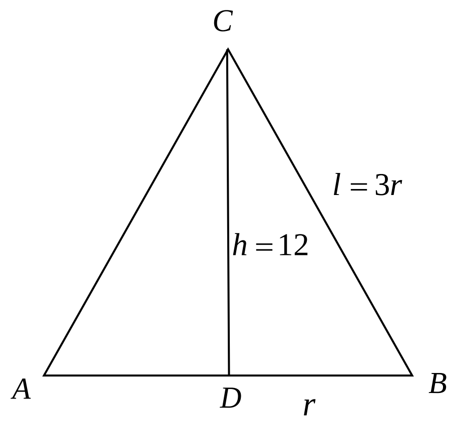
Rozwiązanie pełne...**4 p.**

Zdający obliczy sinus kąta *DAC*: $\sin\alpha = \frac{24}{5\sqrt{97}}$.

Zadanie 33. (0–4)

Przykładowe rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku:
r – promień podstawy,
l – tworząca,
h – wysokość stożka.
Zapisujemy równanie: $\pi rl = 3\pi r^2$, z którego otrzymujemy zależność $l = 3r$.



Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym *BCD* zapisujemy równanie
$12^2 + r^2 = (3r)^2$; $144 = 8r^2$ stąd $r^2 = 18$.

Obliczamy objętość stożka: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 18 \cdot 12 = 72\pi$.

Zasady oceniania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... **1 p.**
Zdający z równości $\pi rl = 3\pi r^2$ wyznaczy zależność pomiędzy *r* i *l*, np. $l = 3r$ albo $\frac{l}{3} = r$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 p.**
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą: $12^2 + r^2 = (3r)^2$ albo $12^2 + \left(\frac{l}{3}\right)^2 = l^2$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**
Zdający obliczy

- kwadrat promienia (lub promień)podstawy stożka: $r^2 = 18$ ($r = 3\sqrt{2}$)

albo

- długość tworzącej stożka: $l = 9\sqrt{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... **4 p.**
Zdający obliczy objętość $V = 72\pi$.

Uwagi

1. Jeśli zdający popełni błędy rachunkowe, które nie przekreślają poprawności rozumowania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **3 punkty**.
2. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest pominięcie współczynnika $\frac{1}{3}$ we wzorze na objętość stożka, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający pominie współczynnik $\frac{1}{3}$ we wzorze na objętość stożka, a ponadto popełnia błędy rachunkowe, ale poprawnie realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający niepoprawnie zastosuje twierdzenie Pitagorasa, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający zapisze błędną relację między polem powierzchni bocznej i polem podstawy stożka, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 34. (0–5)

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = -2x + 7$ i przechodzącej przez punkt P :

$$y = \tfrac{1}{2}x + b .$$

Punkt *P* należy do prostej $y = \tfrac{1}{2}x + b$, więc $5 = \tfrac{1}{2}\cdot 4 + b$. Stąd $b = 3$.

Obliczamy współrzędne punktu S przecięcia prostej $y = -2x + 7$ i prostej *PQ*:

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = \tfrac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

Stąd $-2x + 7 = \tfrac{1}{2}x + 3$, więc

$$x = \frac{8}{5} \text{ i } y = \frac{19}{5},$$

$$\text{Zatem } S = \left(\frac{8}{5}, \frac{19}{5}\right).$$

Ponieważ punkt S jest środkiem odcinka PQ , więc

$$\frac{4+x_Q}{2}=\frac{8}{5} \text{ i } \frac{5+y_Q}{2}=\frac{13}{5}.$$

Stąd $x_Q=-\frac{4}{5}$ i $y_Q=\frac{13}{5}$, czyli $Q=\left(-\frac{4}{5},\frac{13}{5}\right)$.

<u>II sposób</u> („odległość punktu od prostej")
Równanie prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez punkt P ma postać:

$$y=\tfrac{1}{2}x+b.$$

Ponieważ $P=(4,5)$, więc $5=\tfrac{1}{2}\cdot 4+b$, stąd $b=3$. Zatem równanie prostej *PQ* ma postać: $y=\tfrac{1}{2}x+3$.
Punkt *Q* leży na tej prostej, więc

$$Q=\left(x,\tfrac{1}{2}x+3\right).$$

Obliczamy odległość punktu *P* od prostej o równaniu $y=-2x+7$ jest równa

$$\frac{|-2\cdot 4-1\cdot 5+7|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Ponieważ prosta o równaniu $y=-2x+7$ jest symetralną odcinka *PQ*, więc odległość punktu $Q=\left(x,\tfrac{1}{2}x+3\right)$ od prostej o równaniu $y=-2x+7$ jest także równa $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.
Otrzymujemy zatem równanie:

$$\frac{\left|-2x-\tfrac{x}{2}-3+7\right|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}, \text{ stąd } \left|-\tfrac{5}{2}x+4\right|=6.$$

Równanie to jest równoważne alternatywie równań

$$-\tfrac{5}{2}x+4=6 \text{ lub } -\tfrac{5}{2}x+4=-6.$$

Stąd

$$x=-\tfrac{4}{5} \text{ lub } x=4.$$

Obliczamy współrzędne punktu $Q=\left(-\frac{4}{5},\frac{13}{5}\right)$.

Jeśli $x=-\tfrac{4}{5}$, to $y=\tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{4}{5}\right)+3=-\tfrac{2}{5}+3=\tfrac{13}{5}$. Zatem $Q=\left(-\frac{4}{5},\frac{13}{5}\right)$.

Jeśli $x=4$, to $y=\tfrac{1}{2}\cdot 4+3=2+3=5$. Zatem otrzymujemy współrzędne danego punktu *P*.

Uwaga
Zdający może **bez wyznaczenia** równania prostej $y=\tfrac{1}{2}x+3$, tj. prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y=-2x+7$, na której leży punkt $P=(4,5)$, obliczyć odległość $d=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ punktu $P=(4,5)$ od prostej o równaniu $y=-2x+7$ i zapisać równanie z jedną niewiadomą $\sqrt{(x-4)^2+(-2x+7-5)^2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$, z którego wyznaczy pierwszą współrzędną środka odcinka *PQ*.

<u>III sposób</u>
Niech $Q=(x,y)$ będzie końcem odcinka *PQ*. Wtedy współrzędne środka *S* tego odcinka są równe

$$S=\left(\frac{4+x}{2},\frac{5+y}{2}\right).$$

Punkt *S* leży na symetralnej odcinka *PQ*, a więc na prostej o równaniu $y=-2x+7$, więc

$$\frac{5+y}{2}=-2\cdot\frac{4+x}{2}+7,$$
$$y+5=-8-2x+14,$$
$$y=-2x+1.$$

Prosta prostopadła do prostej o równaniu $y=-2x+7$ i przechodząca przez punkt P ma równanie postaci

$$y=\tfrac{1}{2}(x-4)+5.$$

Punkt *P* leży na tej prostej, więc pozostaje rozwiązać układ równań $y=-2x+1$ i $y=\tfrac{1}{2}(x-4)+5$. Stąd otrzymujemy

$$-2x+1=\tfrac{1}{2}(x-4)+5,$$
$$-2x+1=\tfrac{1}{2}x+3,$$
$$\tfrac{5}{2}x=-2,$$
$$x=\tfrac{-4}{5}.$$

Druga współrzędna punktu *Q* jest równa $y=-2\left(-\tfrac{4}{5}\right)+1=\tfrac{8}{5}+1=\dfrac{13}{5}$,

czyli $Q=\left(-\tfrac{4}{5},\tfrac{13}{5}\right)$.

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 p.

Zdający:

- wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y=-2x+7$ i przechodzącej przez punkt $P=(4,5)$

$$y=\tfrac{1}{2}x+3$$

albo

- obliczy odległość *d* punktu $P=(4,5)$ od prostej o równaniu $y=-2x+7$

$$d=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

albo

- wyznaczy odległość punktu *P* od punktu należącego do symetralnej odcinka *PQ* w zależności od jednej zmiennej, np.: $\sqrt{(x-4)^2+(-2x+7-5)^2}$

albo

- wyznaczy współrzędne środka *S* odcinka *PQ* w zależności od współrzędnych końca *Q* odcinka *PQ*: $S=\left(\frac{4+x}{2},\frac{5+y}{2}\right)$

albo

- wyznaczy równanie prostej przechodzącej przez punkt *Q* i równoległej do symetralnej odcinka *P*: $y=-2x+1$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający:

- wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y=-2x+7$

i przechodzącej przez punkt $P=(4,5)$

$$y=\tfrac{1}{2}x+3$$

oraz obliczy odległość *d* punktu $P=(4,5)$ od prostej o równaniu $y=-2x+7$

$$d=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

albo

- obliczy współrzędne środka odcinka *PQ*: $x=\frac{8}{5}$ i $y=\frac{19}{5}$,

albo

- wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y=-2x+7$ i przechodzącej przez punkt $P=(4,5)$

$$y=\tfrac{1}{2}x+3$$

oraz wyznaczy równanie prostej przechodzącej przez punkt *Q* i równoległej do symetralnej odcinka *PQ*: $y=-2x+1$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający:

- zapisze obie równości pozwalające obliczyć współrzędne szukanego punktu Q, np.

$$\frac{4+x_Q}{2}=\frac{8}{5} \text{ i } \frac{5+y_Q}{2}=\frac{19}{5}.$$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, pozwalające obliczyć współrzędną szukanego punktu Q, np.

$$\frac{\left|-2x-\frac{x}{2}-3+7\right|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

lub

$$\frac{\left|-2(2y-6)-y+7\right|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

lub

$$-2x+1=\tfrac{1}{2}(x-4)+5$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe, błędy w przepisaniu, itp.) .... 4p.

Zdający popełni błędy rachunkowe, błędy w przepisywaniu w którejkolwiek fazie rozwiązania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca.

Rozwiązanie pełne.. 5 p.
Zdający obliczy i zapisze współrzędne szukanego punktu Q:

$$Q=\left(-\tfrac{4}{5},\tfrac{13}{5}\right).$$

Uwagi:

1. Jeżeli jedynym błędem jest:
   a) błąd przy ustalaniu współczynnika kierunkowego prostej *PQ*, to zdający może otrzymać
   co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie;
   b) błąd przy wyznaczaniu *b*, polegający na zamianie miejscami współrzędnych punktu *P*,
   to zdający może otrzymać co najwyżej**3 punkty** za całe rozwiązanie;
   c) błąd polegający na zamianie miejscami współrzędnych przy wyznaczaniu środka *S*, to zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie;
   d) błąd polegający na błędnym podstawieniu do wzoru na odległość punktu od prostej, to zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie;
   e) błąd polegający na zastosowaniu niepoprawnego wzoru „$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$”, to zdający może otrzymać co najwyżej **3punkty** za całe rozwiązanie.

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

I. ogólnych zasad oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);

II. dodatkowych szczegółowych zasad oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – matura z matematyki, poziom podstawowy, termin poprawkowy 2020.

I. Ogólne zasady oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
   - błędnego przepisania,
   - przestawienia cyfr,
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie,
   - przestawienia położenia przecinka.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.
8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.
9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.

11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe szczegółowe zasady oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 26. (0–2)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- stosuje poprawną metodę obliczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego $-2x^2+5x+3$, tzn. stosuje wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego i oblicza te pierwiastki, popełniając błędy o charakterze dyskalkulicznym

albo

- w wyniku obliczeń otrzyma wyróżnik ujemny, ale konsekwentnie narysuje parabolę lub zapisze, że $x \in \mathbb{R}$.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

- w zapisie odpowiedzi pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:

$$x \in (-\infty, 3\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{2}, \infty\right)$$

albo

- stosuje poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, poprawnie podstawia do wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego, stosuje poprawny algorytm rozwiązania nierówności kwadratowej z prawidłowym określeniem krańców przedziałów, a jedynymi błędami, jakie popełnia, są błędy rachunkowe o typowym charakterze dyskalkulicznym.

Uwaga!
W ocenie rozwiązania zadania 26. (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się uwagi nr 3 zasad oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 27. (0–2)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- zastosuje wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego zapisując: $a_2=a_1q,\ \ a_3=a_1q^2$ lub $a_2=a_1q,\ a_3=a_2q$ lub zastosuje definicję: $\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2}{a_1}$, bądź własność $a_2^2=a_1a_3$ ciągu geometrycznego.

albo

- zapisze ciąg (3, 6, 12).

Zadanie 28. (0–2)

Stosują się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 29. (0–2)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:
- zapisze, że trójkąty ASO i BPO są podobne

albo
- narysuje trójkąt SCP i oblicza długość jednego z boków lub oznaczy / zapisze kąt $\sphericalangle CSP = \alpha$ lub zapisze, że trójkąt SCP jest podobny do jednego z trójkątów $OAS,$ bądź OBP.

Zadanie 30. (0–2)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:
- obliczy lub poda jedno z rozwiązań równania $x^2 - 9 = 0$

albo
- rozwiązując równanie $x^3 + 8 = 0$ popełni błąd dyskalkuliczny, pisząc $x^3 = 8$, a następnie zapisze $x = 2$.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:
- poprawnie rozwiąże równanie $x^2 - 9 = 0$ (poda oba rozwiązania $x = 3$ oraz $x = -3$) oraz rozwiązując równanie $x^3 + 8 = 0$ popełni błąd dyskalkuliczny, pisząc $x^3 = 8$, a następnie zapisze $x = 2$.

Zadanie 31. (0–2)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:
- zapisze liczbę kul białych jako $n + 5$ oraz liczbę wszystkich kul jako $n + 8$

albo
- zapisze, że wszystkich kul łącznie jest 36

albo
- zapisze kilka ułamków postaci $\frac{n+5}{n+8}$ np.: $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{10}{13}$ itd.

Zadanie 32. (0–4)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:
- zapisze pole trójkąta ADC używając wzoru z sinusem: $P_{ADC} = \frac{1}{2}\,|AD||AC| \cdot \sin\alpha$

albo
- zaznaczy wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C, zapisze, że $|AE| = 6$ oraz zapisze równość wynikającą z tw. Pitagorasa dla trójkąta AEC (lub wszystkie te czynności wykona analogicznie dla trójkąta EBC)

albo
- zapisze, że pole trójkąta ADC (lub ABD) jest równe połowie pola trójkąta ABC

albo
- zastosuje tw. Pitagorasa dla trójkąta FBD oraz zapisze $|BD| = 5$.

Zadanie 33. (0–4)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:
- zapisze równanie $\pi rl = 3\pi r^2$ lub z innych jego zapisów wynika, że poprawnie stosuje wzory na pole powierzchni bocznej i pole podstawy stożka oraz poprawnie ustala relację pomiędzy tymi polami

albo
- zapisze równość wynikającą z tw. Pitagorasa dla trójkąta DBC.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:
- zapisze równanie $\pi rl = 3\pi r^2$ (lub z innych jego zapisów wynika, że poprawnie stosuje wzory na pole powierzchni bocznej i pole podstawy stożka oraz poprawnie ustala relację pomiędzy tymi polami) oraz zapisze równość wynikającą z tw. Pitagorasa dla trójkąta DBC.

Uwagi!
1. *W ocenie rozwiązania zadania 33. (dla zdających z dyskalkulią) zamiast uwagi nr 4 zasad oceniania arkusza standardowego stosuje się następującą uwagę:*

   Jeżeli zdający niepoprawnie stosuje tw. Pitagorasa, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej 2 pkt.

2. *W ocenie rozwiązania zadania 33. (dla zdających z dyskalkulią) zamiast uwagi nr 5 z zasad oceniania arkusza standardowego stosuje się następującą uwagę*

Jeżeli zdający zapisze błędną relację pomiędzy polem powierzchni bocznej i polem podstawy stożka, to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej 1 pkt (za zastosowanie twierdzenia Pitagorasa).

Zadanie 34. (0–5)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:
- poprawnie ustali współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do symetralnej odcinka PQ.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:
- zapisze równanie pozwalające obliczyć współrzędną środka odcinka PQ:
  $-2x + 7 = \frac{1}{2}x + 3$.

Uwaga!
W ocenie rozwiązania zadania 34. (dla zdających z dyskalkulią) zamiast uwag 1.b), c), d) zasad oceniania arkusza standardowego stosuje się następującą:

Jeżeli w rozwiązaniu zdający popełni błąd o charakterze dyskalkulicznym, polegający na zamianie miejscami współrzędnych podczas podstawienia do wzoru / równania, to może otrzymać co najwyżej 4 pkt.