CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2017/2018

FORMUŁA OD 2015
„NOWA MATURA”
i
FORMUŁA DO 2014
„STARA MATURA”

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

SIERPIEŃ 2018

Egzaminatorze!

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny**. Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeń o niesamodzielność w pisaniu pracy.

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	B	A	A	D	B	B	C	C	D	D	A	D	A	B	C	A	B	C	D	A	D	D	B	C	C

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $x^2+6x-16<0$.

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2+6x-16$.

Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2+6x-16$
  - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
    $\Delta=36-4\cdot1\cdot(-16)=100$ i stąd $x_1=\frac{-6-10}{2}=-8$ oraz $x_2=\frac{-6+10}{2}=2$

albo

  - stosujemy wzory Viète'a:
    $x_1\cdot x_2=-16$ oraz $x_1+x_2=-6$, stąd $x_1=-8$ oraz $x_2=2$.

Drugi etap rozwiązania:
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-8,2)$ lub $x\in(-8,2)$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=-8$ i $x_2=2$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x)=x^2+6x-16$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap popełni błędy, ale obliczy dwa różne pierwiastki trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………………. 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-8,2)$ lub $x\in(-8,2)$, lub $x>-8\wedge x<2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów

Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x<2$ lub $x>-8$, $x<2$ oraz $x>-8$, itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1=-8$, $x_2=2$ i błędnie zapisze odpowiedź, np. $x\in(8,2)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający po rozwiązaniu nierówności zapisuje w odpowiedzi, jako zbiór rozwiązań, zbiór, zawierający elementy nienależące do rzeczywistego zbioru rozwiązań lub zbiór pusty, to otrzymuje **1 punkt**. Zapisanie w miejscu przeznaczonym na odpowiedź pierwiastków trójmianu kwadratowego nie jest traktowane jak opis zbioru rozwiązań.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x\in(2,-8)$ lub $(2,-8)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $(x^3+27)(x^2-16)=0$.

Przykładowe rozwiązanie

Lewa strona równania jest iloczynem dwóch czynników x^3+27 oraz x^2-16. Zatem iloczyn ten jest równy 0, gdy co najmniej jeden z tych czynników jest równy 0, czyli $x^3+27=0$ lub $x^2-16=0$.

Rozwiązaniem równania $x^3+27=0$ jest $x=\sqrt[3]{-27}=-3$.

Równanie $x^2-16=0$ doprowadzamy do postaci iloczynowej $(x-4)\cdot(x+4)=0$.

Przynajmniej jeden z czynników $x-4$ lub $x+4$ jest równy 0, czyli $x=4$ lub $x=-4$.

Wszystkie rozwiązania równania $(x^3+27)(x^2-16)=0$,
to $x=-3$ lub $x=4$, lub $x=-4$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zapisze dwa równania $x^3+27=0$ i $x^2-16=0$

albo

- wyznaczy poprawnie (lub poda) rozwiązania jednego z równań: $x^3+27=0$ lub $x^2-16=0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

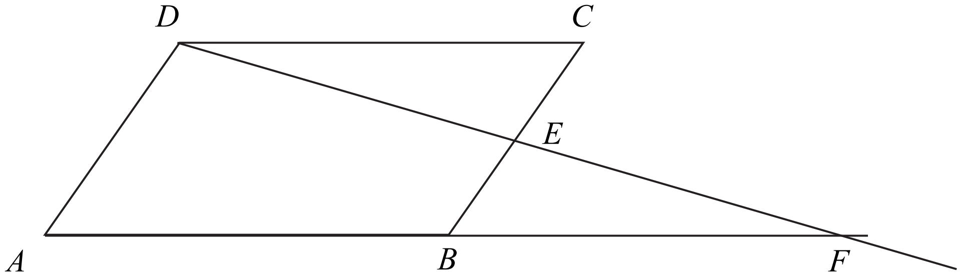
Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $x=-3$ lub $x=4$, lub $x=-4$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający poda wszystkie rozwiązania równania, bez rachunków lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający uzyska trafne rozwiązania równania, ale w wyniku błędnej metody, to otrzymuje **0 punktów**, o ile nie uzyska 1 punktu za zapisanie dwóch równań $x^3+27=0$ i $x^2-16=0$.
3. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy pierwiastki wielomianu $\left(x^3+27\right)\left(x^2-16\right)$ i poda niewłaściwą odpowiedź, np. $x\in\mathbb{R}-\{-4,-3,4\}$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 28. (0–2)

W równoległoboku *ABCD* punkt *E* jest środkiem boku *BC*. Z wierzchołka *D* poprowadzono prostą przecinającą bok *BC* w punkcie *E*. Proste *AB* i *DE* przecinają się w punkcie *F* (zobacz rysunek). Wykaż, że punkt *B* jest środkiem odcinka *AF*.



Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u> (podobieństwo)

Rozpatrujemy trójkąty *AFD* i *BFE*.

Kąty *DAF* i *EBF* są odpowiadające i odcinki *AD* i *BC* są równoległe, więc $|\sphericalangle DAF|=|\sphericalangle EBF|$.

Tak samo wnioskujemy, że $|\sphericalangle ADF|=|\sphericalangle BEF|$. Ponadto kąt przy wierzchołku *F* jest kątem wspólnym w obu trójkątach, więc z cechy *kkk* podobieństwa trójkątów wnioskujemy, że trójkąty *AFD* i *BFE* są podobne.

Stąd wynika proporcja

$$\frac{|AD|}{|BE|}=\frac{|AF|}{|BF|},$$

ale $|BE|=\frac{1}{2}|BC|=\frac{1}{2}|AD|$, gdyż punkt *E* jest środkiem boku *BC*.

Zatem

$$\frac{|AD|}{\frac{1}{2}|AD|}=\frac{|AF|}{|BF|}, \text{ czyli } |AF|=2|BF|,$$

co należało wykazać.

II sposób (przystawanie)
Rozpatrujemy trójkąty BFE oraz CDE.
1. Kąty BEF i CED są wierzchołkowe, więc $|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle CED|$.
2. Kąty FBE i DCE są naprzemianległe i proste AB i CD są równoległe, więc $|\sphericalangle FBE| = |\sphericalangle DCE|$
3. Punkt E jest środkiem boku BC, więc $|BE| = |EC|$.
Stąd, na mocy cechy *kbk* przystawania trójkątów wnioskujemy, że trójkąty BFE i CDE są przystające. Zatem $|BF| = |CD|$.
Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, więc $|AB| = |CD|$. Z ostatnich dwóch równości wynika, że $|AB| = |BF|$, co oznacza, że punkt B jest środkiem odcinka AF.
To należało wykazać.

Schemat punktowania
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy
- zapisze lub wykorzysta przystawanie trójkątów BFE oraz CDE

albo
- zauważy podobieństwo trójkątów AFD i BFE, zapisze proporcję, wynikającą z tego podobieństwa, np. $\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AF|}{|BF|}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.
Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 29. (0–2)

Wykaż, że jeżeli a i b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$.

Przykładowe rozwiązanie

Przekształcamy równoważnie wyrażenie $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$

i otrzymujemy

$$1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\geq 4,$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2,$$

$$a^2+b^2\geq 2ab,$$

$$(a-b)^2\geq 0.$$

Ta kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy poprawnie przekształci nierówność do postaci, w której liczby a i b występują jedynie w wyrażeniach: a^2, b^2 i ab, np.: $\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$ lub $a^2+b^2\geq 2ab$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ i zapisze, że jest ona prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $a^2+b^2\geq 2ab$ i zapisze, że jest ona prawdziwa dla dowolnych liczb, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający przeprowadzi poprawne rozumowanie, które zakończy zapisaniem nierówności $(a-b)^2\geq 0$, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości a i b, to otrzymuje **0 punktów**.
6. Jeżeli zdający w wyniku poprawnych przekształceń równoważnych otrzyma nierówność $(a+b)^2\geq 4ab$, to otrzymuje **1 punkt**.
7. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**. Jeżeli zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ i dopisze komentarz o średnich, uzasadniający jej prawdziwość dla dowolnych liczb dodatnich a, b, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 30. (0–2)

Dziewiąty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równy 34, a suma jego ośmiu początkowych wyrazów jest równa 110. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

Przykładowe rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na a_9:

$$a_9 = a_1 + (9-1) \cdot r .$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na S_8:

$$S_8 = \frac{2a_1 + (8-1) \cdot r}{2} \cdot 8 .$$

Otrzymujemy układ równań

$$34 = a_1 + 8r \text{ i } 110 = 8a_1 + 28r .$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -2, r = 4,5 .$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze dwa równania z dwiema niewiadomymi a_1 i r wynikające z zastosowania poprawnych wzorów na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

np.: $34 = a_1 + 8r$ i $110 = \frac{2a_1 + 7r}{2} \cdot 8$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = -2$ i obliczy różnicę ciągu: $r = 4,5$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, zapisze poprawny ciąg poprzez wypisanie 8 początkowych kolejnych wyrazów i ustali, że $a_1 = -2$ i $r = 4,5$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, wypisze co najmniej trzy kolejne wyrazy i ustali, że $a_1 = -2$ i $r = 4,5$, ale nie zapisze wszystkich 8 początkowych wyrazów ciągu, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko $a_1 = -2$ i $r = 4,5$, to otrzymuje **0 punktów**.
4. Jeżeli zdający dodaje do sumy ośmiu początkowych wyrazów wyraz dziewiąty i zapisuje właściwe równanie z niewiadomą a_1, to otrzymuje przynajmniej **1 punkt**.

Zadanie 31. (0–2)

Punkty $A=(2,4)$, $B=(0,0)$, $C=(4,-2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Punkt D jest środkiem boku AC tego trójkąta. Wyznacz równanie prostej BD.

Przykładowe rozwiązania

Punkt D jest środkiem odcinka AC, więc ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$D=\left(\tfrac{2+4}{2},\tfrac{4+(-2)}{2}\right)=(3,1)\ .$$

Pozostaje wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $B=(0,0)$ i $D=(3,1)$.

<u>I sposób</u>

Szukane równanie ma postać $y=ax+b$. Ponieważ punkty B i D leżą na tej prostej, więc możemy zapisać układ równań:

$$\begin{cases} a\cdot 3+b=1 \\ a\cdot 0+b=0. \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy $b=0$, a odejmując stronami otrzymujemy $3a=1$, czyli $a=\frac{1}{3}$.

<u>II sposób</u>

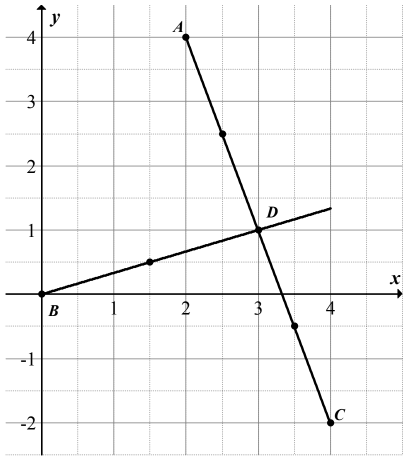
Podstawmy współrzędne punktów $D=(3,1)$ oraz $B=(0,0)$ do równania prostej, przechodzącej przez dane dwa punkty:

$$(y-1)(0-3)-(0-1)(x-3)=0\ .$$

Stąd $-3(y-1)+x-3=0$, czyli $-3y+3+x-3=0$. Zatem $y=\frac{1}{3}x$.

<u>III sposób</u>

Możemy zaznaczyć w układzie współrzędnych wierzchołki trójkąta i korzystając z punktów kratowych ustalić zależność między prostą AC i prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez środek odcinka AC, np. tak, jak na rysunku.



Zauważamy wówczas, że szukana prosta ma równanie $y=\frac{1}{3}x$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy

- wyznaczy lub poda współrzędne środka D odcinka AC: $D=(3,1)$

albo

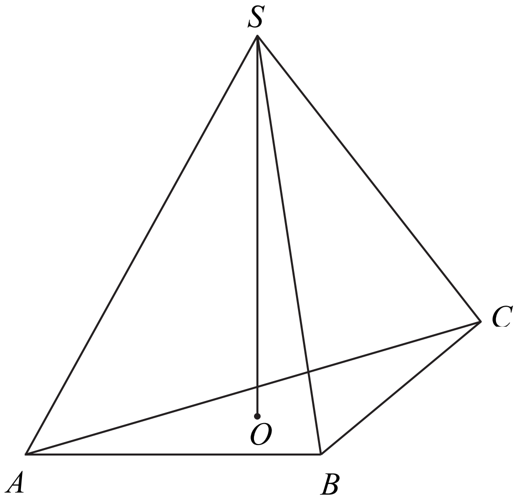
- zaznaczy w układzie współrzędnych wierzchołki trójkąta *ABC* i zaznaczy na rysunku prostą *BD* oraz wyznaczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej *AC*: -3.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy wyznaczy równanie prostej *BD*: $y=\frac{1}{3}x$.

Uwagi
1. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej *AC* i przechodzącej przez punkt *B* oraz zapisze (zaznaczy na rysunku), że trójkąt *ABC* jest równoramienny, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej *AC* i przechodzącej przez punkt *B*, ale nie zapisze (nie zaznaczy na rysunku), że trójkąt *ABC* jest równoramienny, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający wyznacza równanie prostej prostopadłej do prostej *AC* i przechodzącej przez punkt *B* i popełni przy tym błąd lub nie doprowadzi rozwiązania do końca, ale zapisze (zaznaczy na rysunku), że trójkąt *ABC* jest równoramienny, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 32. (0–5)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym *ABCS* krawędź podstawy ma długość *a*. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest dwa razy większe od pola jego podstawy. Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.



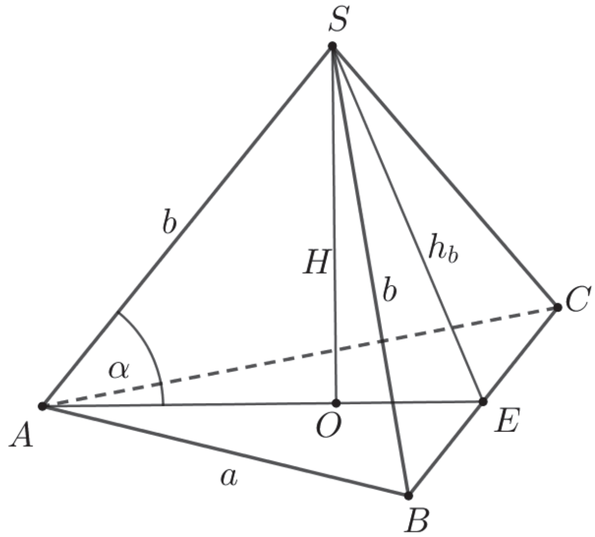
Przykładowe rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia:

h_b – wysokość ściany bocznej ostrosłupa,

α – kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy,

E – środek krawędzi BC.



Z podanej zależności pól $2 \cdot P_p = P_b$ otrzymujemy równanie

$$2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b ,$$

skąd otrzymujemy

$$h_b = \frac{a\sqrt{3}}{3} .$$

Trójkąt ABC jest równoboczny, spodek O wysokości ostrosłupa jest środkiem ciężkości tego trójkąta, więc $|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz $|AO| = \frac{2}{3}|AE|$. Stąd

$$|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3} .$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym BES i otrzymujemy

$$\left|SB\right| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Ponieważ w ostrosłupie prawidłowym krawędzie boczne mają równe długości, więc

$$\left|AS\right| = \left|BS\right| = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Z definicji cosinusa w trójkącie prostokątnym AOS otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{\left|AO\right|}{\left|AS\right|}. \ \cos\alpha = \frac{\left|AO\right|}{\left|AS\right|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

Uwaga

Zamiast wyznaczać długość krawędzi bocznej może wyznaczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OES wysokość SO ostrosłupa:

$$\left|SO\right| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a}{2}.$$

Następnie z trójkąta prostokątnego ASO możemy obliczyć tangens kąta α:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\left|SO\right|}{\left|AO\right|} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznych możemy obliczyć cosinus kąta α:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ oraz } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Z pierwszego równanie otrzymujemy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$. Stąd i z drugiego równania otrzymujemy

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\frac{7}{4}\cos^2\alpha = 1,$$

$$\cos^2\alpha = \frac{4}{7}.$$

Stąd $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, gdyż kąt α jest ostry.

Schemat punktowania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.
Zdający:

- zaznaczy na rysunku kąt α lub zapisze $\cos\alpha = \frac{\left|AO\right|}{\left|AS\right|}$

albo

- wyznaczy długość odcinka AO: $\left|AO\right| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

albo

- wyznaczy długość odcinka EO: $\left|EO\right| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$,

albo

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi a i h_b wynikające z zależności między polem podstawy i polem powierzchni bocznej ostrosłupa: $2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_b$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający wyznaczy wysokość ściany bocznej ostrosłupa opuszczoną na krawędź podstawy: $h_b = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający

- wyznaczy długość krawędzi bocznej $|AS| = \frac{a\sqrt{21}}{6}$ i nie wyznaczy długości odcinka AO

albo

- wyznaczy długość odcinka AO i wysokość ostrosłupa: $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $|SO| = \frac{a}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.
Zdający:

- wyznaczy $|AS| = \frac{a\sqrt{21}}{6}$ i $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

albo

- obliczy $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,

albo

- obliczy $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy wartość $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **4 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd polegający na zastosowaniu niepoprawnego wzoru na pole trójkąta równobocznego, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując twierdzenie Pitagorasa, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, przyjmując, że punkt O jest środkiem odcinka AE lub przyjmie, że $|AO| = \frac{1}{3}|AE|$, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
5. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem powierzchni bocznej, przyjmując $P_p = 2P_b$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

6. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem powierzchni bocznej, przyjmując $2P_p = P_{sb}$ lub $P_p = 2P_{sb}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
7. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
8. Jeżeli zdający poprawnie rozwiązuje zadanie, oblicza $\text{tg}\alpha$ lub $\sin\alpha$, a następnie podaje przybliżoną wartość cosinusa z tablic, to może otrzymać maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 33. (0–4)

Ze zbioru $A=\{-3,-2,-1,1,2,3\}$ losujemy liczbę a, natomiast ze zbioru $B=\{-1,0,1,2\}$ losujemy liczbę b. Te liczby są – odpowiednio – współczynnikiem kierunkowym i wyrazem wolnym funkcji liniowej $f(x)=ax+b$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymana funkcja f jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe.

Przykładowe rozwiązanie

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para (a,b) liczb, gdzie $a\in A$ oraz $b\in B$. Liczba $|\Omega|$ wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega|=6\cdot 4=24.$$

Niech Z oznacza zdarzenie polegające na tym, że otrzymana funkcja f jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe. Funkcja liniowa jest rosnąca, gdy współczynnik kierunkowy a jest dodatni, więc $a\in\{1,2,3\}$. Rosnąca funkcja liniowa ma dodatnie miejsce zerowe tylko wówczas, gdy jej wykres przecina oś Oy w punkcie o ujemnej rzędnej. Zatem współczynnik b musi być równy -1.

Zbiór Z ma więc postać

$$Z=\{(1,-1),(2,-1),(3,-1)\}.$$

Zatem liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu Z jest równa

$$|Z|=3.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia Z jest równe:

$$P(Z)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=6\cdot 4=24$ lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne

albo

- zapisze, że funkcja liniowa f jest rosnąca tylko dla $a\in\{1,2,3\}$,

albo

- zapisze, że funkcja liniowa f, jako funkcja rosnąca, ma dodatnie miejsce zerowe dla $b=-1$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=6\cdot 4$ lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne oraz zapisze, że funkcja liniowa f jest rosnąca tylko dla $a\in\{1,2,3\}$

albo

- zapisze, że funkcja liniowa f jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe dla $a\in\{1,2,3\}$ i $b=-1$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający obliczy lub poda liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 6 \cdot 4$ oraz

- wyznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *Z*:
  ($Z = \{(1,-1),(2,-1),(3,-1)\}$)

albo

- zapisze, że $a \in \{1, 2, 3\}$, $b = -1$ oraz $|Z| = 3$.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający obliczy szukane prawdopodobieństwo: $\frac{1}{8}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający uzyska w wyniku końcowym liczbę spoza przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający poda, że $|Z| = 3$ i nie zapisze zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *Z* i z rozwiązania nie można wywnioskować, które zdarzenia elementarne zdający bierze pod uwagę, ale zapisze, że $a \in \{1, 2, 3\}$ (albo tylko $b = -1$), to za całe rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający poda, że $|Z| = 3$ i nie zapisze zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *Z* i z rozwiązania nie można wywnioskować, które zdarzenia elementarne zdający bierze pod uwagę, nie zapisze, że $a \in \{1, 2, 3\}$ oraz nie zapisze, że $b = -1$, to za całe rozwiązanie zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający wypisze 3 poprawne zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *Z* i przyjmie, że takimi zdarzeniami są też inne pary postaci (a,b), gdzie $a \in \{1, 2, 3\}$, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile przyjęcie tych niepoprawnych zdarzeń elementarnych jest efektem błędów rachunkowych przy obliczaniu miejsc zerowych utworzonych funkcji.
5. Jeżeli zdający wypisze 2 poprawne zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *Z* i trzecie poprawne potraktuje jako zdarzenie niesprzyjające zdarzeniu *Z*, to może otrzymać **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile odrzucenie tego poprawnego zdarzenia elementarnego jest efektem błędów rachunkowych przy obliczaniu miejsca zerowego utworzonej funkcji.
6. Jeżeli zdający zamiast rozważać $a > 0$ rozważa $a < 0$, to jego rozwiązanie może być ocenione tak jak w niżej wymienionych przypadkach.
   Przypadek 6a. Jeśli zdający, przy rozważanym $a < 0$, rozważa $b < 0$, rysuje wykres rosnącej funkcji liniowej (lub w inny sposób sygnalizuje, że rozważa funkcję rosnącą) i poprawnie oblicza $|\Omega|$, to może otrzymać **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiązuje zadanie do końca.
   Przypadek 6b. Jeśli zdający, przy rozważanym $a < 0$, rozważa funkcję liniową malejącą i konsekwentnie $b > 0$, a ponadto poprawnie oblicza $|\Omega|$, to może otrzymać **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiązuje zadanie do końca.
7. Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie metodą drzewkową to może otrzymać:
   4 punkty – za rozwiązanie w pełni poprawne;
   3 punkty – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

$a = 1, 2, 3$ i że a może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, $b = -1$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$;

2 punkty – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

- $a > 0$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, $b < 0$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$

albo

- $a = 1, 2, 3$ i $b = -1$;

1 punkt – za rozwiązanie, z którego jednoznacznie wynika, że zdający ustala:

- $a = 1, 2, 3$

albo

- $a > 0$ i że może być wylosowane z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

8. Jeżeli zdający poprawnie obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych (lub wypisze wszystkie zdarzenia elementarne) i zapisze, że funkcja liniowa f, jako funkcja rosnąca, ma dodatnie miejsce zerowe gdy $b = -1$, to może otrzymać **2 punkty**.

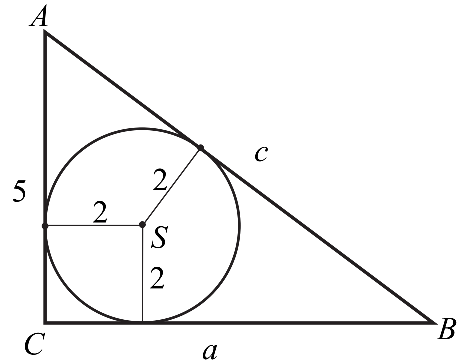
Zadanie 34. (0–4)

W trójkącie prostokątnym ACB przyprostokątna AC ma długość 5, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2. Oblicz pole trójkąta ACB.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole trójkąta ACB możemy zapisać na dwa sposoby. Ze wzoru na pole trójkąta z podstawą i prostopadłą doń wysokością trójkąta otrzymujemy

$$P_{ACB} = \tfrac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC| = \tfrac{1}{2}\cdot 5\cdot a = \tfrac{5}{2}a\,,$$

a ze wzoru na pole trójkąta z promienieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt otrzymujemy

$$P_{ACB} = p\cdot r = \tfrac{1}{2}\cdot\left(|AC|+|BC|+|AB|\right)\cdot r = \tfrac{1}{2}\cdot(5+a+c)\cdot 2 = a+c+5\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$a+c+5 = \tfrac{5}{2}a\,,$$

$$c = \tfrac{3}{2}a-5\,.$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą

$$5^2+a^2 = \left(\tfrac{3}{2}a-5\right)^2,$$

$$25+a^2 = \tfrac{9}{4}a^2-15a+25\,,$$

$$\tfrac{5}{4}a^2-15a=0\,,$$

$$\tfrac{5}{4}a(a-12)=0\,.$$

Stąd

$$a=0 \text{ lub } a=12\,.$$

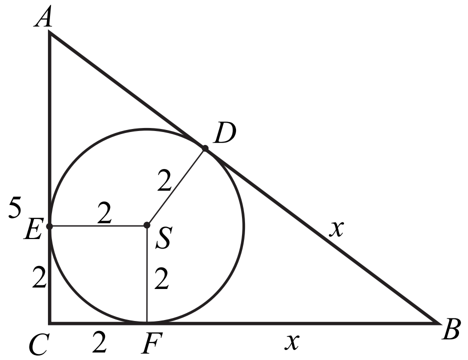
Pierwsze z otrzymanych rozwiązań nie spełnia warunków zadania, więc $a=12$.

Pole trójkąta ACB jest więc równe

$$P_{ACB} = \tfrac{5}{2}a = \tfrac{5}{2}\cdot 12 = 30\,.$$

II sposób

Poprowadźmy promienie okręgu wpisanego w trójkąt ACB do punktów styczności tego okręgu z bokami tego trójkąta i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Czworokąt $CFSE$ jest kwadratem o boku długości 2, gdyż kąty przy wierzchołkach C, F i E są proste, a boki ES i FS są równej długości. Zatem $|EC| = |FC| = 2$.

Stąd wynika, że $|AE| = |AC| - |EC| = 5 - 2 = 3$.

Oznaczmy $x = |BF|$. Zatem $|BC| = |BF| + |CF| = x + 2$.

Z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy

$$|BD| = |BF| = x \text{ oraz } |AD| = |AE| = 3.$$

Zatem $|AB| = |AD| + |BD| = 3 + x$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2,$$

$$(3 + x)^2 = 5^2 + (x + 2)^2,$$

$$9 + 6x + x^2 = 25 + x^2 + 4x + 4,$$

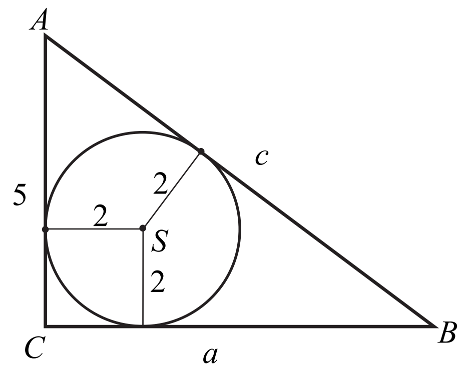
$$x = 10.$$

Przyprostokątna AC ma więc długość $|BC| = x + 2 = 12$, więc pole trójkąta ACB jest równe

$$P_{ACB} = \tfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30.$$

<u>III sposób</u>

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ze wzoru na promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny otrzymujemy

$$2 = \tfrac{5 + a - c}{2},$$

$$4 = 5 + a - c,$$

$$c = a + 1.$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$5^2 + a^2 = c^2.$$

Zatem

$$5^2 + a^2 = (a + 1)^2,$$

$$25 + a^2 = a^2 + 2a + 1,$$

$$2a = 24,$$
$$a = 12.$$

Pole trójkąta ACB równe więc równe

$$P_{ACB} = \frac{5}{2}a = \frac{5}{2}\cdot 12 = 30.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ... 1 p.

Zdający

- zapisze zależność między długościami przyprostokątnej BC i przeciwprostokątnej trójkąta, np.: $5^2 + a^2 = c^2$ lub $a + c + 5 = \frac{5}{2}a$ lub $2 = \frac{5+a-c}{2}$

albo

- zapisze lub zaznaczy na rysunku równości co najmniej dwóch par odpowiednich odcinków, wynikające z twierdzenia o odcinkach stycznych, np.: $|EC| = |FC|$ i $|BF| = |BD|$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ... 2 p.

Zdający

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć długość przyprostokątnej BC, np.: ($c = \frac{3}{2}a - 5$ i $5^2 + a^2 = c^2$) lub ($2 = \frac{5+a-c}{2}$ i $5^2 + a^2 = c^2$)

albo

- zapisze długości boków BC i AB trójkąta ACB w zależności od jednej zmiennej, np. długości x odcinka BF: $|BC| = x + 2$, $|AB| = x + 3$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ... 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą prowadzące do wyznaczenia długości boków BC i AB trójkąta, np.: $5^2 + a^2 = \left(\frac{3}{2}a - 5\right)^2$ lub $(x+3)^2 = (x+2)^2 + 5^2$ lub $5^2 + a^2 = (a+1)^2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne ... 4 p.

Zdający obliczy pole trójkąta ACB: $P_{ACB} = 30$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując twierdzenie Pitagorasa, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd merytoryczny, stosując nieistniejący wzór „kwadrat sumy/różnicy = suma/różnica kwadratów”, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający pominie we wzorze na pole trójkąta współczynnik $\frac{1}{2}$, to otrzymuje **3 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
5. Jeżeli zdający przyjmie, że 5 to długość przyprostokątnej BC, to może otrzymać maksymalnie **4 punkty**, o ile poprawnie rozwiąże zadanie do końca.
6. Jeżeli zdający przyjmie, że 5 to długość przeciwprostokątnej, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, za zapisanie (zaznaczenie) równości odcinków stycznych.