

KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI  
Próbna Matura z OPERONEM

**Matematyka**  
**Poziom podstawowy**

Listopad 2017

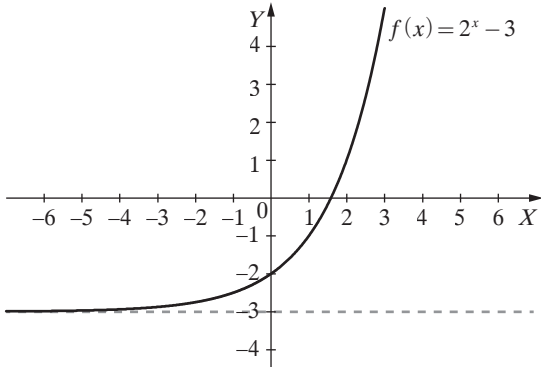
Zadania zamknięte

Za każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
1.	A	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{8}} = x \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$
2.	B	$a = \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3} = \frac{14\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)}{(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)} = \frac{28+42\sqrt{2}}{-7} = -4-6\sqrt{2} \approx -12,485$
3.	B	$x = 9m + 7 \wedge m \in N,$ $x^2 = (9m + 7)^2 = 81m^2 + 126m + 49 = 9(9m^2 + 14m + 5) + 4$ Zatem reszta z dzielenia przez 9 wynosi 4, gdyż: $9m^2 + 14m + 5 \in N$
4.	B	Prosta $AB$ ma wzór: $y = -\frac{5}{8}x - \frac{26}{8}$ , zatem współczynnik kierunkowy prostej $k$ jest równy $a = \frac{8}{5}$ .
5.	A	$a_3 = \frac{7}{6}, a_5 = \frac{11}{8}$ $(\frac{7}{6}, x, \frac{11}{8})$ - ciąg arytmetyczny, więc $x = \frac{\frac{7}{6} + \frac{11}{8}}{2} \Rightarrow x = \frac{61}{48}$
6.	C	$x_0 = 2\sqrt{3} \Rightarrow x_0^3 = (2\sqrt{3})^3 \Rightarrow x_0 = 8 \cdot 3\sqrt{3} \Rightarrow x_0 = 24\sqrt{3}$
7.	B	$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 2$ . Inne punkty nie spełniają równania określającego funkcję.
8.	D	$a_7 + a_8 = 0 \Rightarrow a_1q^6 + a_1q^7 = 0 \Rightarrow a_1q(1+q) = 0$ . Wyrazy ciągu są różne od 0, zatem z równania otrzymujemy $q = -1$ . Obliczamy sumę tysiąca początkowych wyrazów ciągu: $S_{1000} = a_1 \frac{1 - (-1)^{1000}}{1 - (-1)} \Rightarrow S_{1000} = 0$
9.	D	$ \angle ADC  =  \angle ABC  = 70^\circ,$ $ \angle DCA  = 90^\circ \Rightarrow  \angle DAC  = 180^\circ - 70^\circ - 90^\circ = 20^\circ$
10.	B	Kwadrat skali podobieństwa to stosunek pól, zatem $k^2 = \frac{60}{12} = 5$ , stąd $k = \sqrt{5}$ . Zatem obwód trójkąta $DEF$ jest równy $16\sqrt{5}$ .
11.	C	$4m - 2 < 0 \wedge k - 3 = 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2} \wedge k = 3$
12.	C	Wzór funkcji, której wykres powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ w symetrii osiowej względem osi $OX$ , to $y = -f(x)$ , zatem $y = -f(x) = -x^2 + 4$ .

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
13.	C lub D	Wyrażenie jest określone dla wszystkich $x$ z wyjątkiem miejsc zerowych mianownika, szukamy więc miejsc zerowych trójmianu kwadratowego: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$ .
14.	D	Jeśli $x, x + 4$ – długości przyprostokątnych, to: $\frac{x}{x+4} = \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3x = x\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \Rightarrow$ $x(3 - \sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}(3 + \sqrt{3})}{9 - 3} \Rightarrow$ $x = \frac{12\sqrt{3} + 12}{6} \Rightarrow x = 2\sqrt{3} + 2$
15.	C	Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, zatem tylko liczba $(-3)$ czyni daną nierówność fałszywą.
16.	D	Przedziały są rozłączne, zatem $B \setminus A = B$ .
17.	D	$P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \sin \alpha = 3\sqrt{15} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ , wyznaczamy cosinus kąta z „jedynki trygonometrycznej”: $\cos^2 \alpha + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{16} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4} \vee \cos \alpha = -\frac{1}{4}$ Wybieramy ujemną liczbę, gdyż z treści zadania wiadomo, że kąt $\alpha$ jest rozwarty.
18.	B	Co najwyżej 1, to znaczy 1 lub 0. $ \Omega  = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16,  A  = 4 + 1 = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{5}{16}$
19.	B	$2r = 12 \Rightarrow r = 6 \wedge h = 6 \wedge l = 6\sqrt{2} \Rightarrow$ $P = \pi \cdot 36 + \pi \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} \Rightarrow P = 36\pi(1 + \sqrt{2})$
20.	B	Wyznaczamy wzór na ogólny wyraz ciągu: $a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 + 4n - [3(n-1)^2 + 4(n-1)] \Rightarrow$ $a_n = 3n^2 + 4n - (3n^2 - 6n + 3 + 4n - 4) \Rightarrow$ $a_n = 6n + 1 \Rightarrow a_5 = 31$
21.	D	$x_w = 2 \Rightarrow -\frac{16}{2m+6} = 2 \Rightarrow 4m + 12 = -16 \Rightarrow m = -7$ Zatem funkcja kwadratowa ma wzór: $f(x) = -4x^2 + 16x + 5 \Rightarrow f(2) = -\frac{336}{-16} = 21$
22.	B	$h$ – wysokość trójkąta $h^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ Pole przekroju jest więc równe $P = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
23.	D	$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 36 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 36 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$

## Zadania otwarte

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
24.	<p>Postęp: Przekształcenie nierówności do postaci <math>-9x^2 + 12x - 3 &lt; 0</math> i wyznaczenie pierwiastków: <math>x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1</math></p>	1
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: Rozwiązanie nierówności: <math>x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)</math></p>	2
25.	<p>Postęp: Narysowanie wykresu funkcji:</p> 	1
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: Podanie zbioru wartości funkcji: <math>ZW = (-3, +\infty)</math></p>	2
26.	<p>Postęp: Zapisanie nierówności w postaci: <math>\frac{1-4a+4a^2}{1-a} \geq 0</math></p>	1
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: Zapisanie nierówności w postaci: <math>\frac{(1-2a)^2}{1-a} \geq 0</math> i uzasadnienie, że jest prawdziwa: licznik zawsze nieujemny i mianownik dodatni, gdyż z założenia <math>a &lt; 1</math>, zatem cały ułamek zawsze nieujemny.</p>	2
27.	<p>Postęp: Zapisanie wzoru funkcji w postaci: <math>f(x) = (x-2)(x+4)</math></p>	1
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: Przekształcenie wzoru do postaci ogólnej i zapisanie współczynników: <math>b = 2, c = -8</math></p>	2
28.	<p>Postęp: Zapisanie równania wynikającego z treści zadania: <math>3^{2b} = 3^a \cdot 3^c</math></p>	1
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: Przekształcenie równania i zapisanie wniosku uzasadniającego tezę zadania: <math>2b = a + c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}</math>, zatem ciąg <math>(a, b, c)</math> jest arytmetyczny.</p>	2
29.	<p>Postęp: Zapisanie liczebności zdarzenia <math>A:  A  = 10</math> lub wypisanie zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu <math>A: A = \left\{ (5,5,6), (5,6,5), (6,5,5), (4,6,6), (6,4,6), (6,6,4), (5,6,6), (6,5,6), (6,6,5), (6,6,6) \right\}</math></p>	1
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: Wyznaczenie liczebności zbioru <math>\Omega:  \Omega  = 216</math> Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia <math>A: P(A) = \frac{5}{108}</math></p>	2

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
30.	<p>Postęp: Zapisanie oznaczeń: <math>ABC</math> – wierzchołki trójkąta <math>DEFG</math> – wierzchołki kwadratu <math>x</math> – bok kwadratu <math>CH</math> – wysokość trójkąta <math>ABC</math> <math>CJ</math> – wysokość trójkąta <math>D, E \in AB, F \in BC, G \in AC</math> i zapisanie proporcji: <math>\frac{ AB }{ GF } = \frac{ CH }{ CJ }</math></p>	1
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie proporcji w postaci: <math>\frac{a}{x} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} - x}</math></p>	2
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: Rozwiązanie równania: <math>x = \frac{a\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = a(2\sqrt{3} - 3)</math></p>	4 (3 pkt, gdy popołniono jeden bład rachunkowy)
31.	<p>Istotny postęp: Wprowadzenie oznaczenia: <math>C : C = (0, y)</math> i zapisanie długości boków trójkąta <math>\begin{cases}  AB  = \sqrt{(4-1)^2 + (2+3)^2},  AC  = \sqrt{16 + (2-y)^2}, \\  BC  = \sqrt{1 + (y+3)^2} \end{cases}</math></p>	2 (1 pkt, gdy popołniono jeden bład rachunkowy)
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa: <math>9 + 25 = 16 + (2 - y)^2 + 1 + (y + 3)^2</math></p>	3
	<p>Rozwiązanie pełne: Zapisanie równania w postaci: <math>2y^2 + 2y - 4 = 0</math></p>	4
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: Rozwiązanie równania: <math>y_1 = -2, y_2 = 1</math> i zapisanie odpowiedzi: <math>C = (0, -2)</math> lub <math>C = (0, 1)</math></p>	5
32.	<p>Postęp: Wprowadzenie dokładnych oznaczeń lub wykonanie rysunku z oznaczeniami: <math>ABC</math> – dolna podstawa graniastoslupa <math>A'B'C'</math> – górna podstawa graniastoslupa <math>P_{ACCA'} = 2\sqrt{3},  \angle C'AC  = 60^\circ \Rightarrow \frac{h}{a} = \sqrt{3}</math> <math> CC'  = h</math></p>	1
	<p>Istotny postęp: Zapisanie układu równań: <math>\begin{cases} \frac{h}{a} = \sqrt{3} \\ ah = 2\sqrt{3} \end{cases}</math></p>	2
	<p>Pokonanie zasadniczych trudności: Rozwiązanie układu nierówności: <math>\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ h = \sqrt{6} \end{cases}</math></p>	3
	<p>Rozwiązanie prawie całkowite: Obliczenie przekątnej ściany bocznej graniastoslupa: <math> AC'  = 2\sqrt{2}</math> i wysokości trójkąta <math>ABC'</math>: <math> C'D'  = \frac{\sqrt{30}}{2}</math></p>	5 (4 pkt, gdy obliczono tylko $ AC'  = 2\sqrt{2}$ )
	<p>Rozwiązanie bezbłędne: Obliczenie pola trójkąta <math>ABC'</math>: <math>P = \frac{\sqrt{15}}{2}</math></p>	6