

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017**

**FORMUŁA OD 2015  
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-P1**

**CZERWIEC 2017**

## Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	A	C	D	D	B	B	C	C	A	C	D	C	B	B	D	B	B	D	A	D	B	C	A	A	A

## Zasady oceniania zadań otwartych

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.*

### Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność  $(x - \frac{1}{2})x > 3(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{3})$ .

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (3.5).
--	--

#### Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap polega na wyznaczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego.

Drugi etap polega na zapisaniu zbioru rozwiązań nierówności.

#### Realizacja pierwszego etapu

##### I sposób

Zapisujemy nierówność w postaci równoważnej  $-2x^2 + \frac{1}{2} > 0$ .

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $-2x^2 + \frac{1}{2}$ . Możemy to zrobić na kilka sposobów:

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ i stąd } x_1 = \frac{0-2}{-4} = \frac{1}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{0+2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{4} \text{ oraz } x_1 + x_2 = 0, \text{ stąd } x_1 = -\frac{1}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{1}{2}$$

albo

- zapisujemy postać iloczynową trójmianu  $-2(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$ , z której odczytujemy pierwiastki:  $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$ .

**Uwaga**

Postać iloczynową możemy też otrzymać, zauważając, że po obu stronach nierówności występuje ten sam czynnik  $(x - \frac{1}{2})$ . Wtedy nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\begin{aligned} (x - \frac{1}{2}) \left[ x - 3 \left( x + \frac{1}{3} \right) \right] &> 0, \\ (x - \frac{1}{2})(-2x - 1) &> 0. \end{aligned}$$

**II sposób**

Przekształcamy nierówność do postaci równoważnej  $x^2 < \frac{1}{4}$ , a następnie korzystamy z własności wartości bezwzględnej, otrzymując  $|x| < \frac{1}{2}$ . Zaznaczamy na osi liczbowej te liczby  $x$ , które są oddalone od 0 o  $\frac{1}{2}$ :  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ .

**Realizacja drugiego etapu**

Zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  lub  $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  lub  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ .

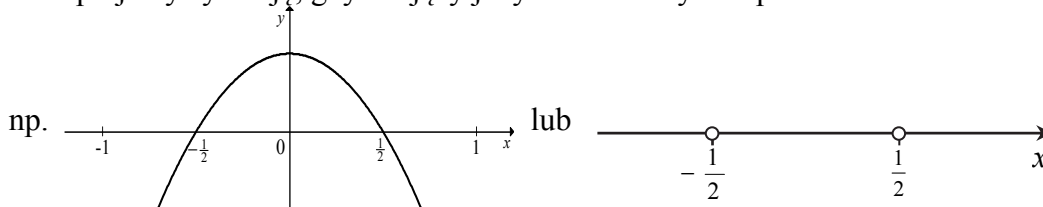
**Schemat punktowania rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania, czyli obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności.

**Uwaga**

Akceptujemy sytuację, gdy zdający jedynie zaznaczy oba pierwiastki na osi liczbowej,



albo

- realizując pierwszy etap popełni błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki, a wyznaczony wyróżnik trójmianu kwadratowego jest dodatni) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
  - popełni błędy rachunkowy przy przekształcaniu nierówności, przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionych błędów rozwiąże nierówność,
  - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.:  $x_1 + x_2 = -2$  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność,
  - błędnie zapisze nierówność, np.  $|x| > \frac{1}{2}$  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy:

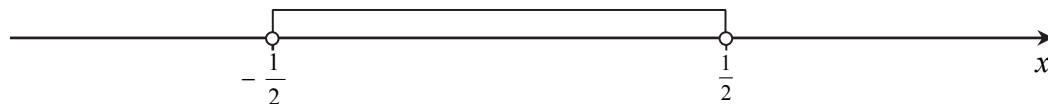
- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  lub  $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , lub  $(x > -\frac{1}{2}$  i  $x < \frac{1}{2})$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x > -\frac{1}{2}$ ,  $x < \frac{1}{2}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



**Uwaga**

Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$  i zapisze, np.  $x \in (-2, \frac{1}{2})$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 27. (0–2)**

Kąt  $\alpha$  jest ostry i spełniona jest równość  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$ . Oblicz wartość wyrażenia  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ .

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ oraz $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ (6.4).
--	---

**Przykładowe rozwiązanie**

Ponieważ obie strony równości  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$  są liczbami dodatnimi, więc po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymamy równość równoważną

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{7}{4}.$$

Stąd  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{4}$ . Z drugiej strony w zadaniu należy obliczyć wartość wyrażenia

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Otrzymujemy zatem  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ .

**Schemat punktowania I sposobu rozwiązania**

Zdający otrzymuje ..... **1 p.**  
gdy

- zapisze, że równość  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$  jest równoważna równości  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{4}$

albo

- zapisze, że  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy i zapisze, że  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$ .

**Rozwiązanie (II sposób)**

Z podanej równości  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$  wyznaczamy  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} - \cos \alpha$  i podstawiamy do tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . Otrzymujemy równanie

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2} - \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1,$$

czyli

$$\frac{7}{4} - \sqrt{7} \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1.$$

Rozwiązujemy zatem równanie kwadratowe

$$2 \cos^2 \alpha - \sqrt{7} \cos \alpha + \frac{3}{4} = 0.$$

Wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie równania jest równy

$$\Delta = 7 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = 1.$$

Stąd wynika, że równanie ma dwa rozwiązania  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$  oraz  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$ . Oba rozwiązania są liczbami dodatnimi i mniejszymi od jedności.

$$\text{Jeśli } \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4}, \text{ to } \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{7}+1}{4} = \frac{\sqrt{7}-1}{4}.$$

$$\text{Jeśli } \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}, \text{ to } \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{7}-1}{4} = \frac{\sqrt{7}+1}{4}.$$

Zatem, w pierwszej sytuacji

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}-1}{4} - \frac{\sqrt{7}+1}{4}\right)^2 = \left(\frac{-2}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

A w sytuacji drugiej

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}+1}{4} - \frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)^2 = \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

**Schemat punktowania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy

- rozwiąże równanie  $2 \cos^2 \alpha - \sqrt{7} \cos \alpha + \frac{3}{4} = 0$ :

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4} \text{ oraz } \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

albo

- rozwiąże równanie

$$2\sin^2 \alpha - \sqrt{7} \sin \alpha + \frac{3}{4} = 0 \text{ dla } \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4} \text{ oraz } \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

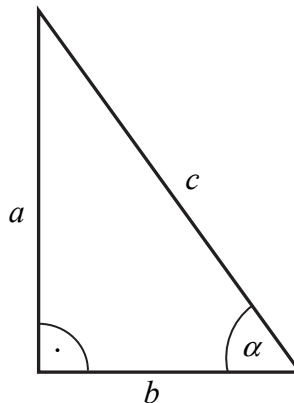
i na tym zakończy lub dalej popelni błędy.

**Zdający otrzymuje .....** **2 p.**

gdy obliczy i zapisze, że  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$ .

**Rozwiązanie (III sposób)**

Rysujemy trójkąt prostokątny, oznaczamy długości jego boków oraz miarę kąta ostrego (zobacz rysunek).



Zauważamy najpierw, że równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa  $a^2 + b^2 = c^2$  można zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1.$$

Podaną w treści zadania równość  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$  zapisujemy w postaci  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

i podnosimy obie jej strony (są to liczby dodatnie) do potęgi drugiej. Otrzymujemy równość równoważną

$$\frac{a^2}{c^2} + 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{7}{4},$$

czyli, po uwzględnieniu równości  $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ , równość

$$2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{3}{4}.$$

Z drugiej strony  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} - 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} + \frac{b^2}{c^2} = 1 - 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$ .

Zatem  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ .

**Schemat punktowania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy

- skorzysta z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym i zapisze, że równość  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{7}}{2}$  jest równoważna równości

$$2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{3}{4}$$

albo

- zapisze, że  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$

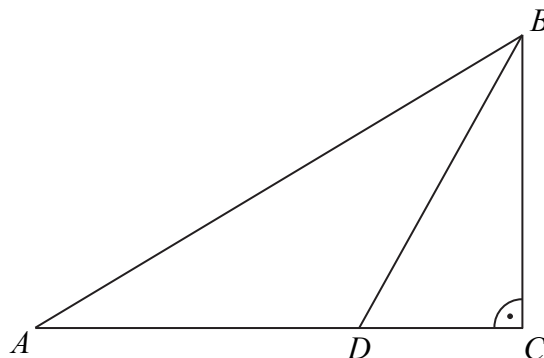
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy i zapisze, że  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{4}$ .

**Zadanie 28. (0–2)**

Dwusieczna kąta ostrego  $ABC$  przecina przyprostokątną  $AC$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  w punkcie  $D$ .

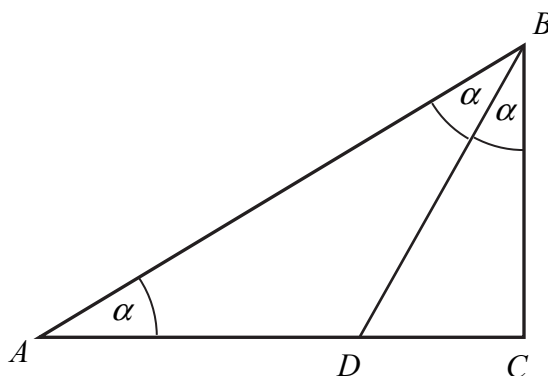


Udowodnij, że jeżeli  $|AD| = |BD|$ , to  $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$ .

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych (7.4).
--------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt  $ACB$  jest prostokątny i odcinek  $BD$  zawiera się w dwusiecznej kąta ostrego  $ABC$ . Stąd wynika, że  $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA| = \alpha$ . Z równości  $|AD| = |BD|$  wynika, że trójkąt  $ADB$  jest równoramienny, więc  $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle ADB| = \alpha$ .

Suma kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa  $90^\circ$ , zatem  $3\alpha = 90^\circ$ , a stąd  $\alpha = 30^\circ$ . Wynika stąd, że trójkąt prostokątny  $CBD$  jest połową trójkąta równobocznego, a z własności tego trójkąta wynika, że  $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$ , co należało wykazać.

**Uwaga**

Możemy też zauważyć, że  $\frac{|CD|}{|BD|} = \sin \alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ , skąd  $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$ .

**Schemat punktowania rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy wywnioskuje, że  $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DBA|$  oraz  $|\sphericalangle DBA| = |\sphericalangle DAB|$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Zadanie 29. (0–2)**

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność

$$(1,5)^{100} < 6^{25}.$$

V. Rozumowanie i argumentacja.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje podstawowe własności potęg (1.5).
--------------------------------	---

**Przykładowe rozwiązanie (I sposób)**

Nierówność powyższą zapisujemy w postaci równoważnej

$$\left( (1,5)^4 \right)^{25} < 6^{25}.$$

Wystarczy zatem pokazać, że  $(1,5)^4 < 6$ . Zauważamy, że  $(1,5)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} = 5\frac{1}{16} < 6$ .

A to kończy dowód.

**Schemat punktowania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci równoważnej  $\left( (1,5)^4 \right)^{25} < 6^{25}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne poprawne rozumowanie.

### Rozwiązanie (II sposób)

Nierówność powyższą zapisujemy w postaci równoważnej  $\left(\frac{3}{2}\right)^{100} < 6^{25}$ .

Zatem  $\frac{3^{100}}{2^{100}} < 2^{25} \cdot 3^{25}$ .

Ponieważ  $2^{100} > 0$  i  $3^{25} > 0$ , więc po pomnożeniu obu stron powyższej nierówności przez  $\frac{2^{100}}{3^{25}}$  otrzymujemy nierówność równoważną

$$3^{75} < 2^{125}.$$

Mamy zatem

$$(3^3)^{25} < (2^5)^{25}, \text{ czyli } 27^{25} < 32^{25}.$$

To kończy dowód, bo  $27 < 32$ .

### Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy przekształci nierówność  $(1,5)^{100} < 6^{25}$  do postaci równoważnej  $3^{75} < 2^{125}$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

### Uwagi

1. Jeżeli zdający wykonuje po prawej stronie nierówności przekształcenia z wykorzystaniem przybliżeń, np.

$$6^{25} \approx (2,45)^{50} \approx (1,57)^{100},$$

to może otrzymać maksymalnie **1 punkt**.

2. Zdający może próbować zapisać prawą stronę nierówności w postaci potęgi o wykładniku równym 100. Może wtedy skorzystać z równości zawierających ułamki okresowe:

$$\frac{8}{3} = \frac{3}{2} \cdot 1,(7) \quad \text{oraz} \quad 1,(7) = \frac{3}{2} \cdot 1,(185).$$

### Zadanie 30. (0–2)

Suma trzydziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ , określonego dla  $n \geq 1$ , jest równa 30. Ponadto  $a_{30} = 30$ . Oblicz różnicę tego ciągu.

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).
--------------------------------	--

### Przykładowe rozwiązanie

Zapisujemy wzór na sumę 30 początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$  z wykorzystaniem danych w zadaniu

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \text{ zatem}$$

$$30 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 30$$

$$\frac{a_1 + 30}{2} = 1$$

$$a_1 + 30 = 2$$

$$a_1 = -28$$

Ponieważ  $a_{30} = 30$  mamy

$$30 = a_1 + 29r \text{ stąd}$$

$$30 = -28 + 29r$$

$$58 = 29r$$

$$r = 2$$

Różnica ciągu  $(a_n)$  jest równa 2.

### Schemat punktowania rozwiązania

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy obliczy wyraz pierwszy ciągu  $(a_n)$ :  $a_1 = -28$ .

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy różnicę ciągu  $(a_n)$ :  $r = 2$ .

### Zadanie 31. (0–2)

Ze zbioru liczb  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby tworzą parę  $(a, b)$ , gdzie  $a$  jest wynikiem pierwszego losowania,  $b$  jest wynikiem drugiego losowania. Oblicz, ile jest wszystkich par  $(a, b)$  takich, że iloczyn  $a \cdot b$  jest liczbą parzystą.

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).
--------------------------------	--

### Przykładowe rozwiązanie (I sposób)

W zbiorze  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  jest siedem liczb parzystych i osiem nieparzystych.

Losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Z wylosowanych liczb tworzymy pary. W wyniku losowania możemy otrzymać:

- obie wylosowane liczby są parzyste; takich par jest  $7 \cdot 6 = 42$ ,
- jedna z wylosowanych liczb jest parzysta, a druga nieparzysta; takich par jest  $8 \cdot 7 + 7 \cdot 8 = 112$ ,
- obie wylosowane liczby są nieparzyste; takich par jest  $7 \cdot 8 = 56$ .

Iloczyn dwóch liczb jest liczbą parzystą, gdy co najmniej jedna z nich jest parzysta. Zatem par liczb  $(a, b)$ , wylosowanych ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ , których iloczyn jest liczbą parzystą jest  $42 + 112 = 154$ .

### Rozwiązanie (II sposób)

W zbiorze  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$  jest siedem liczb parzystych i osiem nieparzystych. Losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Z wylosowanych liczb tworzymy pary  $(a, b)$ . Szukamy tych par, których iloczyn składników jest liczbą parzystą.

Zatem:

- wybieramy te pary  $(a, b)$ , w których pierwsza z wylosowanych liczb jest parzysta, a druga nieparzysta; takich par jest  $7 \cdot 8 = 56$ ,
- wybieramy te pary  $(a, b)$ , w których jedna wylosowana liczba jest parzysta, a druga jest liczbą ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ , różną od pierwszej liczby z tej pary; takich par jest  $7 \cdot 7 \cdot 2 = 98$ .

Zatem par liczb  $(a, b)$ , wylosowanych ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ , których iloczyn jest liczbą parzystą jest  $56 + 98 = 154$ .

### Uwaga

Zbiór wszystkich utworzonych par lub tylko par odpowiadających warunkom zadania możemy też zapisać w tabeli, gdzie symbol ☺, użyty w tabeli, oznacza parę liczb, której iloczyn jest liczbą parzystą.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
2	☺		☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
3		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
4	☺	☺	☺		☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
5		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
6	☺	☺	☺	☺	☺		☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
7		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
8	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺		☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
9		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
10	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺		☺	☺	☺	☺	☺
11		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
12	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺		☺	☺	☺
13		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	
14	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺		☺
15		☺		☺		☺		☺		☺		☺		☺	

### Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .....1 p.  
gdy:

- wyznaczy liczbę par, w których obie wylosowane liczby są parzyste:  $7 \cdot 6 = 42$

albo

- zaznaczy w tabeli lub wypisze wszystkie pary utworzone z liczb parzystych i poda ich ilość: 42

albo

- wyznaczy liczbę par, w których wylosowano liczbę parzystą i nieparzystą:  
 $2 \cdot 7 \cdot 8 = 112$

albo

- zaznaczy w tabeli lub wypisze wszystkie pary, w których jedna z liczb jest liczbą parzystą, a druga nieparzystą, i poda ich ilość: 112

albo

- wyznaczy liczbę par, w których wylosowano jako pierwszą liczbę parzystą, a jako drugą nieparzystą (albo pierwszą nieparzystą, a drugą parzystą):  $7 \cdot 8 = 56$  (albo  $8 \cdot 7 = 56$ )

albo

- wyznaczy liczbę par, w których jedna wylosowana liczba jest parzysta, a druga jest liczbą ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ , różną od pierwszej liczby z tej pary; takich par jest  $7 \cdot 7 \cdot 2 = 98$ .

**Zdający otrzymuje.....2 p.**  
gdy wyznaczy liczbę par, w których iloczyn składników jest liczbą parzystą: 154.

**Uwaga**

Jeżeli zdający wypisze lub zaznaczy w tabeli wszystkie pary liczb spełniające warunki zadania, ale pominie jeden z elementów przy zliczaniu (na jakimkolwiek etapie rozwiązania) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje 1 punkt.

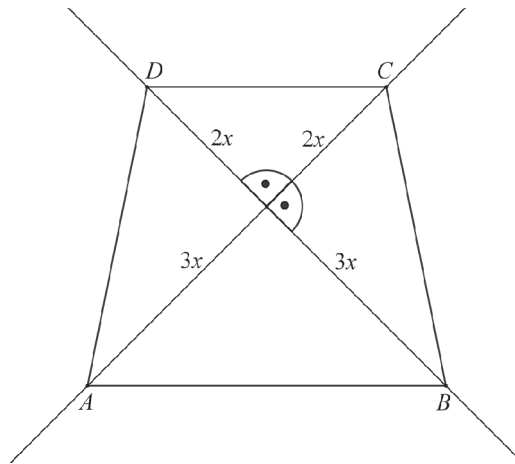
**Zadanie 32. (0–4)**

Ramię trapezu równoramiennego  $ABCD$  ma długość  $\sqrt{26}$ . Przekątne w tym trapezie są prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je w stosunku  $2 : 3$ . Oblicz pole tego trapezu.

III. Modelowanie matematyczne.	G10. Figury płaskie. Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa (G10.7). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4).
--------------------------------	---

**Przykładowe rozwiązanie (I sposób)**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Przekątne w trapezie są prostopadłe i dzielą się w stosunku  $2 : 3$ , zatem pole trapezu to suma dwóch trójkątów: o wysokości  $2x$  i podstawie  $5x$  oraz o wysokości  $3x$  i podstawie  $5x$ . Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przekątnych trapezu.

$$(2x)^2 + (3x)^2 = 26$$

$$4x^2 + 9x^2 = 26$$

$$13x^2 = 26$$

Stąd  $x^2 = 2$ . Zatem  $x = \sqrt{2}$ .

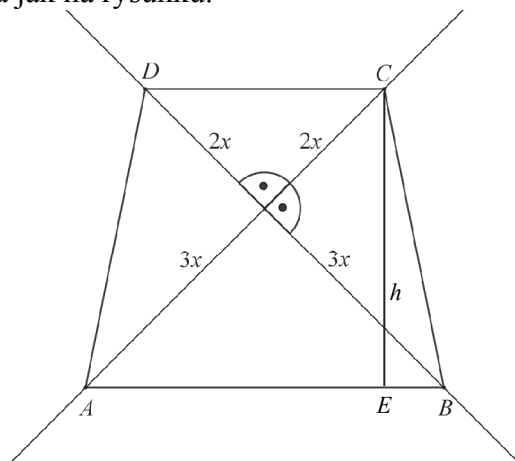
Przekątne mają długość  $5\sqrt{2}$ .

Obliczamy pole trapezu

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 25.$$

**Rozwiązanie (II sposób)**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Przekątne w trapezie są prostopadłe i dzielą się w stosunku 2 : 3 .

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przekątnych trapezu.

$$(2x)^2 + (3x)^2 = 26$$

$$4x^2 + 9x^2 = 26$$

$$13x^2 = 26$$

Stąd  $x^2 = 2$  . Zatem  $x = \sqrt{2}$  .

Przekątne mają długość  $5\sqrt{2}$  .

Wyznaczamy długości podstaw i wysokość trapezu, korzystając z twierdzenia Pitagorasa. Ponieważ

$$|AB| = \sqrt{2 \cdot (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{36} = 6, \quad |CD| = \sqrt{2 \cdot (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{ i } \quad |EB| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = 2 \quad \text{ oraz}$$

$$|BC| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{26} .$$

$$\text{Zatem } h = \sqrt{(\sqrt{26})^2 - \left(\frac{6-4}{2}\right)^2} = 5, \text{ więc pole trapezu jest równe } P = \frac{6+4}{2} \cdot 5 = 25 .$$

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający zapisze długości przekątnych (lub ich odcinków) w zależności od jednej zmiennej, np.:  $5x$  , lub odcinków  $2x$  i  $3x$  .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający obliczy  $x$  :  $x = \sqrt{2}$  .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- zapisze pole trapezu jako funkcję jednej zmiennej, np.:  $P = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 5x + \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 5x$

albo

- obliczy długość przekątnych trapezu :  $5\sqrt{2}$  ,

albo

- obliczy długości podstaw oraz wysokość trapezu:  $|AB| = 6$ ,  $|CD| = 4$ ,  $h = 5$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 p.

Zdający obliczy pole trapezu:  $P = 25$ .

**Zadanie 33. (0–4)**

Punkty  $A = (-2, -8)$  i  $B = (14, -8)$  są wierzchołkami trójkąta równoramiennego  $ABC$ , w którym  $|AB| = |AC|$ . Wysokość  $AD$  tego trójkąta jest zawarta w prostej o równaniu  $y = \frac{1}{2}x - 7$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$  tego trójkąta.

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt (8.3). Zdający oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (8.4).
-----------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązanie (I sposób)**

Niech  $C = (x, y)$ . Ponieważ prosta  $AD$  jest wysokością trójkąta  $ABC$ , więc podstawa  $BC$  jest zawarta w prostej prostopadłej do prostej  $AD$ . Prosta  $BC$  jest więc określona równaniem postaci

$$y = -2x + b.$$

Ponieważ punkt  $B$  leży na prostej  $BC$ , więc otrzymujemy równość

$$-8 = -28 + b, \text{ skąd wynika, że } b = 20.$$

Proste  $AD$  i  $BC$  przecinają się w punkcie  $D$ , więc współrzędne tego punktu są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = -2x + 20 \\ y = \frac{1}{2}x - 7 \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ równań i otrzymujemy  $D = \left(\frac{54}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ . Ponieważ punkt  $D$  jest środkiem odcinka  $BC$ , więc jego współrzędne spełniają równania

$$\frac{x+14}{2} = \frac{54}{5} \text{ i } \frac{y-8}{2} = -\frac{8}{5},$$

gdzie  $x$  i  $y$  to współrzędne punktu  $C$ . Rozwiązujemy obydwa równania i otrzymujemy odpowiedź

$$C = \left(\frac{38}{5}, \frac{24}{5}\right).$$

**Schemat punktowania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania** ..... 1 p.

Zdający wyznaczy równanie prostej, w której zawarty jest podstawa  $BC$  tego trójkąta

$$y = -2x + 20$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 p.

Zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć współrzędne punktu  $D$

$$y = -2x + 20 \text{ i } y = \frac{1}{2}x - 7$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 p.

Zdający obliczy współrzędne punktu  $D$

$$D = \left( \frac{54}{5}, -\frac{8}{5} \right)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 p.

Zdający obliczy współrzędne szukanego wierzchołka  $C$  tego trójkąta

$$C = \left( \frac{38}{5}, \frac{24}{5} \right).$$

**Uwaga**

Jeśli zdający rozpatruje trójkąt równoramienny  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$  albo zakłada, że  $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Zbudujemy układ równań: okrąg o środku w punkcie  $A$  i promieniu  $|AB|$  oraz prosta  $BC$ .

Rozwiązaniem tego układu są dwa punkty: dany punkt  $B$  oraz szukany punkt  $C$ . Ponieważ promień  $|AB|$  tego okręgu jest równy 16, więc równanie okręgu jest następujące:

$$(x+2)^2 + (y+8)^2 = 16^2.$$

Prosta  $AD$  jest wysokością trójkąta  $ABC$ , zatem podstawa  $BC$  jest zawarta w prostej prostopadłej do prostej  $AD$ . Prosta  $BC$  jest więc określona równaniem postaci

$$y = -2x + b.$$

Ponieważ punkt  $B$  leży na prostej  $BC$ , więc otrzymujemy równość

$$-8 = -28 + b, \text{ skąd wynika, że } b = 20.$$

Mamy zatem układ równań  $(x+2)^2 + (y+8)^2 = 16^2$  i  $y = -2x + 20$ .

Po podstawieniu wyrażenia  $y = -2x + 20$  do pierwszego równania w miejsce zmiennej  $y$  otrzymujemy równanie kwadratowe z jedną niewiadomą

$$(x+2)^2 + (28-2x)^2 = 16^2.$$

Wykonujemy wskazane działania i porządkujemy to równanie do postaci:

$$5x^2 - 108x + 532 = 0.$$

Wyróżnik  $\Delta$  trójmianu  $5x^2 - 108x + 532$  jest dodatni i równy 1024, zatem równanie ma dwa rozwiązania:

$$x = \frac{108+32}{10} = 14 \text{ i } x = \frac{108-32}{10} = \frac{76}{10} = \frac{38}{5}.$$

Jeśli  $x = 14$ , to  $y = -28 + 20 = -8$  i to są współrzędne danego punktu  $B$ .

Jeśli  $x = \frac{38}{5}$ , to  $y = -\frac{76}{5} + 20 = \frac{24}{5}$  i to są współrzędne szukanego punktu  $C$ . Zatem

$$C = \left( \frac{38}{5}, \frac{24}{5} \right).$$

**Schemat punktowania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający:

- wyznaczy równanie prostej, w której zawarta jest podstawa  $BC$  trójkąta  $ABC$   
$$y = -2x + 20$$

albo

- zapisze równanie  $(x+2)^2 + (y+8)^2 = 16^2$  okręgu o środku w punkcie  $A$  i promieniu  $|AB|$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 p.**

Zdający zapisze układ równań  $(x+2)^2 + (y+8)^2 = 16^2$  i  $y = -2x + 20$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 p.**

Zdający zapisze równanie kwadratowe

$$5x^2 - 108x + 532 = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne .....4 p.**

Zdający obliczy współrzędne szukanego wierzchołka  $C$  tego trójkąta

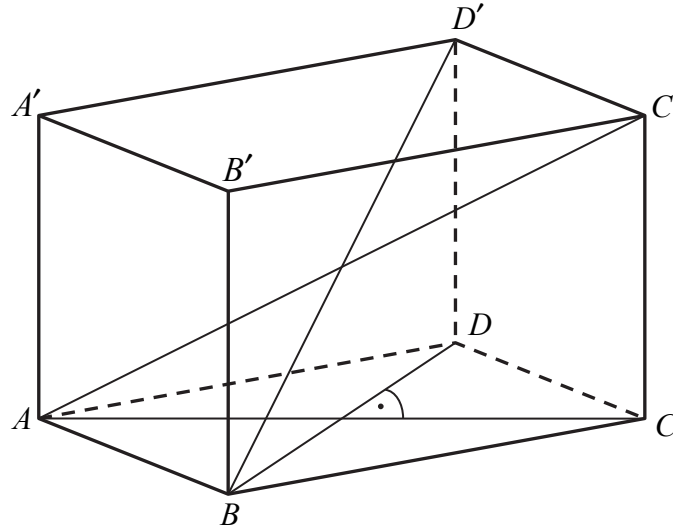
$$C = \left( \frac{38}{5}, \frac{24}{5} \right).$$

**Uwaga**

Jeśli zdający rozpatruje trójkąt równoramienny  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$  albo zakłada, że  $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 34. (0–5)**

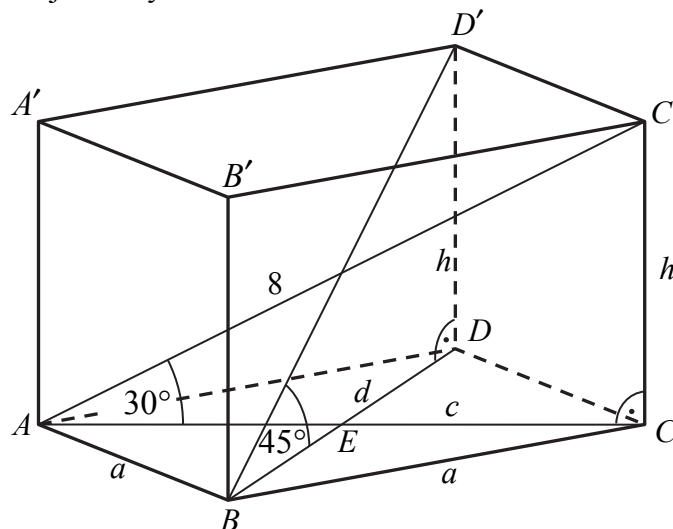
Podstawą graniastoslupa prostego  $ABCDA'B'C'D'$  jest romb  $ABCD$ . Przekątna  $AC'$  tego graniastoslupa ma długość 8 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $30^\circ$ , a przekątna  $BD'$  jest nachylona do tej płaszczyzny pod kątem  $45^\circ$ . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa.



<p>IV. Użycie i tworzenie strategii.</p>	<p>9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastoslupach i ostrososlupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami (9.2) Zdający rozpoznaje w graniastoslupach i ostrososlupach kąty między ścianami (9.4) Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6).</p>
--	--

**Przykładowe rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt prostokątny  $ACC'$  to połowa trójkąta równobocznego, więc

$$|AC| = \frac{|AC'| \sqrt{3}}{2} \text{ oraz } |CC'| = \frac{|AC'|}{2},$$

czyli

$$c = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ oraz } h = \frac{8}{2} = 4.$$

Trójkąt prostokątny  $BDD'$  to połowa kwadratu, więc  $|BD| = |DD'|$ , czyli

$$d = h = 4.$$

Przekątne rombu są prostopadłe i punkt ich przecięcia dzieli każdą z nich na połowy. Zatem trójkąt  $ABE$  jest prostokątny, a jego przyprostokątne mają długości

$$|AE| = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}, \quad |BE| = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ABE$  otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AE|^2 + |BE|^2,$$

$$a^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 16.$$

Stąd  $a = 4$ .

Pole podstawy graniastosłupa jest równe

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}cd = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}.$$

Ponieważ  $a = h = 4$ , więc ściana boczna jest kwadratem o polu 16.

Zatem pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe

$$P_c = 2P_{ABCD} + P_b = 2 \cdot 8\sqrt{3} + 4 \cdot 16 = 16\sqrt{3} + 64 = 16(\sqrt{3} + 4).$$

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..... 1 p.**

Zdający

- obliczy długość przekątnej  $AC$  podstawy graniastosłupa:  $|AC| = 4\sqrt{3}$

albo

- obliczy wysokość graniastosłupa:  $h = 4$

albo

- zapisze, że  $|BD| = |DD'|$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający obliczy długość przekątnej  $BD$  podstawy graniastosłupa:  $|BD| = 4$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający obliczy pole podstawy graniastosłupa:  $P_{ABCD} = 8\sqrt{3}$ .

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy

- długość krawędzi podstawy graniastosłupa:  $a = 4$

albo

- pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, popełniając błędy rachunkowe.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa:  $P_c = 16\sqrt{3} + 64$ .