CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA")
i
FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA")

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

SIERPIEŃ 2016

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	A	B	D	B	B	A	A	B	A	D	C	D	B	C	C	D	A	D	C	C	D	C	A	D	B

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 6x \ge (x-2)(x-8)$.

Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $2x^2 + 4x - 16$ lub $x^2 + 2x - 8$.

Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- zapisujemy nierówność w postaci $x^2 + 2x - 8 \ge 0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 + 2x - 8$
  - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
    $\Delta = 4 + 32 = 36$ i stąd $x_1 = \frac{-2+6}{2} = 2$ oraz $x_2 = \frac{-2-6}{2} = -4$

  albo
  - stosujemy wzory Viète'a:
    $x_1 \cdot x_2 = -8$ oraz $x_1 + x_2 = -2$, stąd $x_1 = 2$ oraz $x_2 = -4$

albo

- przekształcamy nierówność do postaci $(x-2)(2x+8) \ge 0$, skąd bezpośrednio odczytujemy pierwiastki: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$,

albo

- przekształcamy nierówność do postaci równoważnej $|x+1| \ge 3$, korzystając z własności wartości bezwzględnej, i odczytujemy te wartości x, dla których $|x+1| = 3$: $x = -4$, $x = 2$.

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -4\rangle \cup \langle 2, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, -4\rangle \cup \langle 2, +\infty)$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności albo

- realizując pierwszy etap rozwiązania zadania popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - o popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - o błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.: $x_1 + x_2 = 1$ i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - o błędnie zapisze nierówność z wartością bezwzględną, np. $|x-1| \geq 3$ i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -4\rangle \cup \langle 2, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, -4\rangle \cup \langle 2, +\infty)$ lub ($x \leq -4$ lub $x \geq 2$)

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \leq -4,\ x \geq 2$,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Uwagi

1. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x \leq -4$ i $x \geq 2$, $x \leq -4$ oraz $x \geq 2$ itp.
2. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez $x-2$ bez stosownego założenia, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez $x-2$, rozważając dwa przypadki $x-2>0$ oraz $x-2<0$, rozwiąże nierówność w każdym z tych przypadków, ale nie rozważy przypadku $x-2=0$, to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = 2$, $x_2 = -4$ i błędnie zapisze odpowiedź, np. $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki
Akceptujemy zapis przedziału nieuwzględniający porządku liczb na osi liczbowej, np. $(-\infty, 2\rangle \cup \langle -4, +\infty)$, $\langle -4, -\infty) \cup (+\infty, 2\rangle$.

Zadania 27. (0–2)

Jeżeli do licznika pewnego nieskracalnego ułamka dodamy 32, a mianownik pozostawimy niezmieniony, to otrzymamy liczbę 2. Jeżeli natomiast od licznika i od mianownika tego ułamka odejmiemy 6, to otrzymamy liczbę $\frac{8}{17}$. Wyznacz ten ułamek.

Rozwiązanie (I sposób)

Niech x i y oznaczają odpowiednio licznik i mianownik szukanego ułamka nieskracalnego.
Z treści zadania otrzymujemy układ równań

$$\frac{x+32}{y}=2 \text{ oraz } \frac{x-6}{y-6}=\frac{8}{17},$$

$$2y=x+32 \text{ oraz } 17(x-6)=8(y-6),$$

$$2y=x+32 \text{ oraz } 17x-102=8y-48.$$

Stąd

$$17x-54=4x+128,$$
$$13x=182,$$
$$x=14,$$

więc $2y=14+32=46$. Zatem $y=23$.

Szukany ułamek to $\frac{14}{23}$. Jest to ułamek nieskracalny.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$\frac{x+32}{y}=2 \text{ i } \frac{x-6}{y-6}=\frac{8}{17}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy wyznaczy szukany ułamek: $\frac{14}{23}$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy licznik $x=14$ i mianownik $y=23$ szukanego ułamka, ale nie zapisze tego ułamka, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie (II sposób)

Dodając do licznika i do mianownika ułamka $\frac{8}{17}$ liczbę 6, otrzymujemy ułamek $\frac{14}{23}$. Jest to ułamek nieskracalny, a gdy do jego licznika dodamy liczbę 32, to otrzymujemy $\frac{14+32}{23}=\frac{46}{23}=2$. Zatem szukany ułamek to $\frac{14}{23}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy doda do licznika i do mianownika ułamka $\frac{8}{17}$ liczbę 6, zapisze, że szukanym ułamkiem jest $\frac{14}{23}$ i nie zapisze, że $\frac{14+32}{23}=\frac{46}{23}=2$, a więc, że spełnia on drugi z warunków podanych w treści zadania.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy doda do licznika i do mianownika ułamka $\frac{8}{17}$ liczbę 6, zapisze, że szukanym ułamkiem jest $\frac{14}{23}$ oraz sprawdzi, że $\frac{14+32}{23}=\frac{46}{23}=2$.

Zadanie 28. (0–2)
Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc=1$, to

$$a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=ab+ac+bc.$$

Rozwiązanie
Zauważmy, że

$$a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}.$$

Wykorzystujemy warunek $abc=1$ i otrzymujemy zależność

$$\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{1}=bc+ac+ab,$$

co kończy dowód.

Uwaga

Tezę możemy też uzasadnić w inny sposób:

1) Korzystamy z równości $abc=1$

$$a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\cancel{a}bc}{\cancel{a}}+\frac{a\cancel{b}c}{\cancel{b}}+\frac{ab\cancel{c}}{\cancel{c}}=bc+ac+ab.$$

2) Z równości $abc=1$ otrzymujemy: $bc=\frac{1}{a}$, $ac=\frac{1}{b}$, $ab=\frac{1}{c}$. Zatem

$$bc+ac+ab=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy

- wykorzysta definicję potęgi o wykładniku -1 i zapisze lewą stronę podanej równości w postaci $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=\frac{bc+ac+ab}{abc}$ lub $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=\frac{abc}{a}+\frac{abc}{b}+\frac{abc}{c}$

albo

- wykorzysta definicję potęgi o wykładniku -1, pomnoży obie strony podanej równości przez iloczyn abc i zapisze równość w postaci równoważnej

$$\frac{1}{a}\cdot abc+\frac{1}{b}\cdot abc+\frac{1}{c}\cdot abc=ab\cdot abc+ac\cdot abc+bc\cdot abc,$$

albo

- wykorzysta założenie $abc=1$, wyznaczając stąd iloczyny: $ab=\frac{1}{c}$, $ac=\frac{1}{b}$, $bc=\frac{1}{a}$ oraz zapisze prawą stronę podanej równości w postaci $ab+ac+bc=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy poda pełne uzasadnienie.

Uwaga
Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość wzoru jedynie w wybranych przypadkach, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 29. (0–2)
Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x)=x^2-11x$. Oblicz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -6, 6\rangle$.

Rozwiązanie
Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku w punkcie, którego pierwsza współrzędna jest równa $x_w=-\frac{b}{2a}=\frac{11}{2}$. Ponieważ argument $x_w=\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}$ należy do przedziału $\langle -6, 6\rangle$, więc najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle -6, 6\rangle$ jest $f\left(\frac{11}{2}\right)=-\frac{121}{4}=-30\frac{1}{4}$.

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje .... **1 p.**
- gdy obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli $x_w=5\frac{1}{2}$, zapisze, że $x_w\in\langle -6, 6\rangle$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo
- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwszej współrzędnej wierzchołka tej paraboli i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -6, 6\rangle$.

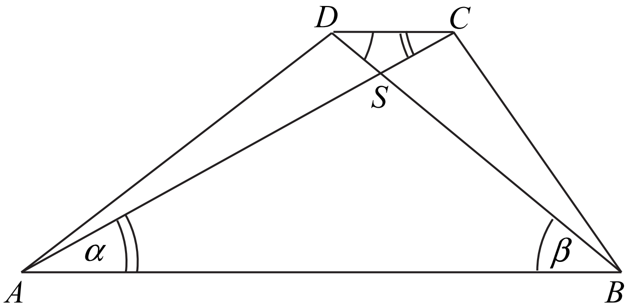
Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy obliczy i zapisze, że najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -6, 6\rangle$ jest równa

$$f\left(\frac{11}{2}\right)=-30\frac{1}{4}.$$

Uwagi
1. Jeżeli zdający zapisze jedynie trzy wartości funkcji: $f(-6)=102$, $f\left(\frac{11}{2}\right)=-30\frac{1}{4}$ i $f(6)=-30$ oraz sformułuje poprawną odpowiedź, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający zapisze tylko obliczenie jednej wartości $f\left(\frac{11}{2}\right)=-30\frac{1}{4}$ oraz sformułuje poprawną odpowiedź, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 30. (0–2)
W trapezie *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* przekątne *AC* oraz *BD* przecinają się w punkcie *S*. Wykaż, że jeżeli $|AS| = \frac{5}{6}|AC|$, to pole trójkąta *ABS* jest 25 razy większe od pola trójkąta *DCS*.

Rozwiązanie (I sposób)
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąty *ABS* i *DCS* są podobne, gdyż kąty *ASB* i *CSD* są równe, jako kąty wierzchołkowe, natomiast naprzemianległe kąty *SAB* i *SCD* są równe, bo proste *AB* i *CD* są równoległe, podobnie kąty *ABS* i *SDC* są równe.
Stąd, że $|AS| = \frac{5}{6}|AC|$, wynika równość $|CS| = \frac{1}{6}|AC|$. Skala podobieństwa trójkąta *ABS* do trójkąta *CDS* jest równa

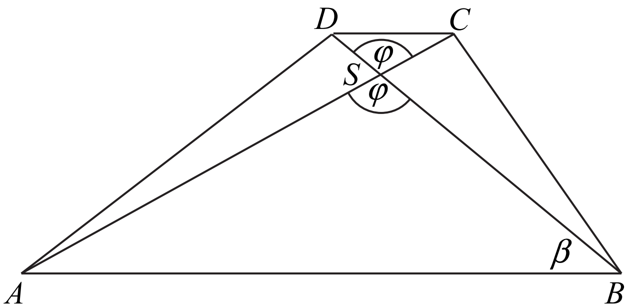
$$k = \frac{|AS|}{|CS|} = \frac{\frac{5}{6}|AC|}{\frac{1}{6}|AC|} = 5 .$$

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc

$$\frac{P_{ABS}}{P_{CDS}} = k^2, \text{ zatem } P_{ABS} = 25 \cdot P_{CDS} .$$

To należało wykazać.

Rozwiązanie (II sposób)
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Kąty *ASB* i *CSD* to kąty wierzchołkowe, więc są równe.
Ponieważ $|AS| = \frac{5}{6}|AC|$, więc $|CS| = \frac{1}{6}|AC|$.
Proste *AB* i *CD* są równoległe, więc z twierdzenia Talesa otrzymujemy proporcję

$$\frac{|AS|}{|CS|} = \frac{|BS|}{|DS|} .$$

Stąd i ze wzoru na „pole trójkąta z sinusem", otrzymujemy

$$\frac{P_{ABS}}{P_{CDS}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot|AS|\cdot|BS|\cdot\sin\varphi}{\frac{1}{2}\cdot|CS|\cdot|DS|\cdot\sin\varphi}=\frac{|AS|\cdot|BS|}{|CS|\cdot|DS|}=\left(\frac{|AS|}{|CS|}\right)^2=\left(\frac{\frac{5}{6}|AC|}{\frac{1}{6}|AC|}\right)^2=25,$$

czyli $P_{ABS}=25\cdot P_{CDS}$, co należało wykazać.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy
- zapisze, że trójkąty ABS i CDS są podobne oraz wyznaczy skalę ich podobieństwa: $k=5$

albo
- wyznaczy pola trójkątów ABS i CDS w zależności od sinusa tego samego kąta i zapisze proporcję wynikającą z twierdzenia Talesa: $P_{ABS}=\frac{1}{2}\cdot|AS|\cdot|BS|\cdot\sin\varphi$, $P_{CDS}=\frac{1}{2}\cdot|CS|\cdot|DS|\cdot\sin\varphi$, $\frac{|AS|}{|CS|}=\frac{|BS|}{|DS|}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy wykaże, że $P_{ABS}=25\cdot P_{CDS}$.

Uwaga
Jeżeli zdający przyjmie konkretne długości odcinków, np. $|AC|=6$ i $|AS|=5$, to otrzymuje **0 punktów.**

Zadanie 31. (0–4)

Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n=2016-3n$, dla $n\geq 1$. Oblicz sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie
Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy $a_1=2013$, a każdy inny wyraz tego ciągu jest o 3 mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego.
Mamy do czynienia z ciągiem arytmetycznym o różnicy $r=-3$.
Wyznaczmy liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n):

$$a_n>0,$$
$$2016-3n>0,$$
$$n<\frac{2016}{3}\text{, a stąd } n<672.$$

Zatem a_1, a_2, a_3, …, a_{671} to wszystkie dodatnie wyrazy tego ciągu. Obliczmy ich sumę:

$$S_{671}=\frac{a_1+a_{671}}{2}\cdot 671 \text{ i } a_{671}=2016-3\cdot 671=3,$$
$$S_{671}=\frac{2013+3}{2}\cdot 671=676\,368.$$

Uwaga
Możemy obliczyć sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu, korzystając ze wzoru:

$$S_{671}=\frac{2a_1+670r}{2}\cdot 671.$$

$$S_{671}=\frac{2\cdot 2013+670\cdot(-3)}{2}\cdot 671=\frac{4026-2010}{2}\cdot 671=1008\cdot 671=676\,368.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- obliczy pierwszy wyraz ciągu (a_n): $a_1 = 2013$

albo

- zapisze różnicę ciągu arytmetycznego (a_n): $r = -3$,

albo

- zapisze warunek pozwalający obliczyć liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n): np. $2016 - 3n > 0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- obliczy pierwszy wyraz i ciągu (a_n) oraz zapisze jego różnicę: $a_1 = 2013$ i $r = -3$

albo

- zapisze warunek pozwalający obliczyć liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n): np. $2016 - 3n > 0$ i zapisze różnicę ciągu arytmetycznego (a_n): $r = -3$,

albo

- zapisze warunek pozwalający obliczyć liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n): np. $2016 - 3n > 0$ i obliczy pierwszy wyraz ciągu (a_n): $a_1 = 2013$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- obliczy pierwszy wyraz ciągu (a_n) i obliczy liczbę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n): $a_1 = 2013$, $n = 671$

albo

- obliczy pierwszy wyraz ciągu (a_n): $a_1 = 2013$ oraz wyznaczy najmniejszy dodatni wyraz tego ciągu: 3,

albo

- obliczy pierwszy wyraz ciągu (a_n): $a_1 = 2013$ oraz wyznaczy numer wyrazu równego 0: $n = 672$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

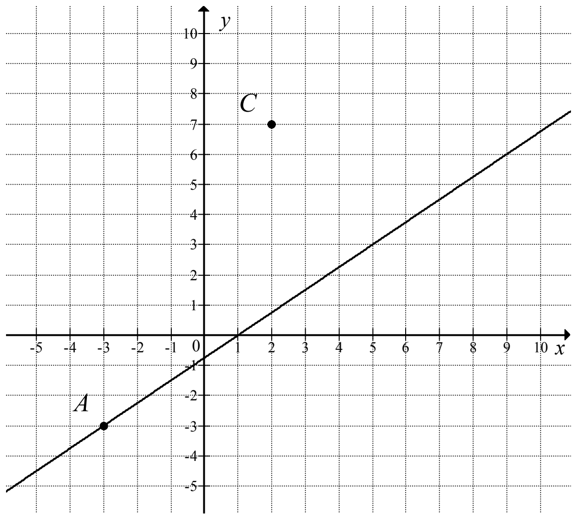
Zdający obliczy sumę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n): $S_{671} = 676\,368$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający zauważy, że wyraz $a_{672} = 0$ i obliczy sumę $S_{672} = 676\,368$, to może otrzymać maksymalną liczbę punktów, o ile nie popełni błędu w przedstawionym rozwiązaniu.
2. Jeżeli zdający obliczy pierwszy wyraz ciągu (a_n), wyznaczy najmniejszy dodatni wyraz ciągu, ale błędnie ustali jego numer i konsekwentnie obliczy sumę $\frac{2013+3}{2} \cdot 672 = 677\,376$, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 32. (0–4)

Na rysunku przedstawione są dwa wierzchołki trójkąta prostokątnego *ABC*: $A=(-3,-3)$ i $C=(2,7)$ oraz prosta o równaniu $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$, zawierająca przeciwprostokątną *AB* tego trójkąta.



Oblicz współrzędne wierzchołka *B* tego trójkąta i długość odcinka *AB*.

Rozwiązanie (I sposób)

Współrzędne punktu *B* możemy obliczyć na kilka sposobów.

Sposób a)

Współczynnik kierunkowy prostej *AC*, a więc prostej przechodzącej przez punkty $A=(-3,-3)$ i $C=(2,7)$, jest równy

$$a_{AC}=\frac{7+3}{2+3}=2.$$

Prosta *CB* jest prostopadła do prostej *AC* i przechodzi przez punkt $C=(2,7)$, więc ma równanie postaci

$$y=-\frac{1}{2}(x-2)+7,\text{ czyli } y=-\frac{1}{2}x+8.$$

Współrzędne punktu *B* obliczymy rozwiązując układ równań $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$ i $y=-\frac{1}{2}x+8$. Stąd otrzymujemy

$$\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}x+8,$$
$$3x-3=-2x+32,$$
$$5x=35$$
$$x=7 \text{ oraz } y=-\frac{1}{2}\cdot 7+8=4\frac{1}{2}.$$

Zatem $B=\left(7,4\frac{1}{2}\right)$.

Sposób b)

Wektory $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ są prostopadłe. Współrzędne wektora $\overrightarrow{CA}$ są równe

$$\overrightarrow{CA}=[-3-2,-3-7]=[-5,-10].$$

Punkt B leży na prostej AB, więc jego współrzędne możemy zapisać w postaci $B=\left(x,\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)$. Zatem współrzędne wektora $\overrightarrow{CB}$ są równe $\overrightarrow{CB}=\left[x-2,\frac{3}{4}x-\frac{31}{4}\right]$.

Z warunku prostopadłości wektorów $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ otrzymujemy

$$\overrightarrow{CA}\circ\overrightarrow{CB}=0,$$

$$[-5,-10]\circ\left[x-2,\frac{3}{4}x-\frac{31}{4}\right]=0,$$

$$-5(x-2)-10\left(\frac{3}{4}x-\frac{31}{4}\right)=0,$$

$$(x-2)+2\left(\frac{3}{4}x-\frac{31}{4}\right)=0,$$

$$\frac{5}{2}x-\frac{35}{2}=0,$$

$$5x=35,$$

$$x=7.$$

Zatem $B=\left(7,4\frac{1}{2}\right)$.

Sposób c)

Punkt B leży na prostej AB, więc jego współrzędne możemy zapisać w postaci $B=\left(x,\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy

$$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2,$$

$$\left(\sqrt{(x+3)^2+\left(\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}+3\right)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(2+3)^2+(7+3)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-2)^2+\left(\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}-7\right)^2}\right)^2,$$

$$(x+3)^2+\left(\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}\right)^2=5^2+10^2+(x-2)^2+\left(\frac{3}{4}x-\frac{31}{4}\right)^2,$$

$$x^2+6x+9+\frac{9}{16}x^2+\frac{54}{16}x+\frac{81}{16}=125+x^2-4x+4+\frac{9}{16}x^2-\frac{186}{16}x+\frac{961}{16},$$

$$x=7.$$

Zatem $B=\left(7,\frac{3}{4}\cdot 7-\frac{3}{4}\right)=\left(7,4\frac{1}{2}\right)$.

Długość odcinka AB jest równa

$$|AB|=\sqrt{(7+3)^2+\left(4\frac{1}{2}+3\right)^2}=\sqrt{100+\left(7\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{400+225}{4}}=\sqrt{\frac{625}{4}}=\frac{25}{2}=12\frac{1}{2}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej AC: $a_{AC}=2$

albo

- wyznaczy współrzędne wektora $\overrightarrow{CA}=[-5,-10]$,

albo

- wyznaczy współrzędne wektora $\overrightarrow{CB}$ w zależności od jednej zmiennej,

  np: $\overrightarrow{CB}=\left[x-2,\frac{3}{4}x-\frac{31}{4}\right]$,

albo

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa i zapisze $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$ oraz uzależni współrzędne punktu B od tej samej zmiennej: np.: $B=\left(x,\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający wyznaczy

- równanie prostej BC: $y=-\frac{1}{2}x+8$

albo

- równanie z jedną niewiadomą wynikające z warunku prostopadłości wektorów pozwalające obliczyć współrzędne punktu B: np. $[-5,-10]\circ\left[x-2,\frac{3}{4}x-\frac{31}{4}\right]=0$ (lub układ równań $[-5,-10]\circ[x-2,y-7]=0$ i $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$),

albo

- równanie z jedną niewiadomą wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC:
$\left(\sqrt{(x+3)^2+\left(\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}+3\right)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(2+3)^2+(7+3)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-2)^2+\left(\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}-7\right)^2}\right)^2$
lub układ równań z dwiema niewiadomymi
$$\begin{cases}\left(\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(2+3)^2+(7+3)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-7)^2}\right)^2\\ y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający obliczy współrzędne wierzchołka B: $B=\left(7,4\frac{1}{2}\right)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający obliczy współrzędne wierzchołka B oraz długość odcinka AB: $B=\left(7,4\frac{1}{2}\right)$, $|AB|=\frac{25}{2}=12\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie (II sposób)

Trójkąt ABC jest prostokątny, więc środek S okręgu opisanego na tym trójkącie jest środkiem przeciwprostokątnej AB. Jednocześnie leży on na symetralnej boku AC. Wyznaczamy najpierw równanie symetralnej boku AC. Jest to prosta prostopadła do prostej AC i przechodzi przez środek M odcinka AC. Ponieważ $A=(-3,-3)$ i $C=(2,7)$, więc punkt M ma współrzędne:

$$M=\left(\frac{-3+2}{2},\frac{-3+7}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2},2\right),$$

a współczynnik kierunkowy prostej AC jest równy $a_{AC}=\frac{7+3}{2+3}=2$, więc prosta AC ma równanie postaci

$$y=2(x+3)-3,\text{ czyli } y=2x+3.$$

Współczynnik kierunkowy symetralnej MS boku AC jest zatem równy $a_{MS}=-\frac{1}{2}$, a symetralna MS ma równanie postaci

$$y=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+2,$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}.$$

Współrzędne środka S okręgu opisanego trójkącie ABC obliczymy, rozwiązując układ równań

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \text{ i } y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Stąd

$$\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{4},$$
$$3x - 3 = -2x + 7,$$
$$5x = 10$$
$$x = 2 \text{ oraz } y = -\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{7}{4} = \frac{3}{4}.$$

Zatem $S = \left(2, \frac{3}{4}\right)$.

Ponieważ S jest środkiem boku AB, to

$$S = \left(\frac{-3+x_B}{2}, \frac{-3+y_B}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{4}\right).$$

Stąd

$$\frac{-3+x_B}{2} = 2 \text{ i } \frac{-3+y_B}{2} = \frac{3}{4}$$
$$-3 + x_B = 4 \text{ i } -3 + y_B = \frac{3}{2}$$
$$x_B = 7 \text{ i } y_B = 4\frac{1}{2}.$$

Zatem $B = \left(7, 4\frac{1}{2}\right)$.

Długość odcinka AB jest równa

$$|AB| = \sqrt{(7+3)^2 + \left(4\frac{1}{2}+3\right)^2} = \sqrt{100 + \left(7\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{400+225}{4}} = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający wyznaczy
- współczynnik kierunkowy prostej AC: $a_{AC} = 2$

albo
- wyznaczy współrzędne środka M odcinka AC: $M = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ i zapisze, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC to punkt przecięcia symetralnej boku AC i prostej AB.

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający wyznaczy współrzędne środka S okręgu opisanego trójkącie ABC: $S = \left(2, \frac{3}{4}\right)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający
- obliczy współrzędne wierzchołka B i nie obliczy długości boku AB: $B = \left(7, 4\frac{1}{2}\right)$

albo
- obliczy długość boku AB i nie obliczy współrzędnych wierzchołka B:

$$|AB| = 2\cdot|AS| = 2\cdot 6\frac{1}{4} = 12\frac{1}{2}$$

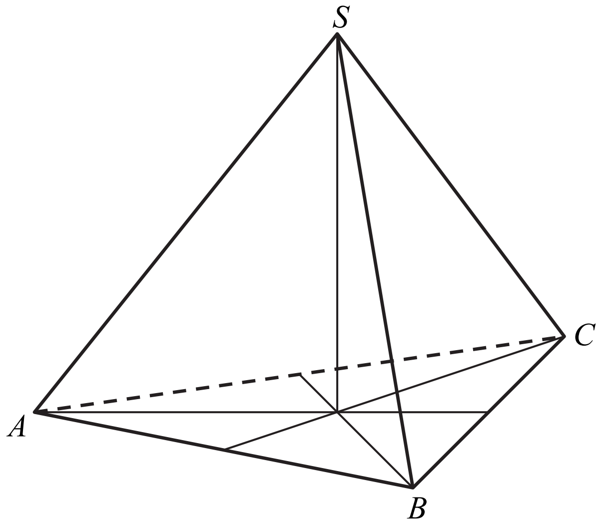
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... **4 p.**
Zdający obliczy współrzędne wierzchołka B oraz długość odcinka AB: $B=\left(7,4\frac{1}{2}\right)$, $|AB|=\frac{25}{2}=12\frac{1}{2}$.

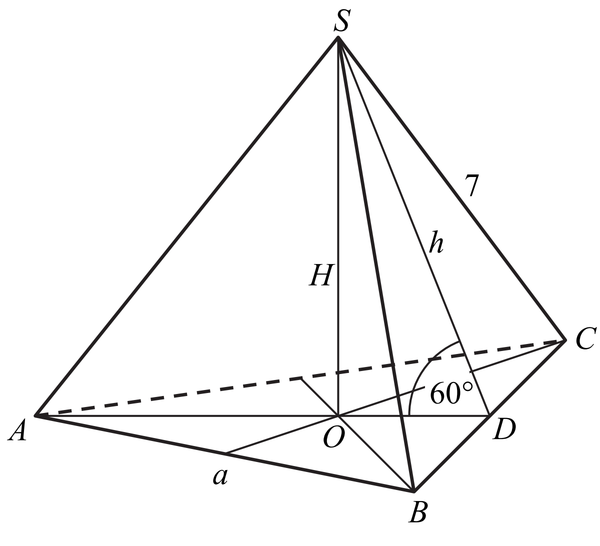
Uwaga
Jeżeli zdający błędnie zinterpretuje treść zadania, przyjmując, że wierzchołkiem kąta prostego trójkąta ABC jest B, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 33. (0–5)

Trójkąt równoboczny ABC jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$, w którym ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $60°$, a krawędź boczna ma długość 7 (zobacz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Rozwiązanie I sposób
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Podstawa ostrosłupa jest trójkątem równobocznym o boku długości a, ostrosłup jest prawidłowy, więc spodek O wysokości SO tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego i opisanego na podstawie ostrosłupa.

Zatem

$$|AO|=\frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ oraz } |OD|=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°, stąd otrzymujemy

$$\frac{H}{|OD|}=\text{tg}60^\circ,$$

$$\frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}=\sqrt{3},$$

$$H=\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\sqrt{3},$$

$$H=\frac{a}{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *AOS,* otrzymujemy

$$|AO|^2+|OS|^2=|AS|^2,$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=7^2,$$

$$\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{4}=49,$$

$$7a^2=49\cdot 12,$$

$$a^2=7\cdot 12,$$

$$a=2\sqrt{21}.$$

Zatem $H=\sqrt{21}$.

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{\left(2\sqrt{21}\right)^2\sqrt{3}}{12}\cdot\sqrt{21}=\frac{4\cdot 21\sqrt{3}}{12}\cdot\sqrt{21}=21\sqrt{7}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa

albo

- zapisze, że długość odcinka *AO*: $|AO|=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, gdzie a oznacza długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

albo

- zapisze, że długość odcinka *OD*: $|OD|=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, gdzie a oznacza długość krawędzi podstawy ostrosłupa

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 p.**

Zdający wyznaczy w zależności od jednej zmiennej, np. a – długości krawędzi podstawy

- zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa oraz długość odcinka AO: $|AO| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

albo

- zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa oraz długość odcinka OD: $|OD| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**

Zdający wyznaczy wysokość ostrosłupa w zależności od jednej zmiennej, np. a – długości krawędzi podstawy: $H = \frac{a}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... **4 p.**

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa oraz długość krawędzi podstawy ostrosłupa (lub bezpośrednio pole podstawy ostrosłupa): $H = \sqrt{21}$, $a = 2\sqrt{21}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... **5 p.**

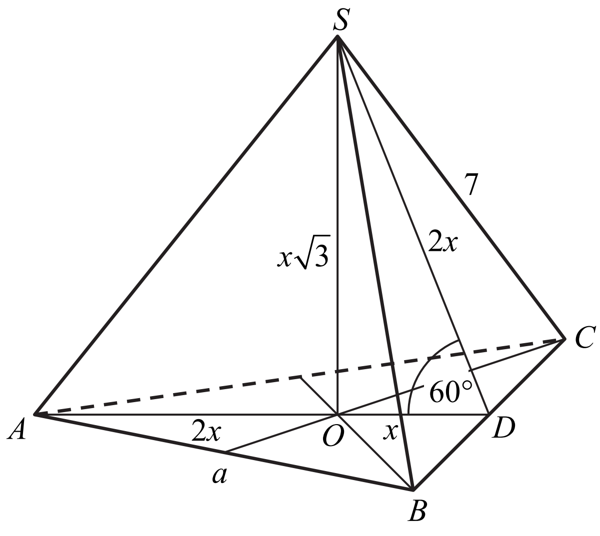
Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 21\sqrt{7}$.

Uwaga

Zdający nie musi zaznaczać kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, o ile z rozwiązania wynika, że poprawnie interpretuje ten kąt.

Rozwiązanie II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt DOS jest prostokątny, w którym jeden kąt ostry ma miarę $60°$. Wysokość SD ściany bocznej oznaczmy przez $2x$. Zatem

$$H = |SO| = x\sqrt{3} \text{ oraz } |OD| = x.$$

Podstawa ostrosłupa jest trójkątem równobocznym o boku długości a, ostrosłup jest prawidłowy, więc spodek O wysokości SO tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego i opisanego na podstawie ostrosłupa. Zatem

$$|AO| = 2x \text{ oraz } a = 2x\sqrt{3}.$$

Dla trójkąta AOS zapisujemy twierdzenie Pitagorasa i obliczamy x:

$$|AO|^2 + |OS|^2 = |AS|^2,$$

$$(2x)^2 + \left(x\sqrt{3}\right)^2 = 7^2,$$

$$4x^2 + 3x^2 = 49,$$

$$7x^2 = 49,$$

$$x = \sqrt{7}.$$

Zatem $H = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{21}$ oraz $a = 2x\sqrt{3} = 2\sqrt{21}$.

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{\left(2\sqrt{21}\right)^2 \sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{21} = \frac{4 \cdot 21\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{21} = 21\sqrt{7}.$$

Uwaga

Zdający może podać wynik w postaci $V \approx 55{,}56$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa

albo

- zapisze zależność między długościami odcinków OA i OD, np. $|OD| = x$, $|OA| = 2x$, gdzie x – pół wysokości ściany bocznej,

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający wyznaczy w zależności od jednej zmiennej, np. x – pół wysokości ściany bocznej,

- wysokość ostrosłupa SO: $|SO| = H = x\sqrt{3}$

albo

- zaznaczy kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ostrosłupa oraz zapisze zależność między długościami odcinków OA i OD, np. $|OD| = x$, $|OA| = 2x$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający wyznaczy długość a krawędzi podstawy ostrosłupa w zależności od x: $a = 2x\sqrt{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa oraz długość krawędzi podstawy ostrosłupa (lub bezpośrednio pole podstawy ostrosłupa): $H = \sqrt{21}$, $a = 2\sqrt{21}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = 21\sqrt{7}$.

Uwaga
Zdający nie musi zaznaczać kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, o ile z rozwiązania wynika, że poprawnie interpretuje ten kąt.

Zadanie 34. (0–2)

Ze zbioru siedmiu liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy dwie różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że większą z wylosowanych liczb będzie liczba 5.

Rozwiązanie (I sposób)
Niech zdarzeniami elementarnymi będą uporządkowane pary (a,b) liczb z podanego zbioru, takie że $a \neq b$. Jest to model klasyczny. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42.$$

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch liczb, z których większą jest liczba 5.
Zdarzeniu A sprzyja osiem zdarzeń elementarnych

$$A=\{(1, 5),(2, 5),(3, 5),(4, 5),(5, 1),(5, 2),(5, 3),(5, 4)\}.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}.$$

Rozwiązanie (II sposób)
Niech zdarzeniami elementarnymi będą dwuelementowe podzbiory $\{a,b\}$ liczb z podanego zbioru. Jest to model klasyczny. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = \binom{7}{2} = 21.$$

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch liczb, z których większą jest liczba 5.
Zdarzenia A sprzyjają cztery zdarzenia elementarne

$$A=\{\{1, 5\},\{2, 5\},\{3, 5\},\{4, 5\}\}.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe:

$$P(A) = \frac{4}{21}.$$

Uwaga
Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A możemy też zapisać w tabeli.

	1	2	3	4	5	6	7
1					☺		
2					☺		
3					☺		
4					☺		
5	☺	☺	☺	☺			
6							
7							

Symbol ☺ użyty w tabeli oznacza zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A.

Wówczas $|\Omega| = 7^2 - 7 = 42$ i $|A| = 8$. Zatem $P(A) = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$ (lub $|\Omega| = \binom{7}{2} = 21$)

albo

- obliczy (zaznaczy poprawnie w tabeli) liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzenia A: $|A| = 8$ (lub $|A| = 4$).

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

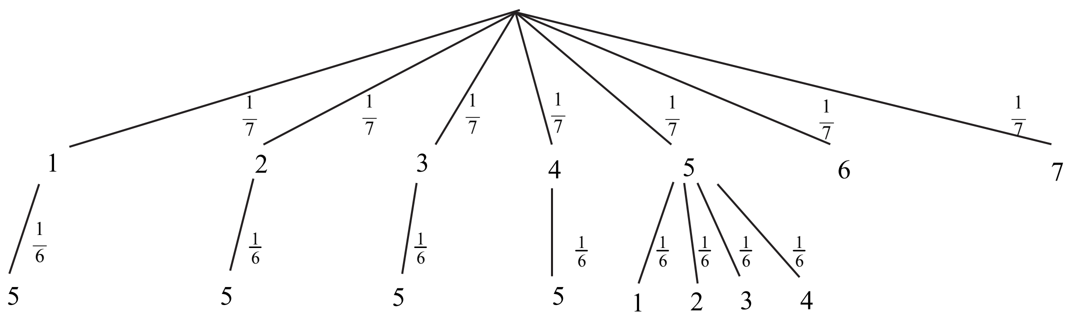
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*: $P(A) = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$ lub $P(A) < 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd przy zliczaniu w tabeli par, spełniających warunki zadania i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze **tylko** $P(A) = \frac{8}{42}$, to otrzymuje **1 punkt**.

Rozwiązanie (III sposób)

Niech *A* oznacza zdarzenie – większa z wylosowanych liczb jest równa 5. Narysujmy drzewo zawierające tylko istotne gałęzie



Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia jest równe

$$P(A) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy narysuje pełne drzewo oraz przynajmniej na jednej gałęzi zapisze poprawne prawdopodobieństwo i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy i zapisze prawdopodobieństwo zdarzenia *A*: $P(A) = \frac{4}{21}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$ lub $P(A) < 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeśli zdający dodaje prawdopodobieństwa na gałęziach drzewa, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt** (pod warunkiem, że prawdopodobieństwa na gałęziach drzewa są zapisane prawidłowo).
3. Jeżeli zdający popełni błąd:
   - przy przepisywaniu prawdopodobieństw z gałęzi drzewa

   lub
   - w zapisaniu prawdopodobieństwa na jednej gałęzi drzewa,

   lub
   - nie zaznaczy jednej istotnej gałęzi drzewa

   i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt**.