EGZAMIN WSTĘPNY CZERWIEC 2014

MATEMATYKA

Poziom podstawowy

Kryteria oceniania odpowiedzi

Klucz punktowania zadań zamkniętych

zadanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
odpowiedź	D	C	C	A	D	A	A	B	C	C	A	B	C

zadanie	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
odpowiedź	C	C	C	B	B	B	A	D	C	B	D	B

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $(2x-3)(3-x)\geq 0$.

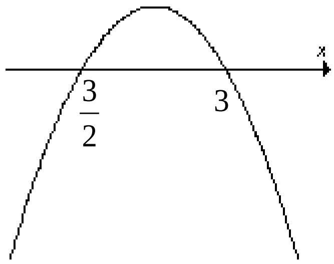
Rozwiązanie

Wyznaczamy miejsca zerowe wielomianu, występującego po lewej stronie nierówności:

$$(2x-3)=0 \text{ lub } (3-x)=0$$

$$x_1=\frac{3}{2}, x_2=3$$

Szkicujemy parabolę, opisaną przez lewą stronę nierówności.



Odczytujemy z ilustracji zbiór rozwiązań nierówności: $\frac{3}{2}\leq x\leq 3$.

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=\frac{3}{2}, x_2=3$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, np. $x_1=\frac{2}{3}, x_2=3, x\in\left\langle\frac{2}{3},3\right\rangle$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:

- $\left\langle \frac{3}{2}, 3 \right\rangle$

albo

- $\frac{3}{2} \le x \le 3$

albo

- $x \ge \frac{3}{2}, x \le 3$

albo

- w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b prawdziwa jest nierówność

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Rozwiązanie

Aby wykazać prawdziwość podanej nierówności, przekształcimy ją najpierw do prostszej postaci równoważnej. Rozpoczynamy od podanej nierówności:

$$\frac{(a+b)^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez 4:

$$(a+b)^2 \le 2\left(a^2+b^2\right).$$

Redukujemy wyrazy podobne:

$$2ab \le a^2+b^2.$$

Stąd otrzymujemy: $a^2+b^2-2ab \ge 0,$ czyli $(a-b)^2 \ge 0.$ Nierówność ta jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b, zatem prawdziwa jest też nierówność równoważna $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2}{2}$, co należało wykazać.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy przekształci podaną nierówność do postaci $2a^2+2b^2 \ge 4ab$ lub $a^2+b^2-2ab \ge 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy przedstawi kompletny dowód podanej nierówności.

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Kąt α jest ostry oraz $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

<u>**Rozwiązanie (I sposób)**</u>

Przekształcamy wyrażenie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+\sin\alpha)+\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Następnie podstawiamy $\frac{\sqrt{3}}{3}$ za $\cos\alpha$ i otrzymujemy, że $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy przekształci wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ i otrzyma w wyniku : $\frac{1}{\cos\alpha}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$: $\frac{3}{\sqrt{3}}$ lub $\sqrt{3}$.

<u>**Rozwiązanie (II sposób)**</u>

Obliczamy $\sin\alpha$, wykorzystując własności funkcji trygonometrycznych kąta ostrego:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Następnie obliczamy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}+1}{\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

<u>**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy obliczy $\sin\alpha$ wykorzystując własności funkcji trygonometrycznych kąta ostrego: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}:\frac{3}{\sqrt{3}}$ lub $\sqrt{3}$.

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Liczby $6,\ 2x+4,\ x+26$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz różnicę *r* tego ciągu.

Rozwiązanie (I sposób)

Ciąg $\left(6, 2x+4, x+26\right)$ jest arytmetyczny, więc wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich. Stąd: $2x+4=\frac{6+x+26}{2}$.

Rozwiązaniem równania jest $x=8$.

Różnica *r* ciągu $\left(6, 2x+4, x+26\right)$ jest równa: $r=2\cdot 8+4-6=14$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i zapisze równanie: $2x+4=\frac{6+x+26}{2}$ lub $2\left(2x+4\right)=32+x$, lub $2x+4-6=x+26-2x-4$ (różnica sąsiednich wyrazów ciągu jest stała).

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy różnicę *r* ciągu $\left(6, 2x+4, x+26\right)$: $r=14$.

Uwaga

Jeśli zdający pomyli własność ciągu arytmetycznego z własnością ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

Rozwiązanie (II sposób)

Ciąg $\left(6, 2x+4, x+26\right)$ jest arytmetyczny, zatem $2x+4=6+r$ oraz $x+26=6+2r$, gdzie *r* oznacza różnicę ciągu arytmetycznego.

Rozwiązując układ równań $\begin{cases} 2x+4=6+r \\ x+26=6+2r \end{cases}$ otrzymujemy: $x=8$, $r=14$.

Odp. Różnica *r* tego ciągu jest równa 14.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i zapisze układ równań: $\begin{cases} 2x+4=6+r \\ x+26=6+2r \end{cases}$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy różnicę *r* ciągu $\left(6, 2x+4, x+26\right)$: $r=14$.

Uwaga

Jeśli zdający pomyli własność ciągu arytmetycznego z własnością ciągu geometrycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Dane są dwa podzbiory zbioru liczb całkowitych:

$$K=\{-4,\ -1,\ 1,\ 5,\ 6\}\ \text{i}\ L=\{-3,\ -2,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

Rozwiązanie (I sposób) (*klasyczna definicja prawdopodobieństwa*)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane (x,y) dwóch liczb, ze zbiorów $K=\{-4,\ -1,\ 1,\ 5,\ 6\}$ i $L=\{-3,\ -2,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Niech Ω oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a A – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa: $|\Omega|=5\cdot 5=25$.

Iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni, gdy:

- obie wylosowane liczby są dodatnie

albo

- obie wylosowane liczby są ujemne.

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest więc równa

$|A|=3\cdot 3+2\cdot 2=13$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A)=\frac{13}{25}$.

Rozwiązanie (II sposób) (*metoda tabeli*)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane (x,y) dwóch liczb, ze zbiorów $K=\{-4,\ -1,\ 1,\ 5,\ 6\}$ i $L=\{-3,\ -2,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Niech Ω oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a A – zdarzenie polegające na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni.

	–4	**–1**	**1**	**5**	**6**
–3	☺	☺			
–2	☺	☺			
2			☺	☺	☺
3			☺	☺	☺
4			☺	☺	☺

Symbol ☺ w tabeli oznacza zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A

$|\Omega|=5\cdot 5=25$ i $|A|=13$, zatem $|A|=13$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=5\cdot 5=25$

albo

- obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A|=13$

Zdający otrzymuje ....2 pkt

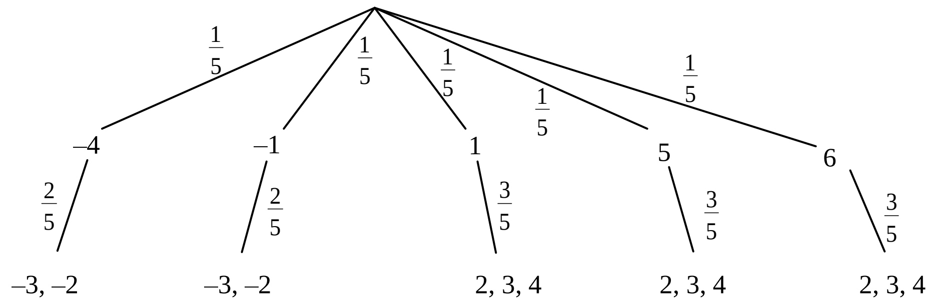
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A)=\frac{13}{25}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełnił błąd przy zliczaniu par w tabeli, spełniających warunki zadania, i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 pkt**.
2. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów.**

Rozwiązanie (III sposób) (*metoda drzewa*)

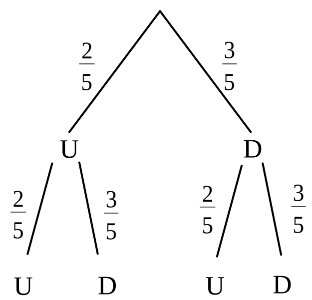
Rysujemy drzewo:



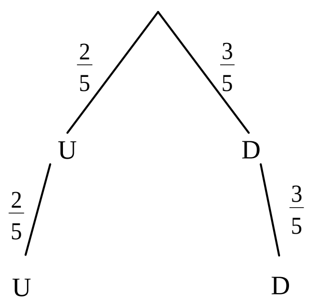
Prawdopodobieństwo zdarzenia A (iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni) jest więc równe:

$$P(A)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{13}{25}.$$

albo



albo



U – oznacza wylosowanie liczby ujemnej
D – oznacza wylosowanie liczby dodatniej

Prawdopodobieństwo zdarzenia A (iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni) jest więc równe:

$$P(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{13}{25}.$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- narysuje pełne drzewo i przynajmniej na jednej gałęzi opisze prawdopodobieństwo

albo

- narysuje drzewo tylko z istotnymi gałęziami i przynajmniej na jednej gałęzi opisze prawdopodobieństwo.

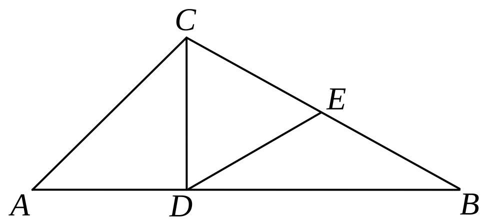
Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A)=\frac{13}{25}$.

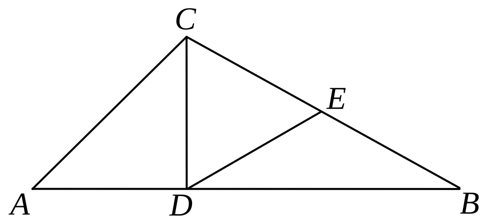
<u>Uwaga</u>
Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów.**

Zadanie 31. *(2 pkt)*

Dany jest trójkąt ABC. Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta, punkt E jest środkiem boku BC (tak jak na rysunku) i $|CD| = |DE|$. Udowodnij, że trójkąt CDE jest równoboczny.



Rozwiązanie (I sposób)



Trójkąt CDB jest prostokątny, a punkt E jest środkiem przeciwprostokątnej tego trójkąta, czyli punkt E jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDB. Stąd wynika, że $|DE| = |BE| = |CE|$. Z treści zadania wiemy, że $|CD| = |DE|$, zatem trójkąt CDE jest równoboczny. Co należało udowodnić.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

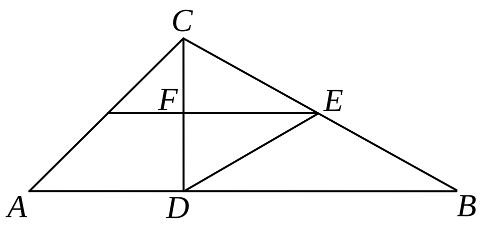
gdy stwierdzi, że punkt E jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDB i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że trójkąt CDE jest równoboczny.

Rozwiązanie (II sposób)

Rysujemy prostą równoległą do podstawy AB przechodzącą przez punkt E. Otrzymujemy trójkąt CFE, który jest podobny do trójkąta CDB w skali $k = \frac{1}{2}$.



Odcinek *EF* jest wysokością trójkąta *CDE*, która dzieli podstawę *CD* na dwie równe części. Stąd trójkąt *CDE* jest równoramienny i $|DE|=|CE|$. Z treści zadania wiemy, że $|CD|=|DE|$, zatem trójkąt *CDE* jest równoboczny, co należało udowodnić.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

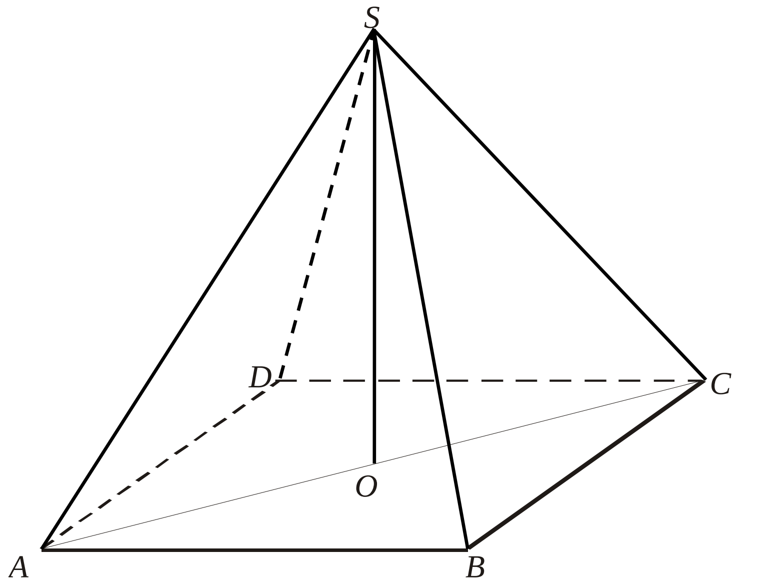
gdy narysuje prostą równoległą do podstawy *AB* i zauważy, że trójkąty *CFE* i *CDB* są podobne w skali $k=\frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

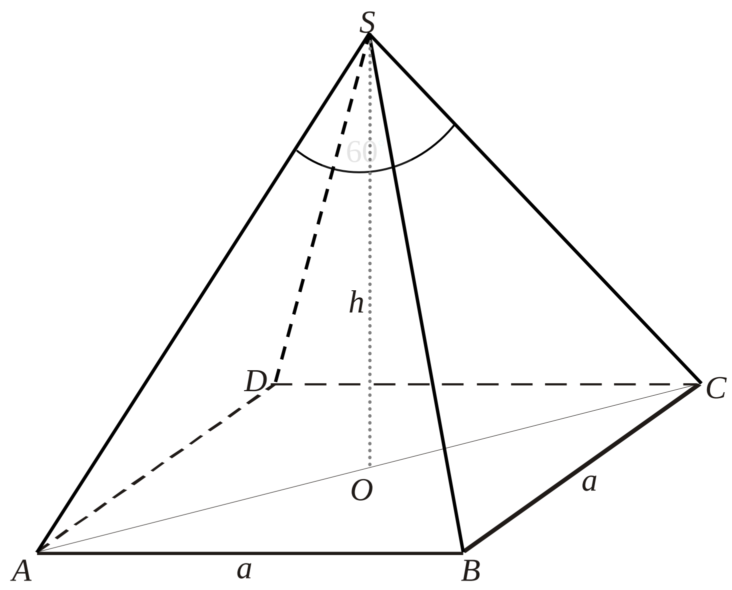
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że trójkąt *CDE* jest równoboczny.

Zadanie 32. *(4 pkt)*

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDS* (zobacz rysunek) przekątna *AC* podstawy ma długość $4\sqrt{2}$. Kąt *ASC* między przeciwległymi krawędziami bocznymi ostrosłupa jest równy 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



<u>Rozwiązanie</u>



Niech a oznacza krawędź podstawy ostrosłupa, wtedy $a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. Stąd $a = 4$.
Obliczamy pole P podstawy ostrosłupa: $P = a^2 = 16$.
W trójkącie *AOS* kąt *ASO* jest równy 30°, a $|AO| = \frac{1}{2}|AC| = 2\sqrt{2}$.

Obliczamy wysokość *SO* ostrosłupa: $\mathrm{tg}30^\circ = \frac{|AO|}{|SO|} = \frac{2\sqrt{2}}{|SO|}$, czyli $|SO| = \frac{2\sqrt{2}\cdot 3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$.

Uwaga

Zdający może zauważyć, że trójkąt ACS jest równoboczny i jego bok ma długość $4\sqrt{2}$, więc zastosowanie wzoru na wysokość w trójkącie równobocznym pozwala obliczyć wysokość ostrosłupa: $|SO| = \frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$.

Obliczamy objętość V ostrosłupa: $V = \frac{1}{3}\cdot 16\cdot 2\sqrt{6} = \frac{32\sqrt{6}}{3}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Obliczenie długości krawędzi podstawy $|AB| = a = 4$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie pola P podstawy: $P = 16$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa $|SO| = 2\sqrt{6}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie objętości V ostrosłupa: $V = \frac{32\sqrt{6}}{3}$.

Zadanie 33. *(5 pkt)*

Trasę etapu wyścigu kolarskiego o długości 150 km pan Nowak pokonał w czasie o 1 godzinę i 50 minut krótszym niż jego kolega z drużyny, pan Kowalski. Średnia wartość prędkości, z jaką pan Nowak jechał na tym etapie, była o 11 km/h większa od średniej wartości prędkości pana Kowalskiego na tej trasie. Oblicz średnie wartości prędkości, z jakimi przejechali całą trasę obaj zawodnicy.

Uwaga
W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych v, t oznaczających, odpowiednio, prędkość i czas dla pana Nowaka. Oczywiście w pracach maturalnych te niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, by te niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

<u>Rozwiązanie I sposób</u>
Przyjmujemy oznaczenia v i t – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pana Nowaka.
Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pana Nowaka: $v \cdot t = 150$.
Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pana Kowalskiego: $v - 11$, $t + 1\frac{5}{6}$.

Zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases} v \cdot t = 150 \\ (v-11)\cdot\left(t + 1\frac{5}{6}\right) = 150 \end{cases}$.

Z pierwszego równania wyznaczamy

<table>
<tr><td>$t = \frac{150}{v}$</td><td>$v = \frac{150}{t}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy</td></tr>
<tr><td>$(v-11)\cdot\left(\frac{150}{v} + 1\frac{5}{6}\right) = 150$
Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $v^2 - 11v - 900 = 0$.
$\Delta = 121 + 3600 = 61^2$
$v_1 = \frac{11-61}{2} = -25$, sprzeczne z zał. $v > 0$
$v_2 = \frac{11+61}{2} = 36\,(\text{km/h})$
obliczamy prędkość drugiego rowerzysty
$v - 11 = 25\,(\text{km/h})$</td><td>$\left(\frac{150}{t} - 11\right)\cdot\left(t + 1\frac{5}{6}\right) = 150$
Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $66t^2 + 121t - 1650 = 0$.
$\Delta = 14641 + 435600 = 671^2$
$t_1 = \frac{-121-671}{132} = -6$, sprzeczne z zał. $t > 0$
$t_2 = \frac{-121+671}{132} = 4\frac{1}{6}$ (h)
obliczamy prędkość pana Nowaka
$v = \frac{150}{4\frac{1}{6}} = 36$ (km/h)
obliczamy prędkość drugiego rowerzysty
$v - 11 = 25\,(\text{km/h})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Odp.: Prędkości rowerzystów są równe: 36 km/h i 25 km/h.</td></tr>
</table>

Rozwiązanie II sposób

Przyjmujemy oznaczenia v i t – odpowiednio prędkość w km/h i czas w godzinach dla pana Kowalskiego.

Zapisujemy zależność między drogą, prędkością i czasem dla pana Kowalskiego: $v \cdot t = 150$.

Zapisujemy prędkość i czas jazdy dla pana Nowaka: $v+11$, $t-1\frac{5}{6}$.

Zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases} (v+11)\cdot\left(t-1\frac{5}{6}\right)=150 \\ v\cdot t=150 \end{cases}$

Z drugiego równania wyznaczamy

$t=\frac{150}{v}$	$v=\frac{150}{t}$
podstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy	
$(v+11)\cdot\left(\frac{150}{v}-1\frac{5}{6}\right)=150$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $v^2+11v-900=0$. $\Delta=121+3600=61^2$ $v_1=\frac{-11-61}{2}=-36$, sprzeczne z zał. $v>0$ $v_2=\frac{-11+61}{2}=25\,(\text{km/h})$ obliczamy prędkość pana Nowaka $v+11=36\,(\text{km/h})$	$\left(\frac{150}{t}+11\right)\cdot\left(t-1\frac{5}{6}\right)=150$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $66t^2-121t-1650=0$. $\Delta=49+3920=63^2$ $t_1=\frac{121-671}{132}=-4\frac{1}{6}$, sprzeczne z zał. $t>0$ $t_2=\frac{121+671}{132}=6\text{ (h)}$ obliczamy prędkość pana Kowalskiego $v=\frac{150}{6}=25\text{ (km/h)}$ obliczamy prędkość pana Nowaka $v+11=36\text{ (km/h)}$
Odp.: Prędkości rowerzystów są równe: 36 km/h i 25 km/h.	

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

- Zapisanie zależności między drogą, prędkością i czasem dla jednego z rowerzystów oraz prędkości i czasu dla obu rowerzystów przy użyciu tych samych oznaczeń,

  np.: dla pana Nowaka $v\cdot t=150$, czas pana Kowalskiego $t+1\frac{5}{6}$, prędkość pana Kowalskiego $v-11$.

  lub: dla pana Kowalskiego $v\cdot t=150$, czas pana Nowaka $t-1\frac{5}{6}$, prędkość pana Nowaka $v+11$.

Uwaga

Nie wymagamy opisania oznaczeń literowych, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 p.**

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t – odpowiednio z prędkością i czasem dla pana Nowaka: $\begin{cases} v\cdot t=150 \\ (v-11)\cdot\left(t+1\frac{5}{6}\right)=150 \end{cases}$.

albo

- Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t – odpowiednio z prędkością i czasem dla pana Kowalskiego: $\begin{cases} (v+11)\cdot\left(t-1\frac{5}{6}\right)=150 \\ v\cdot t=150 \end{cases}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 p.**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np:

$(v-11)\cdot\left(\frac{150}{v}+1\frac{5}{6}\right)=150$ lub $\left(\frac{150}{t}-11\right)\cdot\left(t+1\frac{5}{6}\right)=150$ lub $(v+11)\cdot\left(\frac{150}{v}-1\frac{5}{6}\right)=150$

lub $\left(\frac{150}{t}+11\right)\cdot\left(t-1\frac{5}{6}\right)=150$.

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **4 p.**

- rozwiązanie równania z niewiadomą v z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości drugiego rowerzysty

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą t bezbłędnie i nieobliczenie prędkości rowerzystów

albo

- obliczenie t z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości obu rowerzystów.

Rozwiązanie pełne .... **5 p.**

Obliczenie prędkości obu rowerzystów: 36 km/h i 25 km/h.

Uwagi

1. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) prędkość tylko jednego z rowerzystów: 36 km/h lub 25 km/h, to otrzymuje **0 pkt.**
2. Jeżeli zdający podaje (bez obliczeń) prędkości obu rowerzystów: 36 km/h i 25 km/h, to otrzymuje **1 pkt**.

3. Zdający może pominąć jednostki, o ile ustalił je w toku rozumowania i stosuje je konsekwentnie.

Zadanie 34. *(4 pkt)*

Podstawą trójkąta równoramiennego *ABC* jest bok *AB*, gdzie $A=(2,1)$ i $B=(5,2)$. Ramię tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x-y-3=0$. Oblicz współrzędne wierzchołka *C*.

<u>Rozwiązanie</u>

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej *AB*: $\frac{2-1}{5-2}=\frac{1}{3}$. Zatem współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej *AB* jest równy (-3). Symetralna odcinka *AB* ma równanie $y=-3x+b$. Punkt $S=\left(\frac{5+2}{2},\frac{2+1}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$ jest środkiem odcinka AB. Symetralna tego odcinka przechodzi przez punkt *S*, więc $\frac{3}{2}=-3\cdot\frac{7}{2}+b$, stąd $b=12$. Zatem symetralna odcinka *AB* ma równanie $y=-3x+12$

Obliczamy współrzędne wierzchołka *C* rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ y=-3x+12 \end{cases}$$

Zatem współrzędne punktu *C* są równe: $C=(3,3)$.

<u>Schemat oceniania rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

- poprawne wyznaczenie lub podanie współrzędnych środka boku *AB*: $S=\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$

albo

- poprawne wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej *AB*: $a=\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Wyznaczenie równania symetralnej boku *AB*: $y=-3x+12$.

Uwaga

Zdający może wyznaczyć równanie symetralnej stosując jej własność: $|AC|=|BC|$, gdzie $C=(x,y)$ jest dowolnym punktem tej symetralnej. Wówczas otrzymuje:

$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}$ stąd $3x+y-12=0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie układu równań $\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ y=-3x+12 \end{cases}$ i poprawne obliczenie jednej ze współrzędnych punktu *C*.

Rozwiązanie prawie pełne……………………………………………………………… 3 pkt

- popełnienie błędów przy wyznaczaniu współrzędnych środka boku albo współczynnika kierunkowego prostej *AB* i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczenie współrzędnych punktu *C*.

albo

- poprawne wyznaczenie równania symetralnej boku *AB* i popełnienie błędów przy wyznaczeniu współrzędnych punktu *C*.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Poprawne obliczenie współrzędnych punktu *C*: $C=(3,3)$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Obliczamy współrzędne wektora *AB* który jest prostopadły do symetralnej odcinka *AB*: $\vec{AB}=[3,1]$. Zatem symetralna odcinka *AB* ma równanie $3x+y-b=0$. Obliczamy współrzędne punktu *S*, który jest środkiem odcinka *AB*: $S=\left(\frac{5+2}{2},\frac{2+1}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$. Symetralna tego odcinka przechodzi przez punkt *S*, więc $3\cdot\frac{7}{2}+\frac{3}{2}-b=0$, stąd $b=12$. Zatem symetralna odcinka *AB* ma równanie $3x+y-12=0$.

Obliczamy współrzędne wierzchołka *C* rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases}2x-y-3=0\\3x+y-12=0\end{cases}$$

Zatem współrzędne punktu *C* są równe: $C=(3,3)$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..1 pkt

- poprawne wyznaczenie lub podanie współrzędnych środka boku *AB*: $S=\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$

albo

- poprawne obliczenie współrzędnych wektora *AB*: $\vec{AB}=[3,1]$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Wyznaczenie równania symetralnej boku *AB*: $y=-3x+12$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt

Zapisanie układu równań $\begin{cases}2x-y-3=0\\3x+y-12=0\end{cases}$ i poprawne obliczenie jednej ze współrzędnych punktu *C*.

Rozwiązanie prawie pełne……………………………………………………………… 3 pkt

- popełnienie błędów przy wyznaczaniu współrzędnych środka boku albo współrzędnych wektora *AB* i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczenie współrzędnych punktu *C*.

albo

- poprawne wyznaczenie równania symetralnej boku *AB* i popełnienie błędów przy wyznaczeniu współrzędnych punktu *C*.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Poprawne obliczenie współrzędnych punktu *C*: $C=(3,3)$.