

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych  
oraz  
schemat oceniania

sierpień 2013

Poziom Podstawowy

**Klucz punktowania zadań zamkniętych**

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	D	A	B	D	C	B	B	C	C	B	A	C	D	D	C	B	C	A	D	D	C	B	D	B	B

**Zadanie 26. (2 pkt)**Rozwiąż nierówność  $3x - x^2 \geq 0$ .**Rozwiązanie**

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

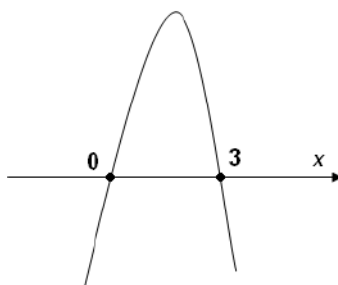
**Pierwszy etap rozwiązania:**Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $-x^2 + 3x$ :

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie  
 $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 0$  lub  $-x(x-3)$

albo

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 9 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 9. \text{ Stąd } x_1 = \frac{-3-3}{-2} = 3 \text{ oraz } x_2 = \frac{-3+3}{-2} = 0.$$

**Drugi etap rozwiązania:**Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $0 \leq x \leq 3$  lub  $\langle 0, 3 \rangle$  lub  $x \in \langle 0, 3 \rangle$  np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji  $f(x) = -x^2 + 3x$ .**Schemat oceniania****Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np.  $-x(x-3)$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 0$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji  $f(x) = -x^2 + 3x$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy:

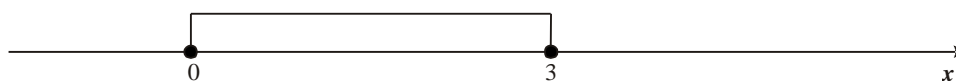
- poda zbiór rozwiązań nierówności :  $\langle 0, 3 \rangle$  lub  $x \in \langle 0, 3 \rangle$  lub  $x \geq 0$  i  $x \leq 3$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x \geq 0$ ,  $x \leq 3$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



### Kryteria

#### oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$  i zapisze, np.  $x \in \langle 0, -3 \rangle$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $x \in \langle 3, 0 \rangle$ , to otrzymuje **2 punkty**.

### **Zadanie 27. (2 pkt)**

Rozwiąż równanie  $x^3 - 6x^2 - 12x + 72 = 0$ .

#### I sposób rozwiązania (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów:

$$x(x^2 - 12) - 6(x^2 - 12) = 0 \quad \text{lub} \quad x^2(x - 6) - 12(x - 6) = 0$$

$$(x - 6)(x^2 - 12) = 0.$$

Stąd  $x = 6$  lub  $x = -2\sqrt{3}$  lub  $x = 2\sqrt{3}$ .

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu, np.  $(x - 6)(x^2 - 12)$ ,

$(x - 6)(x - \sqrt{12})(x + \sqrt{12})$ , przy czym postać ta musi być otrzymana w sposób poprawny,

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x = 6$  lub  $x = -2\sqrt{3}$  lub  $x = 2\sqrt{3}$ .

**II sposób rozwiązania** (metoda dzielenia)

Stwierdzamy, że liczba 6 jest pierwiastkiem wielomianu  $x^3 - 6x^2 - 12x + 72$ . Dzielimy wielomian  $x^3 - 6x^2 - 12x + 72$  przez dwumian  $(x - 6)$ . Otrzymujemy iloraz  $(x^2 - 12)$ .

Zapisujemy równanie w postaci  $(x - 6)(x^2 - 12) = 0$ . Stąd  $(x - 6)(x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3}) = 0$

zatem  $x = 6$  lub  $x = -\sqrt{12}$  lub  $x = \sqrt{12}$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy podzieli wielomian  $x^3 - 6x^2 - 12x + 72$  przez dwumian  $(x - 6)$ , otrzyma iloraz  $(x^2 - 12)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x = 6$  lub  $x = -\sqrt{12}$  lub  $x = \sqrt{12}$

**Zadanie 28. (2 pkt)**

Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ . Oblicz  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ .

**I sposób rozwiązania**

Dzieląc licznik i mianownik ułamka  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$  przez  $\cos \alpha$  i wykorzystując zależność

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ otrzymujemy } \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

**II sposób rozwiązania**

Wykorzystując zależność  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  zapisujemy  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$ .

Przekształcamy  $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ , podstawiamy do wyrażenia  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$  i wyznaczamy jego wartość:

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha - \cos \alpha}{2 \cos \alpha + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{3 \cos \alpha} = \frac{1}{3}.$$

### III sposób rozwiązania

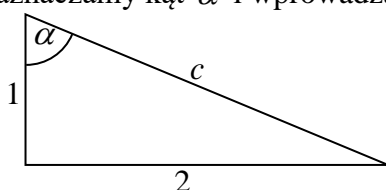
Wykorzystując zależność  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  zapisujemy  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$ .

Przekształcamy  $\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{2}$ , podstawiamy do wyrażenia  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$  i wyznaczamy jego wartość:

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha - \frac{\sin \alpha}{2}}{\sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{2}} = \frac{\frac{2 \sin \alpha - \sin \alpha}{2}}{\frac{2 \sin \alpha + \sin \alpha}{2}} = \frac{2 \sin \alpha - \sin \alpha}{2} \cdot \frac{2}{2 \sin \alpha + \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{3 \sin \alpha} = \frac{1}{3}.$$

### IV sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny, zaznaczamy kąt  $\alpha$  i wprowadzamy oznaczenia.



Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, zapisujemy

$$\sin \alpha = \frac{2}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{c}.$$

Podstawiając  $\sin \alpha$  i  $\cos \alpha$ , wyznaczamy wartość wyrażenia  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ :

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{2}{c} - \frac{1}{c}}{\frac{2}{c} + \frac{1}{c}} = \frac{\frac{2-1}{c}}{\frac{2+1}{c}} = \frac{1}{3}.$$

### Schemat oceniania I, II, III i IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .....1 pkt

gdy

- podzieli licznik i mianownik ułamka  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$  przez  $\cos \alpha$ , zapisze ten ułamek w postaci  $\frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1}$  i na tym poprzestanie lub dalej popęlnia błędy

albo

- zapisze zależność  $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ , doprowadzi ułamek do postaci  $\frac{2 \cos \alpha - \cos \alpha}{2 \cos \alpha + \cos \alpha}$  i na tym poprzestanie lub dalej popęlnia błędy

albo

- zapisze zależność  $\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{2}$ , doprowadzi ułamek do postaci  $\frac{\sin \alpha - \frac{\sin \alpha}{2}}{\sin \alpha + \frac{\sin \alpha}{2}}$  i na tym poprzestanie lub dalej popęlnia błędy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (nawet z błędem rachunkowym) oraz zapisze  $\sin \alpha = \frac{2}{c}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (nawet z błędem rachunkowym) oraz zapisze  $\cos \alpha = \frac{1}{c}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 i 2, obliczy długość przeciwprostokątnej, zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt  $\alpha$  i obliczy sinus lub cosinus tego kąta, i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**gdy poprawnie wyznaczy wartość wyrażenia  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} : \frac{1}{3}$ .**Uwagi**

1. Jeśli zdający przyjmie, że  $\sin \alpha = 2$  i  $\cos \alpha = 1$ , to otrzymuje **0 punktów**.
2. Wszystkie rozwiązania, w których zdający błędnie zaznaczy kąt  $\alpha$  na przedstawionym przez siebie rysunku i z tego korzysta oceniamy na **0 punktów**.
3. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ :  $\alpha = 63^\circ$  oraz zapisze  $\sin 63^\circ = 0,8910$  lub  $\cos 63^\circ = 0,4540$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ :  $\alpha = 63^\circ$  oraz zapisze  $\sin 63^\circ = 0,8910$  lub  $\cos 63^\circ = 0,4540$  i obliczy wartość wyrażenia  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \approx 0,3249$ , to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeśli zdający odczyta z tablic wartość kąta, dla którego  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ :  $\alpha = 64^\circ$  oraz zapisze  $\sin 64^\circ = 0,8988$  lub  $\cos 64^\circ = 0,4384$  i obliczy wartość wyrażenia  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \approx 0,3443$ , to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 29. (2 pkt)**

W tabeli zestawiono oceny z matematyki uczniów klasy 3A na koniec semestru.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	0	4	9	13	$x$	1

Średnia arytmetyczna tych ocen jest równa 3,6. Oblicz liczbę  $x$  ocen bardzo dobrych (5) z matematyki wystawionych na koniec semestru w tej klasie.

**Rozwiązanie:**

Obliczamy średnią arytmetyczną ocen zestawionych w tabeli

$$\frac{0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 13 \cdot 4 + x \cdot 5 + 1 \cdot 6}{0 + 4 + 9 + 13 + x + 1}.$$

Ponieważ ta średnia arytmetyczna jest równa 3,6. Zatem otrzymujemy równanie

$$\frac{0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 13 \cdot 4 + x \cdot 5 + 1 \cdot 6}{0 + 4 + 9 + 13 + x + 1} = 3,6.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{5x+93}{x+27} &= \frac{18}{5} \\ 5(5x+93) &= 18(x+27), \\ 25x+465 &= 18x+486, \\ 7x &= 21, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**  
gdy:

- zapisze równanie pozwalające obliczyć liczbę ocen bardzo dobrych i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd, np.:

$$\frac{0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 13 \cdot 4 + x \cdot 5 + 1 \cdot 6}{0 + 4 + 9 + 13 + x + 1} = 3,6 \quad \text{lub} \quad \frac{4 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 13 \cdot 4 + x \cdot 5 + 1 \cdot 6}{0 + 4 + 9 + 13 + x + 1} = 3,6$$

albo

- zapisze równanie pozwalające obliczyć liczbę ocen bardzo dobrych, ale popełni błąd przy przepisywaniu danych.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**  
gdy obliczy liczbę ocen bardzo dobrych: 3.

**Uwaga**

Jeśli zdający odgadnie, że liczba ocen bardzo dobrych jest równa 3, i sprawdzi to, wykonując odpowiednie obliczenia, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 30. (2 pkt)**

Uzasadnij, że jeżeli  $a$  jest liczbą rzeczywistą różna od zera i  $a + \frac{1}{a} = 3$  to  $a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$ .

**I sposób rozwiązania**

Równość  $a + \frac{1}{a} = 3$  podnosimy obustronnie do kwadratu i przekształcamy równoważnie

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 9,$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 9 - 2.$$

$$\text{Stąd } a^2 + \frac{1}{a^2} = 7.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy podniesie równość obustronnie do kwadratu:  $a + \frac{1}{a} = 3$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy wartość wyrażenia  $a^2 + \frac{1}{a^2} : 7$ .

**II sposób rozwiązania**

Wyrażenie  $a^2 + \frac{1}{a^2}$  zapisujemy w postaci  $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a}$ .

Zatem  $a^2 + \frac{1}{a^2} = 9 - 2 = 7$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje .....1 pkt**

gdy zapisze zależność między sumą  $a^2 + \frac{1}{a^2}$ , a kwadratem sumy  $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 pkt**

gdy obliczy wartość wyrażenia  $a^2 + \frac{1}{a^2} : 7$ .

**Zadanie 31. (2 pkt)**

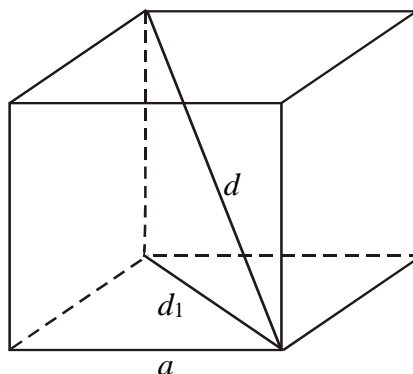
Długość krawędzi sześcianu jest o 2 krótsza od długości jego przekątnej. Oblicz długość przekątnej tego sześcianu.

**I sposób rozwiązania**

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia:

$a$  – długość krawędzi sześcianu,

$d_1$  – długość przekątnej podstawy sześcianu,



$d$  – długość przekątnej sześcianu.

Stosując twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy:  $a^2 + a^2 = d_1^2$  oraz  $a^2 + d_1^2 = d^2$ .

Stąd  $d = a\sqrt{3}$  lub  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}d$ .

Ponieważ  $d = a + 2$  rozwiązujemy równanie:

- $d = \frac{\sqrt{3}}{3}d + 2$  i otrzymujemy  $d = \frac{6}{3-\sqrt{3}}$  lub  $d = 3 + \sqrt{3}$

albo

- $a\sqrt{3} = a + 2$  i otrzymujemy  $a = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$  lub  $a = 1 + \sqrt{3}$ .

Wyznaczamy długość przekątnej sześcianu:  $d = 3 + \sqrt{3}$ .

### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze równanie pozwalające obliczyć długość przekątnej  $d = \frac{\sqrt{3}}{3}d + 2$  lub  $a\sqrt{3} = a + 2$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

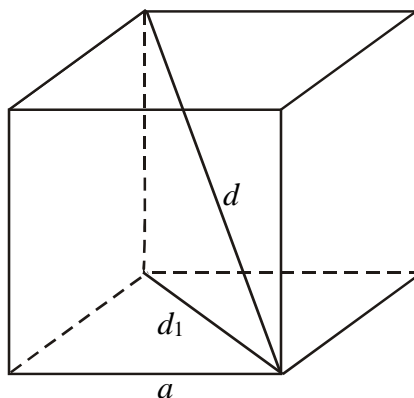
gdy obliczy długość przekątnej:  $d = \frac{6}{3-\sqrt{3}}$  lub  $d = 3 + \sqrt{3}$ .

### II sposób rozwiązania

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia:

$a$  – długość krawędzi sześcianu,

$d$  – długość przekątnej sześcianu.



Korzystamy z zależności  $d = a\sqrt{3}$ .

Ponieważ  $a = d - 2$  rozwiązujemy równanie:

- $d = (d - 2)\sqrt{3}$  i otrzymujemy  $d\sqrt{3} - d = 2\sqrt{3}$  lub  $d(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3}$ .

Wyznaczamy długość przekątnej sześcianu:  $d = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$

lub  $d = 3 + \sqrt{3}$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania****Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze równanie pozwalające obliczyć długość przekątnej  $d = (d-2)\sqrt{3}$  lub  $d\sqrt{3} - d = 2\sqrt{3}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy prawidłowo obliczy długość przekątnej:  $d = \frac{6}{3-\sqrt{3}}$  lub  $d = 3 + \sqrt{3}$  lub

$$d = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) \text{ lub } d = \frac{12 + \sqrt{48}}{4}.$$

**Zadanie 32. (5 pkt)**

Dane są dwie prostokątne działki. Działka pierwsza ma powierzchnię równą  $6000 \text{ m}^2$ . Działka druga ma wymiary większe od wymiarów pierwszej działki o  $10 \text{ m}$  i  $15 \text{ m}$  oraz powierzchnię większą o  $2250 \text{ m}^2$ . Oblicz wymiary pierwszej działki.

**I sposób rozwiązania**

Niech  $x$  oznacza długość jednego z boków pierwszej działki, a  $y$  – długość drugiego boku działki pierwszej, wtedy pole powierzchni działki pierwszej jest równe  $x \cdot y$ . Stąd mamy równanie  $x \cdot y = 6000$ .

Wtedy  $x+10$  oznacza długość jednego z boków działki drugiej, a  $y+15$  długość drugiego boku działki drugiej, zaś pole powierzchni tej działki jest równe  $6000 + 2250 = 8250$ . Otrzymujemy zatem równanie  $(x+10) \cdot (y+15) = 8250$ .

$$\text{Zapisujemy układ równań } \begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ (x+10) \cdot (y+15) = 8250 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy

$y = \frac{6000}{x}$	$x = \frac{6000}{y}$
podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy	
$(x+10) \left( \frac{6000}{x} + 15 \right) = 8250$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. <math>x^2 - 140x + 4000 = 0</math>.</p> $\Delta = 19600 - 16000 = 3600 = 60^2$ $x_1 = \frac{140 - 60}{2} = 40 \text{ lub } x_2 = \frac{140 + 60}{2} = 100$ <p>Obliczamy <math>y</math>:</p>	$\left( \frac{6000}{y} + 10 \right) (y+15) = 8250$ <p>Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. <math>y^2 - 210y + 9000 = 0</math>.</p> $\Delta = 44100 - 36000 = 8100 = 90^2$ $y_1 = \frac{210 - 90}{2} = 60 \text{ lub } y_2 = \frac{210 + 90}{2} = 150$ <p>Obliczamy <math>x</math>:</p>

*Schemat oceniania sierpień*  
*Poziom podstawowy*

$y_1 = \frac{6000}{40} = 150$ lub $y_2 = \frac{6000}{100} = 60$ .	$x_1 = \frac{6000}{60} = 100$ lub $x_2 = \frac{6000}{150} = 40$ .
Odp. Pierwsza działka miała wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.	

**II sposób rozwiązania**

Niech  $x$  oznacza długość jednego z boków pierwszej działki, a  $y$  – długość drugiego boku działki pierwszej, wtedy pole powierzchni działki pierwszej jest równe  $x \cdot y$ . Stąd mamy równanie  $x \cdot y = 6000$

Wtedy  $x+10$  oznacza długość jednego z boków działki drugiej, a  $y+15$  długość drugiego boku działki drugiej, zaś pole powierzchni tej działki jest równe  $6000+2250=8250$ . Otrzymujemy zatem równanie  $(x+10) \cdot (y+15) = 8250$

Zapisujemy układ równań 
$$\begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ (x+10) \cdot (y+15) = 8250 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy kolejno 
$$\begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ x \cdot y + 15x + 10y + 150 = 8250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ 6000 + 15x + 10y + 150 = 8250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ 15x + 10y - 2100 = 0 \end{cases}$$

Równanie  $15x + 10y - 2100 = 0$  dzielimy obustronnie przez 5.

Otrzymujemy  $3x + 2y - 420 = 0$ , stąd wyznaczamy

$y = -\frac{3}{2}x + 210$	$x = -\frac{2}{3}y + 140$
podstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy	
$x \cdot \left(-\frac{3}{2}x + 210\right) = 6000$ $-\frac{3}{2}x^2 + 210x - 6000 = 0$ $x^2 - 140x + 4000 = 0$ $\Delta = 19600 - 16000 = 3600 = 60^2$ $x_1 = \frac{140 - 60}{2} = 40 \text{ lub } x_2 = \frac{140 + 60}{2} = 100$ <p>Obliczamy <math>y</math>:</p> $y_1 = \frac{6000}{40} = 150 \text{ lub } y_2 = \frac{6000}{100} = 60.$	$\left(-\frac{2}{3}y + 140\right) \cdot y = 6000$ $-\frac{2}{3}y^2 + 140y - 6000 = 0$ $y^2 - 210y + 9000 = 0$ $\Delta = 44100 - 36000 = 8100 = 90^2$ $y_1 = \frac{210 - 90}{2} = 60 \text{ lub } y_2 = \frac{210 + 90}{2} = 150$ <p>Obliczamy <math>x</math>:</p> $x_1 = \frac{6000}{60} = 100 \text{ lub } x_2 = \frac{6000}{150} = 40.$
Odp. Pierwsza działka miała wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.	

**Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania.....1 pkt**

Zapisanie jednego z równań:  $x \cdot y = 6000$  albo  $(x+10) \cdot (y+15) = 8250$ , gdzie  $x, y$  oznaczają długości boków pierwszej działki.

**Uwaga**

Nie wymagamy opisanie wprowadzonych oznaczeń, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zapisanie układu równań z niewiadomymi  $x$  i  $y$   $\begin{cases} x \cdot y = 6000 \\ (x+10) \cdot (y+15) = 8250 \end{cases}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą  $x$  lub  $y$ , np:

$$(x+10) \left( \frac{6000}{x} + 15 \right) = 8250 \text{ lub } \left( \frac{6000}{y} + 10 \right) (y+15) = 8250 \text{ lub } x \cdot \left( -\frac{3}{2}x + 210 \right) = 6000 \text{ lub}$$

$$\left( -\frac{2}{3}y + 140 \right) \cdot y = 6000 \text{ lub } x^2 - 140x + 4000 = 0 \text{ lub } y^2 - 210y + 9000 = 0.$$

**Uwaga**

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą i wówczas jego rozwiązanie zostanie zakwalifikowane co najmniej do kategorii *Pokonanie zasadniczych trudności*.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).....4 pkt**

- rozwiązanie równania z niewiadomą  $x$  i nieobliczenie drugiego boku działki,  
albo
- rozwiązanie równania z niewiadomą  $y$  i nieobliczenie pierwszego boku działki,  
albo
- popełnienie błędu rachunkowego w rozwiązaniu równania z jedną niewiadomą (ale otrzymanie dwóch rozwiązań) i konsekwentne do popełnionego błędu obliczenie wymiarów działek,  
albo
- obliczenie wymiarów działki tylko w jednym przypadku.

**Rozwiązanie pełne .....5 pkt**

Obliczenie wymiarów działki pierwszej: działka pierwsza ma wymiary 40 m na 150 m lub 100 m na 60 m.

Uwaga

Jeżeli zdający odgadnie wymiary działki w co najmniej jednym przypadku, to otrzymuje **1 punkt**, nawet w sytuacji, gdy dokonuje systematycznego „przeszukiwania” rozwiązań całkowitych.

**Zadanie 33. (4 pkt)**

Punkty  $A = (-1, -5)$ ,  $B = (3, -1)$  i  $C = (2, 4)$  są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ . Oblicz pole tego równoległoboku.

**I sposób rozwiązania**

Wyznaczamy równanie prostej  $AB$ :  $y = x - 4$ .

Wyznaczamy równanie prostej  $CE$  prostopadłej do prostej  $AB$  i przechodzącej przez punkt  $C$ :

$$y = -x + 6$$

Obliczamy współrzędne punktu  $E$  (przecięcia prostych  $AB$  i  $CE$ ) rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x + 6 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest:  $x = 5$ ,  $y = 1$ . Stąd  $E = (5, 1)$ .

Obliczamy długość odcinka  $AB$ :  $|AB| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ .

Obliczamy długość odcinka  $CE$ :  $|CE| = \sqrt{(5-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ .

Zatem pole równoległoboku jest równe:  $P_{ABCD} = |AB| \cdot |CE| = 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 24$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt**

Obliczenie długości odcinka:  $|AB| = 4\sqrt{2}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Obliczenie współrzędnych punktu  $E$ :  $E = (5, 1)$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Obliczenie wysokości równoległoboku:  $|CE| = 3\sqrt{2}$ .

Uwaga

Zdający może obliczyć wysokość równoległoboku wykorzystując wzór na odległość wierzchołka  $C$  od prostej  $AB$ .

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Obliczenie pola równoległoboku:  $P_{ABCD} = 24$ .

**II sposób rozwiązania**

Zauważamy, że pole równoległoboku  $ABCD$  jest równe podwojonemu polu trójkąta  $ABC$ .

Pole trójkąta  $ABC$  obliczamy ze wzoru:  $P_{ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$ .

Obliczamy pole równoległoboku:

$$P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)| =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} |(3 - (-1))(4 - (-5)) - (-1 - (-5))(2 - (-1))| = |4 \cdot 9 - 4 \cdot 3| = |24| = 24.$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt**

Zauważenie, że  $P_{ABCD} = 2 \cdot P_{ABC}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zastosowanie wzoru na pole trójkąta:  $P_{ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

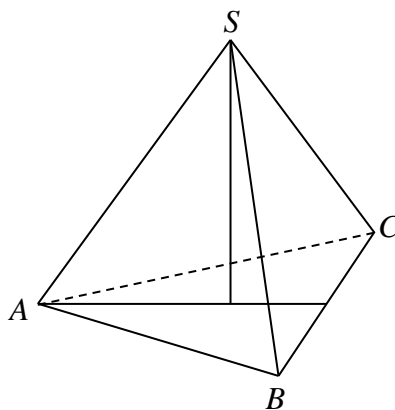
Obliczenie pola trójkąta: 12

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Obliczenie pola równoległoboku:  $P_{ABCD} = 24$ .

**Zadanie 34. (4 pkt)**

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego  $ABCS$  (tak jak na rysunku) jest równa 72, a promień okręgu wpisanego w podstawę  $ABC$  tego ostrosłupa jest równy 2. Oblicz tangens kąta między wysokością tego ostrosłupa i jego ścianą boczną.

**Rozwiązanie**

Oznaczmy:

$a$  – długość boku trójkąta równobocznego  $ABC$ , w który wpisano okrąg o promieniu  $r = 2$ ,  
 $H$  – wysokość tego ostrosłupa,

$\alpha$  – miara kąta między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną.

Ponieważ  $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ , to  $a = 4\sqrt{3}$ .

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego  $ABCS$  jest równa 72, zatem

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{(4\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = 72.$$

Obliczamy wysokość ostrosłupa  $H$ :  $\frac{48\sqrt{3}}{12} \cdot H = 72$ , stąd  $H = \frac{72}{4\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$ .

Zauważamy, że  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{H}$ , stąd  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ .

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zaznaczenie kąta  $\alpha$  między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną lub wybór właściwego kąta do dalszych obliczeń.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie długości boku trójkąta  $ABC$ :  $a = 4\sqrt{3}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie wysokości ostrosłupa  $ABCS$ :  $H = 6\sqrt{3}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie tangensa kąta między wysokością ostrosłupa i jego ścianą boczną:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$ .