Przykładowe rozwiązania

(E. Ludwikowska, M. Zygora, M. Walkowiak)

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Odpowiedź	D	C	B	A	C	B	C	C	D	C	C	D	A

Zadanie	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	B	A	D	C	A	B	C	C	D	D	A	A

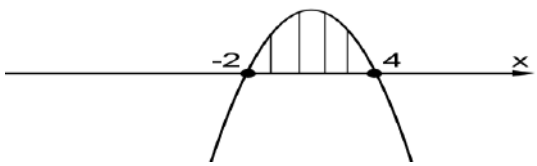
Zadanie 26.

Rozwiąż nierówność: $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$.

Rozwiązanie:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 4 + 32 = 36 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = 6$$

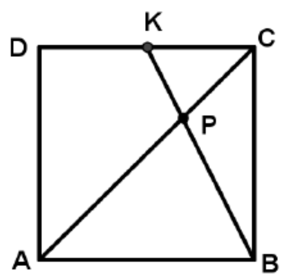
$$x_1 = \frac{-2-6}{2\cdot(-1)} = \frac{-8}{-2} = 4, \qquad x_2 = \frac{-2+6}{2\cdot(-1)} = \frac{4}{-2} = -2$$



Odp.: $x \in < -2, 4 >$.

Zadanie 27.

Na boku DC kwadratu $ABCD$ obrano punkt K tak, że $|DK| = |KC|$ (rys.). Przekątna AC kwadratu przecina się z odcinkiem BK w punkcie P. Uzasadnij, że pole trójkąta ABP jest czterokrotnie większe niż pole trójkąta KCP.



Rozwiązanie:

Zauważmy, że $\angle CAB = \angle ACD$ (kąty naprzemianległe) oraz $\angle APB = \angle CPK$ (kąty wierzchołkowe), zatem trójkąt ABP jest podobny do trójkąta KCP (na mocy cechy kk).

Skala podobieństwa $k = \frac{|AB|}{|KC|}$, $|AB| = 2|KC|$, więc $k = \frac{2|KC|}{|KC|} = 2$.

Stosunek pól trójkątów podobnych w skali *k*, jest równy kwadratowi skali podobieństwa k^2,

zatem stosunek pól trójkątów *ABP* i *KPC* jest równy 4, czyli pole trójkąta *ABP* jest cztery razy większe od pola trójkąta *KCP*. c.n.d.

Zadanie 28.

Wyznacz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego wiedząc, że trzeci wyraz jest równy 18, a szósty 486.

Rozwiązanie:

Zapisujemy układ równań wykorzystując wzór na dowolny wyraz ciągu geometrycznego

$$\begin{cases} a_1 q^2 = 18 \\ a_1 q^5 = 486 \end{cases}.$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $a_1 = \frac{18}{q^2}$ $(q \neq 0)$ i po podstawieniu do drugiego równania otrzymujemy $\frac{18}{q^2} \cdot q^5 = 486$.

Stąd $q^3 = 27,$ więc $q = 3.$

Podstawiamy $q = 3$ do pierwszego równania układu i wyliczamy $a_1 = 2.$

Odp.: $a_1 = 2, q = 3.$

Zadanie 29.

Wykaż, że liczby $a = \frac{-5}{2\sqrt{2}+3}$ oraz $b = |10\sqrt{2} - 15|$ są liczbami przeciwnymi.

Rozwiązanie:

Przekształcamy liczbę a usuwając niewymierność z mianownika ułamka.

$$a = \frac{-5}{2\sqrt{2}+3} \cdot \frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}-3} = \frac{-10\sqrt{2}+15}{(2\sqrt{2})^2 - 3^2} = \frac{-10\sqrt{2}+15}{-1} = 10\sqrt{2} - 15$$

Po wykorzystaniu definicji wartości bezwzględnej doprowadzamy liczbę b do postaci:

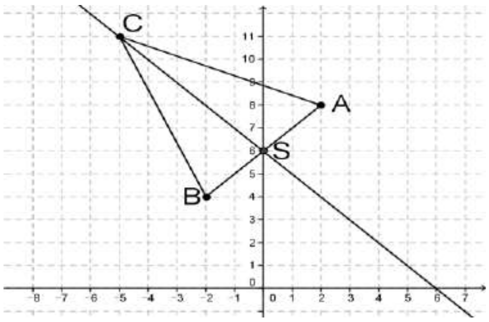
$$b = |10\sqrt{2} - 15| = -10\sqrt{2} + 15$$

Stwierdzamy, że liczby a i b są przeciwne, bo $a + b = 0.$

Zadanie 30.

W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB poprowadzono wysokość z wierzchołka C. Wyznacz równanie prostej zawierającej tę wysokość, jeśli $A = (2,8)$, $B = (-2,4)$.

Rozwiązanie:



Obliczamy współrzędne środka S odcinka AB, gdzie A = (2, 8), B = (−2, 4).

$x_s = \frac{2+(-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0,\ y_s = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6,$

zatem S = (0, 6).

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AB: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-8}{-2-2} = \frac{-4}{-4} = 1.$

Współczynnik prostej prostopadłej jest równy −1.

Wyznaczamy równanie prostej, o współczynniku kierunkowym −1, która przechodzi przez punkt S = (0, 6).

$y = ax + b$

$6 = -1 \cdot 0 + b$, zatem $b = 6$.

Odp.: Równanie szukanej prostej ma postać: $y = -x + 6$.

Zadanie 31.

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy kolejno trzy razy po jednej liczbie bez zwracania tworząc liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A – otrzymana liczba będzie mniejsza od 432.

Rozwiązanie:

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $\overline{\overline{\Omega}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $\overline{\overline{A}} = 43$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{43}{60}$.

Zadanie 32.

Z miast A i B odległych o 330 km wyjechały naprzeciwko siebie dwa samochody. Samochód jadący z miasta A wyjechał 20 minut wcześniej i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą niż samochód jadący z miasta B. Samochody te minęły się w odległości 168 km licząc od miasta A. Oblicz średnią prędkość każdego z samochodów.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy oznaczenia:

	Średnia prędkość	Czas	Droga
Samochód jadący z miasta A	$v-9$	$t+\frac{1}{3}$	168 km
Samochód jadący z miasta B	v	t	162 km

Wykorzystując warunki zadania, tworzymy układ równań:

$$\begin{cases}(v-9)\left(t+\frac{1}{3}\right)=168\\ vt=162\end{cases}$$

Wyznaczamy z drugiego równania $t=\frac{162}{v}$ i wstawiamy do pierwszego równania układu:

$$(v-9)\left(\frac{162}{v}+\frac{1}{3}\right)=168$$

$$162+\frac{1}{3}v-\frac{1458}{v}-3=168$$

Po przekształceniu otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$\frac{1}{3}v^2-9v-1458=0$$

$$\Delta=81+1944=2025$$

$\sqrt{\Delta}=45$, stąd $v_1=81$; $v_2=-54$

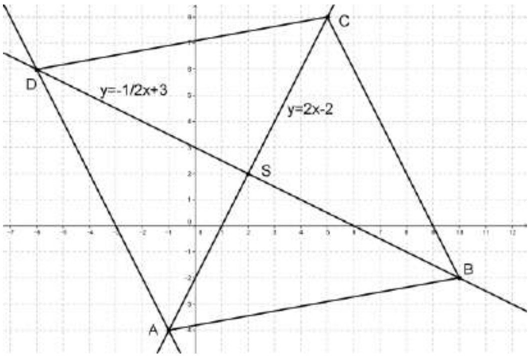
Odrzucamy rozwiązanie $v_2=-54$, które jest niezgodne z warunkami zadania.

Odp.: Samochód z miasta A jechał z prędkością 72 km/h, a z miejscowości B 81 km/h.

Zadanie 33.

Wyznacz pole i obwód rombu $ABCD$ wiedząc, że przekątna AC jest zawarta w prostej o równaniu $y = 2x - 2$ oraz $A = (-1, -4)$ i $D = (-6,6)$.

Rozwiązanie:



Wyznaczamy równanie prostej BD, prostopadłej do prostej AC o równaniu y = 2x – 2, przechodzącej przez punkt D = (−6, 6).

Współczynnik prostej prostopadłej do prostej AC jest równy $-\frac{1}{2}$.

Zatem: $y = ax + b$

$6 = -\frac{1}{2} \cdot (-6) + b$

Stąd $b = 3$.

Prosta BD ma postać: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Wyznaczamy współrzędne punktu przecięcia przekątnych S rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$

Układ rozwiązujemy metodą podstawiania

$$\begin{cases} 2x - 2 = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$

$2x + \frac{1}{2}x = 3 + 2$

$2\frac{1}{2}x = 5$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$, czyli S = (2, 2).

Obliczamy długości odcinków AS oraz DS.:

$|AS| = \sqrt{(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2}$

$|AS| = \sqrt{(2+1)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}[j.]$

$|DS| = \sqrt{(x_S - x_D)^2 + (y_S - y_D)^2}$

$|DS| = \sqrt{(2+6)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}[j.]$

Zatem długości przekątnych rombu są równe:

$|AC| = 2|AS| = 2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}[j.]$

$|BD| = 2|DS| = 2 \cdot 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5}[j.]$

Obliczamy pole rombu korzystając ze wzoru: $P = \frac{|AC|\cdot|BD|}{2}$.

$P = \frac{6\sqrt{5}\cdot 8\sqrt{5}}{2} = \frac{48\cdot 5}{2} = 120\ [j.^2\ ]$

Obliczamy długość boku rombu AD korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ASD:

$|AD|^2 = |AS|^2 + |DS|^2$

$|AD|^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 + \left(4\sqrt{5}\right)^2$

$|AD|^2 = 45 + 80 = 125$

$|AD| = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}[j.]$

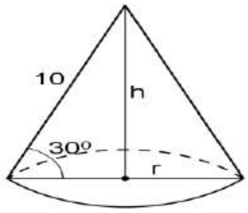
$Ob = 4|AD| = 4 \cdot 5\sqrt{5} = 20\sqrt{5}\ [j.]$

Odp.: Pole rombu jest równe 120$[j.^2\ ]$, a obwód $20\sqrt{5}\ [j.]$

Zadanie 34.

Metalowy stożek, którego tworząca o długości 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30^0, przetopiono na sześć jednakowych kulek. Oblicz promień kulki.

Rozwiązanie:



Obliczamy długość promienia stożka: $cos30° = \frac{r}{10}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{10}$$

$$r = 5\sqrt{3}[j.]$$

Obliczamy długość wysokości stożka: $sin30° = \frac{h}{10}$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{10}$$

$$h = 5[j.]$$

Obliczamy objętość stożka: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(5\sqrt{3}\right)^2 \cdot 5 = 125\pi[j.^3]$.

Wyznaczamy zależność między objętością stożka i łączną objętością sześciu kulek: $V_s = 6V_k$.

Niech R −promień kulki, więc objętość jednej kulki jest równa $V_k = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Obliczamy długość promienia jednej kulki:

mamy zatem

$$125\pi = 6 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

$$R^3 = \frac{125}{8}$$

$$R = \frac{5}{2}[j.]$$

Odp.: Długość promienia kulki: $R = \frac{5}{2}[j.]$.